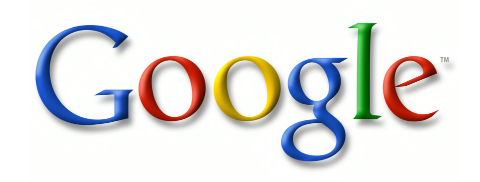
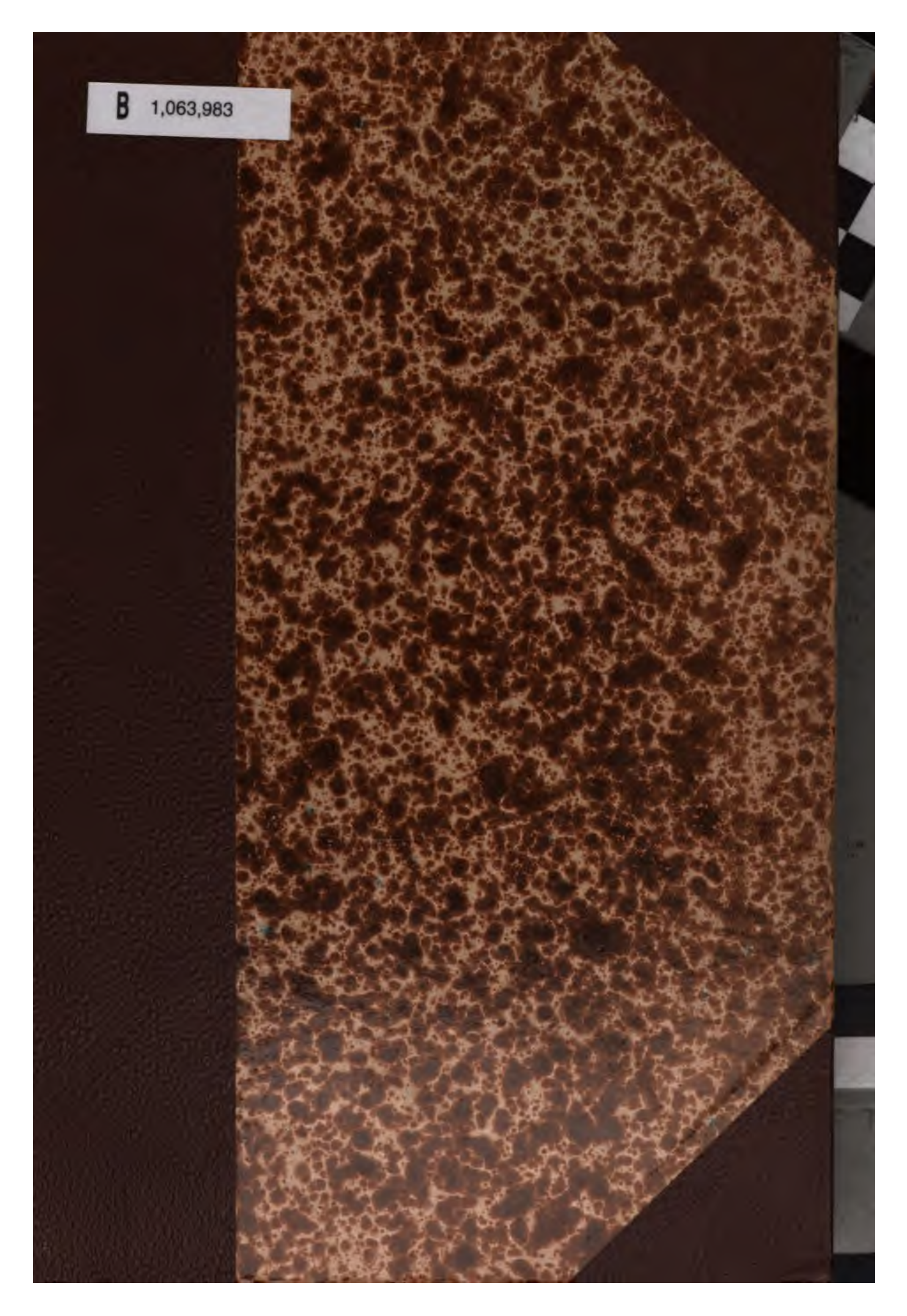



B 1,063,983





SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES.

ANNALES

DE LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

Nulla unquam inter fidem et rationem vera dissensio esse potest.

CONST. DE FID. CATH., c IV

VINGTIÈME ANNÉE, 1895-1896

LOUVAIN

SECRÉTARIAT DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

(M. J. THIRION)

11, Rue des Récollets, 11

Administration : Bureaux de la Société scientifique

56, Rue de l'Est, à Bruxelles.

1896

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

DOCUMENTS ET COMPTES RENDUS

COMMUNICATIONS DIVERSES.

Pages.

CONFÉRENCES.

AUTEURS.

SECONDE PARTIE

MÉMOIRES

AUTEURS.

PREMIÈRE PARTIE

DOCUMENTS ET COMPTES RENDUS

STATUTS

ARTICLE 1er. — Il est constitué à Bruxelles une association qui prend le nom de Société scientifique de Bruxelles, avec la devise : « *Nulla unquam inter fidem et rationem vera dissensio esse potest* » (1).

ART. 2. — Cette association se propose de favoriser, conformément à l'esprit de sa devise, l'avancement et la diffusion des sciences.

ART. 3. — Elle publiera annuellement le compte rendu de ses réunions, les travaux présentés par ses membres et des rapports sommaires sur les progrès accomplis dans chaque branche.

Elle tâchera de rendre possible la publication d'une revue destinée à la vulgarisation (2).

ART. 4. — Elle se compose d'un nombre illimité de membres, et fait appel à tous ceux qui reconnaissent l'importance d'une culture scientifique sérieuse pour le bien de la société.

---

(1) Const. de Fid. cath., c. IV.

(2) Depuis le mois de janvier 1877, cette revue paraît par livraisons trimestrielles, sous le titre de *Revue des questions scientifiques*. Elle forme chaque année deux volumes in-8° de 700 pages. Prix de l'abonnement : 20 francs par an pour tous les pays de l'Union postale. Les membres de la Société scientifique ont droit à une réduction de 25 pour cent.

Art. 5. — Elle est dirigée par un *Conseil* de vingt membres, élus annuellement dans son sein. Le Président, les Vice-Présidents, le Secrétaire et le Trésorier font partie de ce Conseil. Parmi les membres du Bureau, le Secrétaire et le Trésorier sont seuls rééligibles.

Art. 6. — Pour être admis dans l'association, il faut être présenté par deux membres. La demande, signée par ceux-ci, est adressée au Président, qui la soumet au Conseil. L'admission n'est prononcée qu'à la majorité des deux tiers des voix.

L'exclusion d'un membre ne pourra être prononcée que pour des motifs graves et à la majorité des deux tiers des membres du Conseil.

Art. 7. — Les membres qui souscrivent, à une époque quelconque, une ou plusieurs parts du capital social, sont *membres fondateurs*. Ces parts sont de 500 francs. Les *membres ordinaires* versent une cotisation annuelle de 15 francs, qui peut toujours être rachetée par une somme de 150 francs, versée une fois pour toutes.

Le Conseil peut nommer des *membres honoraires* parmi les savants étrangers à la Belgique.

Les noms des membres fondateurs figurent en tête des listes par ordre d'inscription, et ces membres reçoivent autant d'exemplaires des publications annuelles qu'ils ont souscrit de parts du capital social. Les membres ordinaires et les membres honoraires reçoivent un exemplaire de ces publications.

Tous les membres ont le même droit de vote dans les Assemblées générales.

Art. 8. — Chaque année il y a trois sessions. La principale se tiendra dans la quinzaine qui suit la fête de Pâques et pourra durer quatre jours. Le public y sera admis sur la présentation de cartes. On y lit les rapports annuels et l'on y nomme le Bureau et le Conseil pour l'année suivante.

Les deux autres sessions se tiendront en octobre et en janvier. Elles pourront durer deux jours et auront pour objet principal de préparer la session de Pâques.

Art. 9. — Lorsqu'une résolution, prise dans l'Assemblée générale, n'aura pas été délibérée en présence du tiers des membres de la Société, le Conseil aura la faculté d'ajourner la décision jusqu'à la prochaine session de Pâques. La décision sera alors définitive, quel que soit le nombre des membres présents.

Art. 10. — La Société ne permettra jamais qu'il se produise dans son sein aucune attaque, même courtoise, à la religion catholique ou à la philosophie spiritualiste et religieuse.

Art. 11. — Dans les sessions, la Société se répartit en cinq sections : I. *Sciences mathématiques,* II. *Sciences physiques,* III. *Sciences naturelles,* IV. *Sciences médicales,* V. *Sciences économiques.*

Tout membre de l'association choisit chaque année la section à laquelle il désire appartenir. Il a le droit de prendre part aux travaux des autres sections avec voix consultative.

Art. 12. — La session comprend des séances générales et des séances de section.

Art. 13. — Le Conseil représente l'association. Il a tout pouvoir pour gérer et administrer les affaires sociales. Il place en rentes sur l'État ou en valeurs garanties par l'État les fonds qui constituent le capital social.

Il fait tous les règlements d'ordre intérieur que peut nécessiter l'exécution des statuts, sauf le droit de contrôle de l'Assemblée générale.

Il délibère, sauf les cas prévus à l'article 6, à la majorité des membres présents. Néanmoins, aucune résolution ne sera valable qu'autant qu'elle aura été délibérée en présence du tiers au moins des membres du Conseil dûment convoqué.

Art. 14. — Tous les actes, reçus et décharges sont signés par le Trésorier et un membre du Conseil, délégué à cet effet.

Art. 15. — Le Conseil dresse annuellement le budget des dépenses de l'association et présente dans la session de Pâques le

compte détaillé des recettes et dépenses de l'exercice écoulé. L'approbation de ces comptes, après examen de l'Assemblée, lui donne décharge.

Art. 16. — Les statuts ne pourront être modifiés que sur la proposition du Conseil, à la majorité des deux tiers des membres votants, et dans l'Assemblée générale de la session de Pâques.

Les modifications ne pourront être soumises au vote qu'après avoir été proposées dans une des sessions précédentes. Elles devront figurer à l'ordre du jour dans les convocations adressées à tous les membres de la Société.

Art. 17. — La devise et l'article 10 ne pourront jamais être modifiés.

En cas de dissolution, l'Assemblée générale, convoquée extraordinairement, statuera sur la destination des biens appartenant à l'association. Cette destination devra être conforme au but indiqué dans l'article 2.

RÈGLEMENT

ARRÊTÉ PAR LE CONSEIL POUR L'ENCOURAGEMENT DES RECHERCHES SCIENTIFIQUES.

---

1. — Le Conseil de la Société scientifique de Bruxelles a résolu d'instituer des concours et d'accorder des subsides pour encourager les recherches scientifiques.

2. — A cet objet seront consacrés :

1° Le revenu du bénéfice acquis à la Société jusqu'à la session de Pâques 1879;

2° La moitié du bénéfice acquis pendant l'exercice qui précède l'exercice courant.

3. — Chaque année, l'une des sections désignera une question à mettre au concours. L'ordre dans lequel les sections feront cette

désignation sera déterminé par le sort. Toute question, pour être posée, devra être approuvée par le Conseil, qui donnera aux questions la publicité convenable.

4. — Les questions auxquelles il n'aura pas été répondu d'une manière satisfaisante resteront au concours. Le Conseil pourra cependant inviter les sections compétentes à les remplacer par d'autres.

5. — Aucun prix ne pourra être inférieur à 500 francs. Une médaille sera en outre remise à l'auteur du mémoire couronné.

6. — Ces concours ne seront ouverts qu'aux membres de la Société.

7. — Ne sont admis que les ouvrages et les planches manuscrits.

8. — Le choix de la langue dans laquelle seront rédigés les mémoires est libre. Ils seront, s'il y a lieu, traduits aux frais de la Société; la publication n'aura lieu qu'en français.

9. — Les auteurs ne mettront pas leur nom à ces mémoires, mais seulement une devise qu'ils répéteront dans un billet cacheté renfermant leur nom et leur adresse.

10. — Les jurys des concours seront composés de trois membres présentés par la section compétente et nommés par le Conseil.

11. — Les prix seront décernés par le Conseil sur le rapport des jurys.

12. — Toute décision du Conseil ou des sections relative aux prix sera prise au scrutin secret et à la majorité absolue des suffrages.

13. — La Société n'a l'obligation de publier aucun travail couronné; les manuscrits de tous les travaux présentés au concours restent la propriété de la Société. En cas de publication, cent exemplaires seront remis gratuitement aux auteurs.

14. — Les résultats des concours seront proclamés et les médailles remises dans l'une des assemblées générales de la session de Pâques. Les rapports des jurys devront être remis au Conseil six semaines avant cette session. Le 1er octobre de l'année précédente est la date de rigueur pour l'envoi des mémoires au secrétariat.

15. — Pour être admis à demander un subside, il faut être membre de la Société depuis un an au moins.

16. — Le membre qui demandera un subside devra faire connaître par écrit le but précis de ses travaux, au moins d'une manière générale; il sera tenu, dans les six mois de l'allocation du subside, de présenter au Conseil un rapport écrit sur les résultats de ses recherches, quel qu'en ait été le succès.

17. — Le Conseil, après avoir pris connaissance des diverses demandes de subsides, à l'effet d'en apprécier l'importance relative, statuera au scrutin secret.

18. — Les résultats des recherches favorisées par les subsides de la Société devront lui être présentés, pour être publiés dans ses *Annales* s'il y a lieu.

LETTRE

DE

S. S. LE PAPE LÉON XIII

AU PRÉSIDENT ET AUX MEMBRES
DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES.

Dilectis Filiis Praesidi ac Membris Societatis Scientificae Bruxellis constitutae.

LEO PP. XIII.

DILECTI FILII, SALUTEM ET APOSTOLICAM BENEDICTIONEM.

Gratae Nobis advenerunt litterae vestrae una cum Annalibus et Quaestionibus a vobis editis, quas in obsequentissimum erga Nos et Apostolicam Sedem pietatis testimonium obtulistis. Libenter sane agnovimus Societatem vestram quae a scientiis sibi nomen fecit, et quae tribus tantum abhinc annis laetis auspiciis ac Iesu Christi Vicarii benedictione Bruxellis constituta est, magnum iam incrementum cepisse, et uberes fructus polliceri. Profecto cum infensissimi relligionis ac veritatis hostes nunquam desistant, imo magis magisque studeant dissidium rationem inter ac fidem propugnare, opportunum est ut praestantes scientia ac pietate viri ubique exurgant, qui Ecclesiae doctrinis ac documentis ex animo obsequentes, in id contendant, ut demonstrent *nullam unquam inter fidem et rationem veram dissensionem esse posse;* quemadmodum Sacrosancta Vaticana Synodus, constantem Ecclesiae et Sanctorum Patrum doctrinam affirmans, declaravit Constitutione IV^{a} de fide catholica. Quapropter gratulamur quod Societas vestra hunc primo finem sibi proposuerit, itemque in statutis legem dederit, ne quid a sociis contra sanam christianae philosophiae doctrinam committatur; simulque omnes hortamur ut nunquam de egregio eiusmodi laudis tramite deflectant, atque ut toto animi nisu praestitutum Societatis finem praeclaris exemplis ac scriptis editis continuo assequi adnitantur. Deum autem Optimum Maximum precamur, ut vos omnes coelestibus praesidiis confirmet ac muniat: quorum auspicem et Nostrae in vos benevolentiae pignus,

Apostolicam benedictionem vobis, dilecti filii, et Societati vestrae ex animo impertimur.

Datum Romae apud S. Petrum die 15 Ianuarii 1879, Pontificatus Nostri Anno Primo. **Leo PP. XIII.**

A nos chers fils le Président et les Membres de la Société scientifique de Bruxelles.

LÉON XIII, PAPE.

CHERS FILS, SALUT ET BÉNÉDICTION APOSTOLIQUE.

Votre lettre Nous a été agréable, ainsi que les Annales et les Questions publiées par vous et offertes en témoignage de votre piété respectueuse envers Nous et le Siège apostolique. Nous avons vu réellement avec plaisir que votre Société, qui a adopté le nom de Société scientifique, et s'est constituée à Bruxelles, depuis trois ans seulement, sous d'heureux auspices avec la bénédiction du Vicaire de Jésus-Christ, a déjà pris un grand développement et promet des fruits abondants. Certes, puisque les ennemis acharnés de la religion et de la vérité ne se lassent point et s'obstinent même de plus en plus à proclamer l'opposition entre la raison et la foi, il est opportun que partout surgissent des hommes distingués par la science et la piété, qui, attachés de cœur aux doctrines et aux enseignements de l'Église, s'appliquent à démontrer *qu'il ne peut jamais exister de désaccord réel entre la foi et la raison,* comme l'a déclaré, dans la Constitution IV *de fide catholica,* le saint concile du Vatican affirmant la doctrine constante de l'Église et des saints Pères. C'est pourquoi Nous félicitons votre Société de ce qu'elle s'est d'abord proposé cette fin, et aussi de ce qu'elle a mis dans les Statuts un article défendant à ses membres toute attaque aux saines doctrines de la philosophie chrétienne; et en même temps Nous les exhortons tous à ne jamais s'écarter de la voie excellente qui leur vaut un tel éloge, et à poursuivre continuellement de tout l'effort de leur esprit l'objet assigné à la Société, par d'éclatants exemples et par leurs publications. Nous prions Dieu très bon et très grand, qu'il vous soutienne tous et vous fortifie du céleste secours : en présage duquel, et comme gage de Notre bienveillance envers vous, Nous accordons du fond du cœur à vous, chers fils, et à votre Société la bénédiction apostolique.

Donné à Rome, à Saint-Pierre, le 15 janvier 1879, l'an 1 de notre Pontificat. **Léon XIII, Pape.**

LISTES

DES

MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES.

ANNÉE 1896.

Liste des membres fondateurs.

S. É. le cardinal Dechamps (1), archevêque de . .	Malines.
François de Cannart d'Hamale (1).	Malines.
Charles Dessain	Malines.
Jules van Havre (1)	Anvers.
Le chanoine Maes (1)	Bruges.
Le chanoine De Leyn	Bruges.
Leirens-Eliaert	Alost.
Frank Gillis (1)	Bruxelles.
Joseph Saey	Bruxelles.
Le Chev de Schoutheete de Tervarent	Saint-Nicolas.
Le Collège Saint-Michel.	Bruxelles.
Le Collège Notre-Dame de la Paix	Namur.
Le Duc d'Ursel, sénateur (1)	Bruxelles.
Le Pce Gustave de Croy (1)	Le Rœulx.
Le Cte de T'Serclaes (1)	Gand.
Auguste Dumont de Chassart (1)	Mellet (Hainaut).
Charles Hermite, membre de l'Institut	Paris.
L'École libre de l'Immaculée-Conception	Vaugirard-Paris.
L'École libre Sainte-Geneviève	Paris.
Le Collège Saint-Servais.	Liége.
Le Cte de Bergeyck	Beveren-Waes.
L'Institut Saint-Ignace	Anvers.
Philippe Gilbert (1), correspondant de l'Institut.	Louvain.
Le R. P. Provincial de la Compagnie de Jésus en Belgique	Bruxelles.

(1) Décédé.

Le Collège SAINT-JOSEPH.	Alost.
Le chanoine DE WOUTERS	Braine-le-Comte.
Antoine D'ABBADIE ([1]), membre de l'Institut. . .	Paris.
S. É. le cardinal HAYNALD ([1]), archevêque de Kalocsa et Bàcs.	Kalocsa (Hongrie).
S. É. le cardinal Séraphin VANNUTELLI	Rome.
S. G. Mgr DU ROUSSAUX, évêque de	Tournai.
S. É. le cardinal GOOSSENS, archevêque de . . .	Malines.
R. BEDEL	Aix.
S. G. Mgr BELIN ([1]), évêque de.	Namur.
Eugène PECHER.	Bruxelles.
S. Exc. Mgr FERRATA, archevêque de Thessalonique, nonce apostolique	Paris.
S. Exc. Mgr NAVA DI BONTIFÈ, archevêque d'Héraclée, nonce apostolique	Bruxelles.

Liste des membres honoraires.

Charles HERMITE, membre de l'Institut	Paris.
Le général NEWTON	New-York.
Le docteur FOERSTER	Aix-la-Chapelle.
A. DE LAPPARENT, membre de l'Institut	Paris.
A. BÉCHAMP	Lille.
Camille JORDAN, membre de l'Institut	Paris.
WOLF, membre de l'Institut	Paris.
HATON DE LA GOUPILLIÈRE, membre de l'Institut .	Paris.
Le vice-amiral DE JONQUIÈRES, membre de l'Institut.	Paris.
BOUSSINESQ, membre de l'Institut	Paris.
L. DE BUSSY, membre de l'Institut.	Paris.
AMAGAT, correspondant de l'Institut, répétiteur à l'École polytechnique.	Paris.
FABRE	Sérignan.
V. HAUTEFEUILLE, membre de l'Institut. . . .	Paris.

([1]) Décédé.

Liste générale des membres de la Société scientifique de Bruxelles.

—

ABBELOOS (Mgr), docteur en théologie, recteur magnifique de l'Université, 3, montagne du Collège. — Louvain.
D'ACY (E.), 40, boulevard Malesherbes. — Paris.
ADAN DE YARZA (Ramon), ingénieur des mines. — Lequeitio (Vizcaya — Espagne).
ALEXIS, M. G. (Frère), 27, rue Oudinot. — Paris.
ALLARD (François), industriel. — Chatelineau.
AMAGAT, correspondant de l'Institut, répétiteur à l'École polytechnique, 34, rue St-Lambert. — Paris.
ANDRÉ (J.-B.), inspecteur au ministère des travaux publics, 111, avenue Brugmann. — Uccle.
ARCELIN (Adrien), secrétaire perpétuel de l'Académie de Mâcon. — Châlon-sur-Saône (Saône-et-Loire — France).
ARDUIN (abbé Alexis), à Aiguebelle, par Grignan (Drôme — France).
BAIVY (D^r), Place Saint-Aubin. — Namur.
BALLION (J.), 367, chaussée de Courtrai. — Gand.
BARDIN (abbé Louis). — Saint-Louis de Carthage (Tunisie).
BAREEL, S. J. (R. P. Victor), Collège St-Stanislas, 15, rue des Dominicains. — Mons.
DI BARTOLO (Canonico Salvatore), Ruggiero Settimo, 71. — Palermo (Sicile).
BAULE (Albert), lieutenant de vaisseau, 133, chemin de Magudas. — Caudéran, près Bordeaux (Gironde — France).
BAYET (Adrien), 33, nouveau Marché aux Grains. — Bruxelles.
BEAUVOIS (E.). — Corberon (Côte-d'Or — France).
BEDEL (abbé R.), prêtre de St-Sulpice, directeur au Grand-Séminaire. — Aix (Bouches-du-Rhône — France).
BELPAIRE (Frédéric), ingénieur, 48, avenue du Margrave. — Anvers.
DE BERGEYCK (Cte), château de Beveren-Waes (Flandre orientale).
BERLEUR (Adolphe), ingénieur, 17, rue Saint-Laurent. — Liége.
BERLINGIN (Melchior), directeur des laminoirs de la Vieille-Montagne. — Penchot par Viviez (Aveyron — France).
BERTRAND (Léon), 9, rue Crespel. — Bruxelles.
BÉTHUNE (Mgr Félix), 40, rue d'Argent. — Bruges.

BLONDEL (Alfred), ingénieur, 1, place du Parc. — Tournai.
BLONDIAUX (Auguste), château du Champ-Bourdon. — Thy-le-Château (Namur).
BLOT (abbé), missionnaire apostolique, Église et Maison de l'Espérance, 31, rue Dombasle. — Paris (Vaugirard).
DE LA BOËSSIÈRE-THIENNES (Mis), 23, rue aux Laines. — Bruxelles; ou château de Lombise par Lens (Hainaut).
BOLSIUS, S. J. (R. P. Henri), Kerkstraat, A. 14. — Oudenbosch (Pays-Bas).
BONAMIS (Florimond), ingénieur. — Jambes (Namur).
BORGINON (Paul), 58, rue Dupont. — Bruxelles.
BOSSU (l'abbé), professeur à l'Université, 36, rue de Bériot. — Louvain.
BOULAY (chan.), professeur aux Facultés catholiques, 14, rue Mercier. — Lille (Nord — France).
BOUQUÉ, professeur à l'Université, 3, rue des Selliers. — Gand.
BOUQUILLON (abbé Th.), Catholic University of America. — Washington (Brookland, D. C., États-Unis d'Amérique).
BOURGEAT (abbé), professeur aux Facultés catholiques, 15, rue Charles de Muyssart. — Lille (Nord — France).
BOUSSINESQ, membre de l'Institut, 73, rue Claude Bernard. — Paris.
DU BOYS (Paul), ingénieur des ponts et chaussées, 54, rue du Mans. — Alençon (Orne — France).
VAN DEN BRANDEN DE REETH (S. Gr. Mgr), évêque d'Érythrée, 113, via de IV Fontane. — Rome.
BRANLY (Édouard), professeur à l'Institut catholique, 21, avenue de Tourville. — Paris.
BRAUN (R. P. Ch.). — Mariaschein (Bohême).
BREITHOF (N.), professeur à l'Université, 95, rue de Bruxelles. — Louvain.
VAN DER BRUGGEN (Bon Maurice), 20, rue du Gouvernement. — Gand.
BRUYLANTS, professeur à l'Université catholique, de l'Académie royale de médecine, 32, rue des Récollets. — Louvain.
BUISSERET (Anatole), professeur à l'École des cadets. — Namur.
BUISSERET (Joseph), professeur à l'École normale de l'État. — Nivelles.
DE BUSSY (L.), membre de l'Institut, inspecteur général des constructions navales, 7, rue de Jouy. — Paris.
CAMBOUÉ, S. J (R. P. Paul), missionnaire apostolique, 33, rue de la Compagnie. — Saint-Denis (île de La Réunion).

Cappellen (Guillaume), conseiller provincial, 4, place Marguerite. — Louvain.
Caratheodory (Costa), 101, avenue Louise. — Bruxelles.
Carnoy (Joseph), professeur à l'Université, 9, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.
Cartuyvels (Jules), directeur au ministère de l'agriculture, 215, rue de la Loi. — Bruxelles.
Casarés (Firmino), farmacia, 93, calle de San Andrés. — La Coruña (Espagne).
Chautard, doyen de la Faculté catholique des sciences de Lille, villa St-Marc, par Croissanville (Calvados — France).
Clasen (abbé B.-I.), curé-doyen d'Echternach (Grand-Duché de Luxembourg).
Cloquet (L.), professeur à l'Université, 2, rue St-Pierre. — Gand.
Cogels (J.-B.-Henri), 181, avenue des Arts. — Anvers.
Colegio de Estudios Superiores de Deusto (R. P. J. Han. Obeso). — Bilbao (Espagne).
Collège de la compagnie de Jésus, 11, rue des Récollets. — Louvain.
Collège Notre-Dame de la Paix, 39, rue de Bruxelles. — Namur.
Collège Saint-Joseph, 13, rue de Bruxelles. — Alost.
Collège Saint-Michel, 14, rue des Ursulines. — Bruxelles.
Collège Saint-Servais, 88, rue Saint-Gilles. — Liége.
Collège de Bellevue. — Dinant.
Colombier, 14, rue Lhomond. — Paris.
Coppieters de Stockhove (abbé Ch.), directeur des Dames de l'Instruction chrétienne. — Bruges.
Coupé (abbé J.), aumônier-adjoint de la Maison centrale pénitentiaire, 33, rue Courte des Violettes. — Gand.
Cousin (L.), ingénieur au conseil du gouvernement chilien, professeur à l'Université, casilla 952. — Santiago (Chili).
Cranincx (Oscar), 51, rue de la Loi. — Bruxelles.
de Croy (P^{ce} Juste), 63, rue de la Loi. — Bruxelles; ou Le Rœulx.
Cuylits (Jean), docteur en médecine, 44, boulevard de Waterloo. — Bruxelles.
Daniels (D^r Fr.), professeur à l'Université catholique de Fribourg (Suisse).
Daubresse (Paul), ingénieur, 42, rue des Orphelins. — Louvain.
Davignon (Julien), 41, avenue de la Toison-d'Or. — Bruxelles.
De Baets (Herman), 11, rue des Boutiques. — Gand.

De Baets (abbé Maurice), Institut des hautes études, 1, rue des Flamands. — Louvain.
Debaisieux, professeur à l'Université, 14, rue Léopold. — Louvain.
De Becker (chan. Jules), professeur à l'Université, 112, rue de Namur. — Louvain.
De Bien (Fernand), ingénieur, 50, avenue du Margrave. — Anvers.
De Bloo (Julien), ingénieur, 89, boulevard Frère-Orban. — Gand.
De Brouwer (chan.), curé-doyen. — Menin.
De Bruyn (Jules), 175, chaussée de Wavre. — Bruxelles.
De Buck (Dr D.), 7, rue des Boutiques. — Gand.
Degive (A.), membre de l'Académie royale de médecine, directeur de l'École vétérinaire de l'État, boulevard d'Anderlecht. — Cureghem lez-Bruxelles.
De Greeff, S. J. (R. P. Henri), Collège N.-D. de la Paix, rue de Bruxelles. — Namur.
De Jaer (Camille), avocat, 56, boulevard de Waterloo. — Bruxelles.
De Jaer (Jules), ingénieur des mines, Vieux-Marché-aux-Bêtes.—Mons.
Delacre (Maurice), membre correspondant de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université, 129, chaussée de Courtrai. — Gand.
Delaire (A.), 238, boulevard Saint-Germain. — Paris.
De Lantsheere (Dr J.), oculiste, 58, rue de l'Association. — Bruxelles.
De Lantsheere (Léon), avocat, 69, rue du Commerce. — Bruxelles.
Delattre, S. J. (R. P.), 11, rue des Récollets. — Louvain.
Delaunois (Dr G.), à Bon-Secours, par Péruwelz (Hainaut).
Delcroix (Dr A.), 18, chaussée de Louvain. — Bruxelles.
Delétrez (Dr A.), 5, rue de la Charité. — Bruxelles.
De Leyn (chan. A.), 52, rue du Marécage. — Bruges.
Delvigne (chan. Adolphe), curé de Saint-Josse-ten-Noode, 14, rue de la Pacification. — Bruxelles.
Demanet (chan.), docteur en sciences physiques et mathématiques, professeur à l'Université, Collège du St-Esprit.— Louvain.
De Marbaix (Alph.), professeur à l'Université de Louvain, membre de l'Académie royale de médecine. — Meerhout.
De Moor (Dr). — Gand.
Denys (Dr J.), professeur à l'Université catholique, 22, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.
De Preter (Herman), ingénieur, 59, rue du Marais. — Bruxelles.
Deschamps (R. P. Alfred), docteur en sciences naturelles, 11, rue des Récollets. — Louvain.

De Smedt, S. J. (R. P. Charles), président de la Société des Bollandistes, correspondant de l'Institut, 14, rue des Ursulines. — Bruxelles.
Desplats (docteur), professeur aux Facultés catholiques, 56, boulevard Vauban. — Lille (Nord — France).
Dessain (Charles), libraire-éditeur, rue de la Blanchisserie. — Malines.
De Tilly (général J.), de l'Académie royale de Belgique, commandant de l'École militaire. — Bruxelles.
Dewalque (François), professeur à l'Université, 26, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.
Dewalque (Gustave), professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de Belgique, 17, rue de la Paix. — Liége.
Dierckx, S. J (R. P. F.), 11, rue des Récollets. — Louvain.
D'Hondt (Frédéric), directeur du Laboratoire communal. — Courtrai.
Directeur du Petit Séminaire de Saint-Trond. — Saint-Trond.
de Dorlodot (chan. H.), docteur en théologie, professeur à l'Université catholique, 18, rue Léopold. — Louvain.
de Dorlodot (Sylvain), château de Floriffoux. — Floreffe (Namur).
Drion (Bon Adolphe), fils, avocat. — Gosselies.
Dugniolle (Max), professeur à l'Université, 45, Coupure. — Gand.
Duhem (Pierre), professeur de physique à la Faculté des sciences, 18, rue de la Teste. — Bordeaux (Gironde — France).
Dumas-Primbault (Henri), ingénieur, château de la Pierre. — Cérilly (Allier — France).
Dumont (Achille), docteur en médecine, 77, chaussée de Charleroi. — Bruxelles.
Dumont (André), professeur à l'Université, 18, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.
Durant (Henri), inspecteur général des charbonnages patronnés par la Société Générale, 3, Montagne du Parc. — Bruxelles.
Du Roussaux (S. G. Mgr), évêque de Tournai.
Dusausoy (Clément), professeur à l'Université, 107, chaussée de Courtrai. — Gand.
Dusmet y Alonzo (J.-M.), docteur en sciences naturelles, 7, plaza Santa-Cruz. — Madrid (Espagne).
Dutordoir (Hector), ingénieur en chef directeur du service technique provincial, 375, boulevard du Château. — Gand.
de l'Escaille (Joseph), ingénieur. — Hamont, par Neerpelt (Limbourg).

EYNAUD (L.), ingénieur de la marine, directeur des constructions navales, 2, place de l'Alma. — Cherbourg (Manche — France).

FABRE, naturaliste. — Sérignan par Vaucluse (Vaucluse — France).

FAGNART (Émile), docteur en sciences physiques et mathématiques, professeur à l'Athénée royal, 53, boulevard Lousbergs. — Gand.

FAIDHERBE (Dr Alexandre), 33, rue de l'Hospice. — Roubaix (Nord — France).

DE FAVEREAU DE JENNERET (Bon), rue Bonne-Fortune. — Liége.

FERNANDEZ SANCHEZ (José), catedrático de Historia universal en la Universidad. — Santiago (Galice — Espagne).

FERRON (Eug.), commissaire du Gouvernement grand-ducal près les chemins de fer, 8, avenue de la Porte-Neuve. — Luxembourg (Grand-Duché).

FITA Y COLOMÉ, S. J. (R. P. Fidel), calle de Isabel la Católica, 12. — Madrid (Espagne).

FOLIE (F.), membre de l'Académie royale. — Uccle.

FORNI (Cte Paul). — Bozen (Tyrol — Autriche).

DE FOVILLE (abbé), directeur au Séminaire de St-Sulpice. — Paris.

FRANCOTTE (Xavier), docteur en médecine, professeur à l'Université, 15, quai de l'Industrie. — Liége.

DE GARCIA DE LA VEGA (Bon Victor), docteur en droit, 37, rue du Luxembourg. — Bruxelles.

GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins. — Paris.

GAUTIER (chanoine), 21, rue Louise. — Malines.

GILSON, professeur à l'Université, 539, boulevard du Château. — Gand.

GLORIEUX (Dr), 36, rue Jourdan. — Bruxelles.

GOEDSEELS (Édouard), capitaine, professeur à l'École de guerre, 8, chaussée de Vleurgat. — Bruxelles.

GOOSSENS (S. É. le cardinal), archevêque de Malines.

GOOSSENS, S. J. (R. P. Fernand), 11, rue des Récollets. — Louvain.

GORIS (Charles), docteur en médecine, 181, rue Royale. — Bruxelles.

GRANDMONT (Alphonse), avocat. — Taormina (Sicile).

GRINDA (Jesús), ingénieur des ponts et chaussées, Fuencarral, 74 y 76. — Madrid (Espagne).

DE GROSSOUVRE (A.), ingénieur en chef des mines. — Bourges (Cher — France).

GUERMONPREZ (Dr), professeur aux Facultés catholiques, membre correspondant de l'Académie royale de médecine de Belgique et de la Société de chirurgie de Paris, 132, rue Nationale. — Lille (Nord — France).

GUYÉTAND, directeur de l'École libre de Mont-Roland. — Dôle (Jura — France).

HAGEN, S. J. (R. P.), Georgetown College Observatory. — Washington D. C. (États-Unis d'Amérique).

HAHN, S. J. (R. P. Guillaume), Collège N.-D. de la Paix, 45, rue de Bruxelles. — Namur.

HALLEUX, ingénieur, rue Joniaux, 5. — Etterbeek (Bruxelles).

DE HARLEZ (Mgr), professeur à l'Université, 8, rue au Vent. — Louvain.

HATON DE LA GOUPILLIÈRE (J.-N.), membre de l'Institut, inspecteur général des mines, directeur de l'École des mines, 60, boulevard Saint-Michel. — Paris.

HAUTEFEUILLE (V.), membre de l'Institut, 28, rue du Luxembourg. — Paris

HAVENITH, lieutenant à l'École de guerre. — Bruxelles.

DE LA HAYE (Auguste), major au 13e régiment de ligne, 9, boulevard de Meuse. — Jambes (Namur).

HELLEPUTTE (G.), membre de la Chambre des représentants, professeur à l'Université catholique. — Vlierbeek lez-Louvain.

DE HEMPTINNE (Alexandre), 56, rue de la Vallée. — Gand.

HENRY (Louis), professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de Belgique, 2, rue du Manège. — Louvain.

HENRY (Paul), docteur en sciences naturelles, professeur à l'Université, 2, rue du Manège. — Louvain.

HERMITE (Charles), membre de l'Institut, 2, rue de Sorbonne. — Paris.

HERVIER (abbé Joseph), 31, grande rue de la Bourse. — Saint-Étienne (Loire — France).

HEYMANS (J.-F.), docteur en sciences, professeur à l'Université, 35, boulevard de la Citadelle. — Gand.

HEYNEN (W.), membre de la Chambre des représentants. — Bertrix (Luxembourg); et 85, rue du Commerce, Bruxelles.

HOUTARD (Bon J.). — Monceau-sur-Sambre (Hainaut).
HOUZE (Dr Oct.). — Binche.
HUMBERT, ingénieur des mines, professeur à l'École polytechnique, 16, boulevard Malesherbes. — Paris.
HUYBERECHTS (D^r Th.), 77, avenue de la Toison d'Or. — Bruxelles.
ILLESCAS (Juan), calle de la Compañia, 16. — Puebla (Mexique, viâ New-York).
IÑIGUEZ E IÑIGUEZ (Francisco), catedrático de Astronomia en la Universidad, calle de Isabel la Católica, 4, bajo. — Madrid (Espagne).
INSTITUT SAINT-IGNACE, 47, courte rue Neuve. — Anvers.
JACOBS (Mgr), curé-doyen de Sainte-Gudule. — Bruxelles.
JACOBS (F.), président de la Société belge d'astronomie, 21, rue des Chevaliers. — Bruxelles.
JACOPSSEN, S. J. (R. P. Raymond), collège Saint-Joseph. — Turnhout.
JENNER (Ch.-J.), inspecteur général des ponts et chaussées, 18, rue du Mené. — Vannes (Morbihan — France).
DE JOANNIS, S. J. (R. P.), 15, rue Monsieur. — Paris.
JOLY (Albert), avocat à la cour d'appel, 8, rue de la Grosse-Tour. — Bruxelles.
JOLY (Léon), avocat, 18, rue de Suisse. — Bruxelles.
DE JONQUIÈRES, vice-amiral, membre de l'Institut, 2, avenue Bugeaud. — Paris.
JORDAN (Camille), membre de l'Institut, 48, rue de Varenne. — Paris.
JOURDAIN (Louis), ingénieur, 12, rue Montagne-aux-Herbes-Potagères. — Bruxelles.
JULIN (Armand), 14, rue Posschier. — Etterbeek (Bruxelles).
KIMUS (abbé), Collège du Saint-Esprit. — Louvain.
KIRSCH (R. P. Alexandre-M.), C. S. C. — Notre-Dame (Indiana — États-Unis).
KIRSCH (Mgr J.-P.), professeur à l'Université. — Fribourg (Suisse).
DE KIRWAN (Charles), ancien inspecteur des forêts, 4, Cité Vaneau. — Paris.
KURTH (Godefroid), professeur à l'Université, 6, rue Rouvroy. — Liége.
LAGASSE (Alexandre), 4, rue Saint-Maurice. — Nivelles.
LAGASSE-DE LOCHT (Charles), ingénieur en chef directeur des ponts et chaussées, membre du Conseil supérieur du Travail, 167, chaussée de Wavre. — Bruxelles.

Lahousse (Dr), professeur à l'Université, 27, Coupure. — Gand.
Lamarche (Émile), 81, rue Louvrex. — Liége.
Lambert (Camille), ingénieur en chef des chemins de fer de l'État, 65, avenue Brugmann. — Bruxelles.
Lambiotte (Omer), ingénieur de charbonnages. — Anderlues.
Lambiotte (Victor), ingénieur, directeur-gérant aux charbonnages d'Oignies-Aiseau, par Tamines (Namur).
Lambot (Oscar), professeur à l'Athénée royal. — Arlon.
Lambrechts (Hector), 30, rue Vautier. — Bruxelles.
Lamy (Mgr), membre de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université catholique, 149, rue des Moutons. — Louvain.
de Lapparent (A.), membre de l'Institut, membre correspondant de la Société géologique de Londres, professeur à l'Institut catholique, 3, rue de Tilsitt. — Paris.
Laruelle (Dr), 22, rue du Congrès. — Bruxelles.
Lebouteux (S.). — Verneuil par Migné (Vienne — France).
Lebrun (Dr), 20, rue du Canal. — Louvain.
Lechalas (G.), ingénieur en chef des ponts et chaussées. — Rouen (Seine-Inférieure — France).
Leclercq (Jules), correspondant de l'Académie royale de Belgique, 25, avenue de l'Astronomie. — Bruxelles.
Leconte (Félix), 10, rue du Lac. — Gand.
Ledresseur (Charles), docteur en médecine, professeur à l'Université, 79, voer des Capucins. — Louvain.
Lefebvre (Dr), membre de l'Académie royale de médecine, 36, rue de Bériot. — Louvain.
Lefebvre (Mgr Ferdinand), professeur à l'Université, 34, rue de Bériot. — Louvain.
Lefebvre (abbé Maurice), docteur en sciences naturelles, professeur au Collège Saint-Joseph. — Virton.
Le Hir (abbé Daniel), aumônier de la Maison des Oiseaux, 86, rue de Sèvres. — Paris.
Leirens-Éliaert, rue du Pont. — Alost.
Lejeune-Simonis, château de Sohan. — Pepinster (Liége).
Lemoine (Georges), ingénieur en chef des ponts et chaussées, examinateur de sortie pour la chimie à l'École polytechnique, 76, rue d'Assas. — Paris.
Lenoble, professeur aux Facultés catholiques, rue Négrier, 28bis. — Lille (Nord — France).

Le Paige (C.), membre de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université, plateau de Cointe. — Liége.

Leray (R. P. A.), 23, rue des Fossés-St-Jacques. — Paris.

de Liedekerke (Cte Charles), 30, rue de l'Industrie. — Bruxelles.

de Liedekerke de Pailhe (Cte Éd.), 47, avenue des Arts. — Bruxelles.

du Ligondès (Vicomte), lieutenant colonel d'artillerie. — Bourges (Cher — France).

de Limburg-Stirum (Cte Adolphe), 15, rue du Commerce. — Bruxelles.

de Limburg-Stirum (Cte Samuel), 25, rue d'Idalie. — Bruxelles.

Limpens (Émile), avocat. — Termonde.

de Locht (Léon), ingénieur, Mont-Saint-Martin. — Liége.

Lorin, 186, boulevard Saint-Honoré. — Paris.

Lucas, S. J. (R. P.), docteur en sciences physiques et mathématiques, collège N.-D. de la Paix, rue de Bruxelles. — Namur.

Maertens (chan.), professeur au Petit-Séminaire. — Saint-Nicolas.

Maes (l'abbé), curé de Saint-Job. — Uccle.

Malcorps (Ernest), avocat, 20, rue des Chariots. — Louvain.

Malisoux (Émile), ingénieur principal de 1re classe des mines, 11, rempart ad aquam. — Namur.

Mansion (Paul), professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de Belgique, 6, quai des Dominicains. — Gand.

Martens (Édouard), professeur à l'Université, 27, rue Marie-Thérèse. — Louvain.

Martinez y Saez (Francisco de Paula), professeur de zoologie au Musée d'histoire naturelle, calle de San Quintin, 6, pral, izq. — Madrid (Espagne).

Mary (abbé Jules), professeur de sciences à l'Institut Saint-Boniface. — Ixelles.

Masoin (E.), professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de médecine, 15, Marché-au-Poisson. — Louvain.

Matagne (Henri), docteur en médecine, 47 B, rue Gallait. — Bruxelles.

Matagne (Jules), docteur en médecine, 21, rue de la Fontaine. — Bruxelles.

de Maupeou (Cte), ingénieur de la marine, 3, rue du Commerce. — Lorient (Morbihan — France).

Meessen (Dr Wilhelm), 28, rue Froissard. — Bruxelles.

de Meeus (Cte Henri), ingénieur, rue du Vert-Bois. — Liége.

Mercier (Mgr D.), professeur à l'Université, 1, rue des Flamands. — Louvain.

de Mérode-Westerloo (Cte), rue aux Laines. — Bruxelles.

Mertens (Guill.), ingénieur, directeur de l'usine à gaz, 73, rue de Tourcoing. — Roubaix (Nord — France).

Meunier (abbé Alph.), professeur à l'Université, Collège Juste Lipse. — Louvain.

Meunier (Fernand), 163, rue du Midi. — Bruxelles.

Micha, professeur à l'Université, 110, rue Marie-Thérèse. — Louvain.

Miranda y Bistuer (Julian), canónigo magistral de la catedral, Canongia nueva, 18. — Segovia (Espagne).

Moeller (Dr), membre de l'Académie royale de médecine, 1, rue Montoyer. — Bruxelles.

Monchamp (abbé Georges), docteur en théologie et en philosophie, professeur au Petit-Séminaire. — Saint-Trond.

de Montessus de Ballores (Cte M. R.), professeur à l'école Saint-François Xavier. — Évreux (Eure — France), et Château de Villers, par Olivet (Loiret — France).

Monthaye, capitaine commandant d'état-major, professeur à l'École de guerre, 38, rue de la Tourelle. — Bruxelles.

de Moreau d'Andoy (Cher), 186, avenue Louise. — Bruxelles.

Moreux (abbé Th.), professeur au collège Saint-Célestin. — Bourges (Cher — France).

Moulart (abbé), directeur du Collège épiscopal. — Leuze.

Mullenders (Joseph), ingénieur, 7, rue Renkin. — Liége.

de Nadaillac (Mis), 18, rue Duphot. — Paris.

Nicotra (Mgr Sébastien), secrétaire du Nonce apostolique, 214, chaussée de Wavre. — Bruxelles.

Nollée de Noduwez, membre honoraire du Corps diplomatique de S. M. le Roi des Belges, 146, rue Royale. — Bruxelles.

Nyssens (Albert), ministre de l'industrie et du travail. — Bruxelles.

Nyssens (Pierre), directeur au laboratoire agricole de l'État, 21, rue Sainte-Marguerite. — Gand.

d'Ocagne (Maurice), professeur à l'École des ponts et chaussées, répétiteur à l'École polytechnique, 5, rue de Vienne. — Paris.

de Olavarria (Martial), ingénieur en chef des mines, secrétaire de la Commission de la carte géologique d'Espagne, Huertas, 82. — Madrid (Espagne).

ORBAN DE XIVRY, gouverneur de la province de Luxembourg. — Arlon.
PARDON (Gustave), ingénieur. — Quaregnon (Hainaut).
PASQUIER (Ern.), professeur à l'Université, 22, rue Marie-Thérèse. — Louvain.
PATRONI (Monsign. Giuseppe), dott. in filosofia, in teologia ed in ambe le leggi, 47, piazza del Gesù. — Rome.
PECHER (Eugène), 80, avenue Louise. — Bruxelles.
PEETERS (docteur), professeur à l'Institut Saint-Louis, rue du Marais. — Bruxelles.
PEETERS (Jules), docteur en droit, 51, rue Saint-Martin. — Tournai.
PEPIN, S. J. (R. P. Théophile), École libre Saint-Michel. — Saint-Étienne (Loire — France).
DE PILLON DE S. PHILBERT (A.), 2, rue St-Thomas. — Douai (Nord — France).
POISOT (Maurice), avocat, 4, rue Buffon. — Dijon (Côte-d'Or — France).
PROOST (Alphonse), inspecteur général de l'agriculture, 16, rue Anoul. — Bruxelles.
PROVINCIAL (R. P.) de la Compagnie de Jésus, 165, rue Royale. — Bruxelles.
PRUDHAM (abbé), directeur du collège Stanislas, 22, rue N.-D. des Champs. — Paris.
QUAIRIER, 28, boulevard du Régent. — Bruxelles.
RACHON (abbé Prosper), curé de Ham-sur-Heure, par Longuyon (Meurthe-et-Moselle — France).
RACLOT (abbé V.), aumônier des hospices et directeur de l'observatoire. — Langres (Haute-Marne — France).
RANWEZ (Fernand), professeur à l'Université, 56, rue de Tirlemont. — Louvain.
RAVAIN (abbé J.-R.), professeur à l'Université d'Angers. — La Pommeraye (Maine-et-Loire — France).
RECTOR (R. P.) del Colegio del Jesús. — Tortosa (Tarragona — Espagne).
RENARD (abbé Alphonse), conservateur honoraire au Musée d'histoire naturelle, professeur à l'Université de Gand. — Wetteren (Flandre orientale).
DE RIBAUCOURT (Cte), 27, rue de Loxum. — Bruxelles; ou château de Perck, par Vilvorde.
RICHALD (J.), ingénieur des ponts et chaussées, 28, rue de Comines. — Bruxelles.

RISUEÑO (Emiliano Rodriguez), catedrático de Historia natural en la Universidad, calle Duque de la Victoria, 16 pral. — Valladolid (Espagne).

DE LA ROCHE DE MARCHIENNES (Émile). — Harvengt par Harmignies (Hainaut).

ROELANDTS, S. J. (R. P.), 11, rue des Récollets. — Louvain.

DE ROMRÉE (Cte), château de Vichenet. — Le Mazy.

ROUSSEL (Lucien), professeur à l'École forestière, 11, rue de la Ravinelle. — Nancy (Meurthe-et-Moselle — France).

DE SALVERT (Vte), professeur aux Facultés catholiques de Lille, 7, rue de la Bibliothèque. — Versailles (Seine-et-Oise — France); ou château de Villebeton, par Châteaudun (Eure-et-Loire — France).

DE SANTA CRUZ (Ivan Armada Hernandez de Cordova, Mis), 9, rua Nueva. — Santiago (Galice — Espagne).

SANZ (Pelegrin), ingeniero de caminos, Oficina de Obras públicas. — Tarragona (Espagne).

DE SAUVAGE (Cte), 22, avenue de Friedland. — Paris.

SCARSEZ DE LOCQUENEUILLE (Anatole), château de St-François. — Farciennes (Hainaut); ou 84, rue de Stassart. — Ixelles.

SCHAFFERS, S. J. (R. P.), docteur en sciences physiques et mathématiques, 11, rue des Récollets. — Louvain.

SCHMITZ, S. J. (R. P.), directeur du Musée géologique des bassins houillers belges, 11, rue des Récollets. — Louvain.

SCHOBBENS, docteur en médecine, 49, longue rue Neuve. — Anvers.

SCHOEMAKER (W.-J.), professeur à l'École moyenne. — Nimègue (Pays-Bas).

SCHOLLAERT, ministre de l'intérieur et de l'instruction publique. — Bruxelles.

DE SELLIERS DE MORANVILLE (Cher), commandant d'état-major, 46, chaussée de Charleroi. — Bruxelles.

SIBENALER, professeur à l'Université catholique, 74, chaussée de Namur. — Héverlé-Louvain.

SIMART, lieutenant de vaisseau, répétiteur à l'École polytechnique, 70, rue Miromesnil. — Paris.

SIMON (Dr J.-B.), 108, rue Haute. — Bruxelles.

SIMONIS (Alfred), sénateur. — Verviers.

IMONIS (Louis), industriel. — Verviers.

SIRET (Henri), ingénieur, 59, rue du Transvaal. — Anvers.

SIRET (Louis), ingénieur. — Cuevas (prov. Almeria — Espagne).

SMEKENS (Théophile), président du tribunal de 1re instance, 31, avenue Quentin Metsys. — Anvers.

DEL SOCORRO (José Maria Solano, Mis), professeur de géologie au Musée d'histoire naturelle, calle de Jacometrezo, 41, bajo. — Madrid (Espagne).

SOISSON (G.), ingénieur, docteur en sciences, professeur à l'Athénée grand-ducal, rue Joseph II. — Luxembourg (Grand-Duché).

SOLVYNS (Albert), membre de la Députation permanente. — Tronchiennes lez-Gand; ou, 1, rue de la Lieve. — Gand.

SOREIL, ingénieur. — Maredret sous Sosoye, par Anthée (Namur).

SOUBEN (Jules), St-Michaels Priory. — Famborough (Hants — England).

DE SPARRE (Cte), professeur aux Facultés catholiques de Lyon, château de Vallière. — Saint Georges-de-Reneins (Rhône — France).

SPINA, S. J. (R. P. Pedro), Colegio católico del Sagrado Corazón de Jesús, sacristia de Capucinas, núm. 5. — Puebla (Mexique).

SPRINGAEL (Auguste), ingénieur, 2, rue Ste-Walburge. — Bruges.

STAINIER (Xavier), professeur à l'Institut agricole de Gembloux, membre de la Commission géologique de Belgique, rue Pierquin. — Gembloux.

VAN DEN STEEN DE JEHAY (Cte Frédéric), attaché au Cabinet du Roi, 13, rue de la Loi. — Bruxelles.

STILLEMANS (S. G. Mgr), évêque de Gand.

STINGLHAMBER (Émile), docteur en droit, 31, rue des Minimes. — Bruxelles.

STORMS (abbé Camille), curé de Ganshoren, par Jette (Brabant).

STORMS (John), 37, rue des Champs-Élysées. — Bruxelles.

STORMS (Raymond), 13, rue du Président. — Bruxelles.

VAN DER STRATEN-PONTHOZ (Cte François), 23, rue de la Loi. — Bruxelles.

STRUELENS (Alfred), docteur en médecine, 18, rue Hôtel des Monnaies. — Saint-Gilles (Bruxelles).

SUCHETET (André), 10, rue Alain Blanchard. — Rouen; ou Antiville-Beauté par Goderville (Seine-Inférieure — France).

SURBLED (Dr). — Corbeil (Seine-et-Oise — France).

SWISSER (Dr H.), rue Rogier. — Bruxelles.

SWOLFS (Dr), 18, boulevard Léopold. — Namur.

SWOLFS (chan.), inspecteur diocésain, 46, avenue Van Beneden. — Malines.

TAYMANS (Émile), notaire. — Tubize (Brabant).

THÉRON, docteur en sciences physiques et mathématiques, professeur à l'Athénée. — Mons.

THIBAUDIER, ingénieur de la marine. — Rochefort-sur-Mer (Charente-Inférieure — France).

THIÉRY (Armand), Institut des Hautes-Études, 1, rue des Flamands. — Louvain.

THIRION, S. J. (R. P.), 11, rue des Récollets. — Louvain.

THIRY (Fr.), secrétaire de l'Association conservatrice cantonale de Templeuve, bourgmestre. — Pecq (Hainaut).

TILMAN (Firmin), ingénieur. — Anderlues.

TIMMERMANS (François), ingénieur, directeur-gérant de la Société anonyme des ateliers de construction de la Meuse, 22, rue de Fragnée. — Liége.

TORROJA Y CABALLÉ (Eduardo), architecte, professeur à la Faculté des sciences de l'Université, calle de Lope de Vega, nos 13 y 15, cto 3e dra. — Madrid (Espagne).

DE TRAZEGNIES (Mis). — Corroy-le-Château, par Gembloux; ou 23, rue de la Loi. — Bruxelles.

DE T'SERCLAES (Mgr Charles), président du Collège belge. — Rome.

DE T'SERCLAES (Cte Jacques), capitaine d'état-major, professeur à l'École de guerre, 26, rue de l'Abbaye. — Bruxelles.

T'SERSTEVENS (Gaston), château de Baudemont, par Virginal.

T'SERSTEVENS (Léon), 43, boulevard Bischoffsheim. — Bruxelles; ou Baudemont par Virginal.

D'URSEL (Cte Aymard), capitaine d'artillerie, château de Bois-de-Samme, par Wauthier-Braine (Brabant).

DE LA VALLÉE POUSSIN, de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université, 190, rue de Namur. — Louvain.

DE LA VALLÉE POUSSIN (Ch.-J.), professeur à l'Université, 190, rue de Namur. — Louvain.

DE LA VALLÉE POUSSIN (Joseph), avocat, 190, rue de Namur. — Louvain.

VAN AERTSELAER (chan.), directeur de l'Institut St-Louis, 121, rue du Marais. — Bruxelles.

Van Aubel, professeur de physique à l'Université de Gand, 12, rue de Comines. — Bruxelles (quartier Léopold).

Van Aubel (Ch.), assistant à l'Université, 3, rue Sainte-Véronique. — Liége.

Van Bastelaer, 24, rue de l'Abondance. — Bruxelles.

Van Biervliet (J.), professeur à l'Université, 18, rue Guimard. — Gand.

Van den Gheyn (chan. Gabriel), supérieur à l'Institut Saint-Liévin. — Gand.

Van den Gheyn, S. J. (R. P. Joseph), bollandiste, conservateur à la bibliothèque royale, 14, rue des Ursulines. — Bruxelles.

Vandenpeereboom (E.), ingénieur, 15, rue d'Artois. — Liége.

Vandenpeereboom (Jules), ministre des chemins de fer, postes et télégraphes. — Bruxelles.

Vanderlinden, ingénieur en chef des ponts et chaussées, professeur à l'Université, 27, Cour du Prince. — Gand.

Van der Mensbrugghe, membre de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université, 131, Coupure. — Gand.

Vanderryst, inspecteur adjoint de l'agriculture. — Tongres.

Van der Smissen (Édouard), avocat, professeur à l'Université de Liége, 16, rue du Gouvernement Provisoire. — Bruxelles.

Vanderstraeten (Dr A.), 68, rue du Trône. — Bruxelles.

Van de Woestyne (chan.), professeur au Grand Séminaire. — Bruges.

Van Dromme, docteur en médecine, rue des Chartreuses. — Bruges.

Van Geersdaele (Dr Eugène). — Dampremy (Charleroi).

Van Geersdaele, S J. (R. P. Joseph), collège du Sacré Cœur, 53, rue de Montigny. — Charleroi.

Van Gehuchten, professeur à l'Université, 36, rue Léopold. — Louvain.

Van Hoeck (Dr Ém.), 11, rue Traversière. — Bruxelles.

Van Keerberghen, docteur en médecine, 15, rue du Trône. — Bruxelles.

Van Ortroy (Fernand), capitaine au 4e lanciers, 37, quai des Moines. — Gand.

Van Overloop (Eugène), 152, rue Royale. — Bruxelles.

Van Zuylen-Orban (Gust.), industriel, 8, quai de l'Industrie. — Liége.

Vaultrin, inspecteur des forêts, 2, rue de Lorraine. — Nancy (Meurthe-et-Moselle — France).

VENNEMAN, docteur en médecine, professeur à l'Université, 35, rue du Canal. — Louvain.

VERHELST (abbé F.), professeur au Collège Saint-Jean-Berchmans, 36, place de Meir. — Anvers.

VERRIEST (G.), docteur en médecine, professeur à l'Université, 40, rue du Canal. — Louvain.

VERSCHAFFEL (R. P), chargé des travaux astronomiques à l'Observatoire d'Abbadie. — Abbadia, par Hendaye (Basses-Pyrénées — France).

VICAIRE (Eugène), inspecteur général des mines, 30, rue Gay-Lussac. — Paris.

VICENT, S. J. (R. P. Antonio), Colegio de San José. — Valencia (Espagne).

VILAIN XIIII (Vte), sénateur, château de Basel; ou 11, rue du Trône. — Bruxelles.

VISART DE BOCARMÉ (Cte Amédée), membre de la Chambre des représentants, bourgmestre. — Bruges.

VISART DE BOCARMÉ, avocat, 10, rue Grandgagnage. — Namur.

VOLLEN (E.), docteur en droit, rue de Paris. — Louvain.

DE VORGES (Albert), 4, avenue Thiers. — Compiègne (Oise — France).

DE VORGES (Cte E. Domet), 46, rue du Général Foy. — Paris.

VUYLSTEKE, professeur à l'Université, 59, rue du Congrès. — Bruxelles.

WAFFELAERT (S. G. Mgr), évêque de Bruges.

WALRAVENS (chan. Adelson), directeur du Collège Saint-Julien. — Ath.

WARLOMONT (René), docteur en médecine et en sciences naturelles, médecin de bataillon au 3e lanciers, 19, rue des Frères-Mineurs. — Bruges.

WAUTELET (A), ingénieur à l'usine à gaz. — Roubaix (Nord — France).

DE WAVRIN (Mis), château de Ronsele, par Somergem (Flandre orientale).

DE WECK (abbé A.), missionnaire apostolique. — Fille-Dieu sous Romont (canton de Fribourg — Suisse).

WÉRY (D^r^). — Sclayn par Namèche (Namur).

WÉRY (Vincent), président du tribunal de 1re instance, 4, rue des Telliers. — Mons.

WILMOTTE (abbé), professeur au Séminaire. — Floreffe (Namur).

WITZ (Aimé), professeur aux Facultés catholiques, 29, rue d'Antin. — Lille (Nord — France).

WOLF, membre de l'Institut, 95, rue des Feuillantines. — Paris.

DE WOUTERS (chan.). — Braine-le-Comte.

WOUTERS (abbé Louis), professeur de sciences naturelles au Collège Saint-Rombaut. — Malines.

ZAHM (R. P. J.-A.), C. S. C., 19, via dei Cappucini. — Rome.

ZECH (Guillaume), négociant. — Braine-le-Comte.

Liste des membres décédés.

D'ABBADIE (Antoine) . . . . Paris.
DAUBRÉE . . . . Paris.
DEWÈVRE . . . . Bruxelles.
GEORGE (R P. Ch.). . . . . Louvain.
PIRARD (Mgr) . . . . Namur.
VAN TRICHT (R. P. Victor) . . . . Louvain

Listes des membres inscrits dans les sections.

1re Section.

Mathématiques, Astronomie, Géodésie. — Mécanique. — Génie civil et militaire.

MM. Adan de Yarza.
Chan. di Bartolo.
Baule.
Belpaire.
Berlingin.
Boussinesq.
du Boys.
R. P. Braun, S. J.
Breithof.
de Bussy.
Caratheodory.
Carnoy.
Abbé Clasen.
Abbé Coppieters de Stockhove.
Cousin.
Daubresse.
De Bien.
De Bloo.
De Tilly.
Durant.
Dusausoy.
Dutordoir.
de l'Escaille.
Eynaud.

MM. Fagnart.
Folie.
Gauthier-Villars.
Goedseels.
Grinda.
de Grossouvre.
Guyétand.
Hagen.
Haton de la Goupillière.
Havenith.
de la Haye.
Hermite.
Humbert.
Iñiguez.
Fern Jacobs.
Jenner.
Amiral de Jonquières
Camille Jordan.
Charles Lagasse
Lamarche.
Lambert.
Lechalas.
Le Paige.
Cte Charles de Liedekerke

MM. Vte du Ligondès.
Mansion.
Cte de Maupeou.
de Meeus.
Micha.
Cte de Montessus.
Abbé Moreux.
P. Nysseus.
d'Ocagne.
de Olavarria.
Pardon.
Pasquier.
R. P. Pepin, S. J.
Richald.
Vte de Salvert.
Pelegrin Sanz.
Sibenaler.

MM. Simart.
Soisson.
Soreil.
Cte de Sparre.
R. P. Spina, S. J
Théron.
Thibaudier.
Timmermans.
Torroja.
Cte Jacques de T'Serclaes.
Cte Aymard d'Ursel
Ch.-J. de la Vallée Poussin
E. Vandenpeereboom.
Vanderlinden.
R. P. Verschaffel.
Vicaire.
Wolf.

2e Section.

Physique. — Chimie. — Métallurgie. — Météorologie et Physique du globe.

MM. Allart.
Amagat.
André.
R. P. Bareel, S. J.
Bayet.
Blondel.
Bonamis.
Branly.
Bruylants.
Casarès.
Chautard.
Abbé Coupé.
De Brouwer.
R. P. De Greeff, S J.
Delacre.
Abbé Demanet
De Preter.
François Dewalque.
R. P Dierckx. S. J

MM. Duhem.
Dumas-Primbault.
André Dumont.
Ferron.
R. P. Goossens, S. J
Louis Henry.
Paul Henry.
R P Jacopssen, S. J
R. P de Joannis, S J.
Omer Lambiotte.
Victor Lambiotte.
Lambot
Leconte.
Lemoine.
Lenoble.
R. P. Leray.
de Locht.
R. P. Lucas, S. J
Malisoux.

MM. Mullenders.
Abbé Raclot.
Fern. Ranwez.
Abbé Ravain.
R. P. Schaffers, S. J.
Springael.
Arm. Thiery.
R. P. Thirion, S. J.
Thiry.

MM. Tilman.
Van Aubel.
Van Biervliet
R. P. Van Geersdaele, S J
Van der Mensbrugghe.
Abbé Verhelst.
Abbé Wilmotte.
Witz.
R. P. Zahm.

3e Section.

Géologie, Minéralogie. — Botanique. — Zoologie. — Paléontologie. — Anthropologie. Ethnographie, Science du langage. — Géographie.

Mgr Abbeloos.
MM. d'Acy.
Fr. Alexis.
Arcelin.
Arduin.
Ballion.
Abbé Bardin.
Beauvois.
Bedel.
Blot.
Mis de la Boëssière-Thiennes.
R. P. Bolsius, S. J.
Abbé Boulay.
Bouquillon.
Abbé Bourgeat.
Anatole Buisseret.
Joseph Buisseret.
R. P. Camboué, S. J.
Daniels
Abbé De Baets
Chanoine De Brouwer.
R. P. Delattre, S J.
Chanoine Delvigne.
Gustave Dewalque.
Chanoine de Dorlodot.
Bon Drion.
Dugniolle.
Dusmet y Alonzo.

MM. Fabre.
R. P. Fita, S. J.
Abbé de Foville.
Grinda.
Mgr de Harlez.
Cte de Hemptinne
Abbé Hervier.
Heynen.
R. P. Kirsch.
de Kirwan.
Kurth.
Mgr Lamy.
A. de Lapparent.
Leclercq.
Mgr Ferdinand Lefebvre.
Abbé Maurice Lefebvre.
Abbé Le Hir.
Cte Adolphe de Limburg-Stirum.
Édouard Martens.
Martinez y Saez.
Abbé Mary.
Henri Matagne.
Mgr Mercier.
Abbé Meunier.
Fernand Meunier.
Abbé Monchamp.
Mis de Nadaillac.
Nollée de Noduwez.

MM. de Pillon de St-Philbert.
Abbé Rachon.
Abbé Renard.
Risueño.
Ém. de la Roche.
R. P. Roelandts, S. J.
Roussel.
Scarsez de Locqueneuille.
R. P. Schmitz, S. J.
H. Siret.
L. Siret.
Mis del Socorro.
Albert Solvyns.
Souben.
Stainier.
Abbé Storms.
John Storms.
MM. Raymond Storms.
Suchetet.
Chanoine Swolfs.
de la Vallée Poussin.
Jos. de la Vallée Poussin.
Louis de la Vallée Poussin.
Chan. G. Van den Gheyn.
R. P. Van den Gheyn, S. J.
Vanderryst.
Van Ortroy.
Van Overloop.
Vaultrin.
R. P. Vicent, S. J.
de Vorges.
Mis de Wavrin.
Abbé Wouters.

4e Section.

Anatomie, Physiologie. — Hygiène. — Pathologie, Thérapeutique, etc.

MM. Baivy.
Borginon.
Cuylits.
Debaisieux.
De Buck.
Degive.
Dr De Lantsheere.
Delaunois.
Delcroix.
Delétrez.
De Marbaix.
De Moor.
Denys.
R. P. Deschamps, S. J.
Desplats.
Achille Dumont.
Faidherbe.
Francotte.
Gilson.
Glorieux.
Goris.
Guermonprez.
R. P. Hahn, S. J.
MM. Heymans.
Houze.
Huyberechts.
Alexandre Lagasse.
Lahousse.
Laruelle.
Lebrun.
Ledresseur.
Dr Lefebvre.
Masoin.
Jules Matagne.
Meessen.
Mœller.
Proost.
Schobbens
Simon.
Struelens.
Surbled.
Swisser.
Dr Swolfs.
Van Aubel Ch.

MM. Vanderstraeten.
Van Dromme.
Van Geersdaele.
Van Gebuchten.
Van Hoeck.
MM. Van Keerberghen
Vennemau
Verriest.
Warlomont.
Aug. Wéry.

5e Section.

Agronomie. — Économie sociale, Statistique. — Sciences commerciales.
Économie industrielle.

MM. de Bergeyck.
Berleur.
Bertrand.
Béthune.
Blondiaux.
Cappellen.
Cartuyvels.
Pce Juste de Croy.
Davignon.
De Baets.
Camille De Jaer.
Léon De Lantsheere.
D'Hondt.
Grandmont.
Bon Houtart.
Albert Joly.
Léon Joly.
Julin.
Lambrechts.
Lebouteux.
Cte Édouard de Liedekerke.
Limpens.
de Mérode.
MM. Monthaye.
de Moreau d'Andoy.
Mgr Nicotra.
Orban de Xivry.
Pecher.
Peeters.
Poisot.
de Romrée.
de Selliers de Moranville.
Smekens.
Stinglhamber.
Cte Fr. van der Straten-Ponthoz.
t'Serstevens Gaston.
t'Serstevens Léon.
van den Steen de Jehay.
Taymans.
Van der Smissen.
Van Zuylen-Orban.
Vte Vilain XIIII.
Cte Amédée Visart.
Visart.
Vollen.
Vincent Wéry.

MEMBRES DU CONSEIL.

1895 - 1896.

Président, M. Eug. VICAIRE.

1er *Vice-Président*, Alph. PROOST.

2e *Vice-Président*, M. André DUMONT.

Secrétaire, M. Paul MANSION.

Trésorier, M. Jules DE BRUYN.

MM. le Mis DE LA BOËSSIÈRE-THIENNES.
Chanoine DELVIGNE.
Général DE TILLY.
Fr. DEWALQUE.
G. DEWALQUE.
Cap. GOEDSEELS.
Louis HENRY.
Godefroid KURTH.
Ch. LAGASSE-DE LOCHT.
Dr LEFEBVRE.
Dr MOELLER.
Cte Fr. VAN DER STRATEN-PONTHOZ.
Chanoine SWOLFS.
Léon T'SERSTEVENS.
Ch. DE LA VALLÉE POUSSIN.

MEMBRES DU CONSEIL.

1896 - 1897.

Président, M. A. Witz.

1er Vice-président, M. Fr. Dewalque.

2e Vice-Président, M. le Dr Moeller.

Secrétaire, M. P. Mansion.

Trésorier, M. J. De Bruyn

MM. le Dr Debaisieux.
Chan. Delvigne.
Gal De Tilly
Léon De Lantsheere.
Gust. Dewalque.
André Dumont.
Cap. Goedseels.
L. Henry.
Ch. Le Paige.
Ch. Lagasse-de Locht.
Dr Lefebvre.
Alph. Proost.
Cte van der Straten-Ponthoz.
Chan. Swolfs.
L. t' Serstevens.

BUREAUX DES SECTIONS.

1895 - 1896.

—

1re Section.

Président, M. le Gal De Tilly.
Vice-Présidents, MM. Cl. Dusausoy et Ch.-J. de la Vallée Poussin.
Secrétaire, M. Dutordoir.

2e Section.

Président, R. P. Lucas.
Vice-Présidents, M. Eug. Ferron et le R. P. Thirion.
Secrétaire, M. l'abbé Coupé.

3e Section.

Président, R. P. Van den Gheyn.
Vice-Présidents, M. le Mis de Trazegnies et le R. P. Bolsius.
Secrétaire, M. F. Van Ortroy.

4e Section.

Président, M. J. Cuylits.
Vice-Présidents, MM. E. Masoin et G. Borginon.
Secrétaire, M. Ach. Dumont.

5e Section.

Président, M. le Cte Fr. van der Straten-Ponthoz.
Vice-Présidents, MM. A. De Marbaix et Éd. Van der Smissen.
Secrétaire, M. Arm. Julin.

BUREAUX DES SECTIONS.

1896 - 1897.

1re Section.

Président, M. Ch.-J de la Vallée Poussin.
Vice-Présidents, MM. le Cte de Sparre et E. Goedseels.
Secrétaire, M. Dutordoir.

2e Section.

Président, M. Édouard Branly.
Vice-Présidents, MM. Van der Mensbrugghe et De Preter.
Secrétaire, M. l'abbé Coupé.

3e Section.

Président, M. le chanoine de Dorlodot.
Vice-Présidents, le R. P. Bolsius et M. A. de Lapparent.
Secrétaire, M. le Capitaine Van Ortroy.

4e Section.

Président, M. Borginon.
Vice-Présidents, MM. Debaisieux et Heymans.
Secrétaire, M. Ach. Dumont.

5e Section.

Président, M. le Cte van der Straten-Ponthoz.
Vice-Présidents, MM. A. De Marbaix et Éd. Van der Smissen.
Secrétaire, M. Alb. Joly.

QUESTIONS AU CONCOURS.

1° *Des foyers à gaz au point de vue hygiénique.*

2° *Trouver les caractères distinctifs des maxima ou minima d'une fonction de trois variables* f(x, y, z) *dans le cas où l'ensemble des termes du second ordre dans le développement de* $f(a+h, b+k, c+l) - f(a, b, c)$ *peut s'annuler sans changer de signe.*

3° *Donner, au point de vue paléontologique et géologique, la description monographique d'une veine de houille à travers tout un bassin houiller, pour vérifier l'exactitude de la synonymie actuellement reçue.*

SESSION DU JEUDI 24 OCTOBRE 1895

A TOURNAI

SÉANCE DES SECTIONS

Première section.

M. Mansion donne lecture d'une *Note sur la nature de l'espace*, envoyée à la section par le R. P. Leray :

« Je demande à la section de pouvoir intervenir dans une discussion où mon nom a été prononcé plusieurs fois, simplement pour rectifier une assertion qui me concerne.

Déjà, dans un savant travail présenté à la Société en avril 1894, M. Vicaire, après cette proposition : *L'espace réel est une substance,* continuait en ces termes :

« .... Le P. Leray ajoute : Une substance exclusivement passive,
» par opposition aux autres créatures qui sont à la fois actives
» et passives. Je suis obligé, en cela, de me séparer de lui. Le
» rôle souverain que nous avons reconnu à l'espace ne semble
» guère compatible avec ce caractère de passivité pure, et
» implique au contraire une puissante activité. C'est même
» par cette activité que nous avons démontré la réalité de
» l'espace (*). »

Dans la session d'avril 1895, notre honorable président va plus loin et s'exprime ainsi :

« Il est vrai que le P. Leray, séduit par une certaine symétrie
» dans la classification générale des êtres, a eu le tort de quali-
» fier ainsi l'espace réel (substance passive). Mais en fait, et bien

---

(*) *Annales de la Société scientifique de Bruxelles,* 18e année (1893-1894), deuxième partie, p. 306.

» qu'il ne s'en occupe qu'à un point de vue tout spécial, il lui » attribue un rôle qui n'est nullement passif, puisqu'il admet » que les atomes matériels rebondissent sur la surface limite de » l'espace. Voilà, certes, un phénomène qui, s'il nous était » donné d'approcher de cette limite, ne serait nullement impro- » pre à en révéler la présence et la forme.

» Quant à moi, je me suis nettement séparé du P. Leray » touchant cette qualification, et je me suis au contraire attaché » à mettre en relief la puissante activité de l'espace (*). »

A propos de ce passage, je me permettrai d'observer à l'éminent auteur qu'il n'a pas bien compris mon système, s'il croit que j'ai été séduit par une certaine symétrie de classification en faisant de l'espace un être passif. Qu'il relise l'article IV du chapitre Ier de mon *Essai sur la synthèse des forces physiques*, et il le trouvera consacré à une discussion, dont la conclusion dernière est celle-ci : *L'activité ne peut appartenir qu'à une substance simple.* Or, l'espace réel est une substance continue et par suite composée. Donc, pour moi, cette substance ne peut être active, et je le maintiens parce que la logique de mon système l'exige. D'autre part, je ne crois nullement être en contradiction avec moi-même, en admettant qu'un atome matériel parvenu aux limites de l'espace se réfléchit, comme il ferait à la rencontre d'un obstacle infranchissable. L'activité de l'espace n'est pour rien dans cette réflexion ; c'est l'activité interne de l'atome lui-même qui produit seule le phénomène.

Pour bien expliquer ma pensée, je suis obligé de rappeler ma définition de l'élément matériel, en exprimant le regret de ne pas connaître celle que MM. Vicaire et Mansion adoptent dans leur discussion.

Voici ce que j'ai écrit, dans l'essai déjà mentionné, au début de l'article V du chapitre Ier : « L'élément matériel est une » substance simple ou monade localisée, c'est-à-dire présente » dans un petit volume d'espace réel, tout entière en chaque

(*) *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 19e année (1894-1895), première partie, p. 114.

» partie de ce volume, comme Dieu est présent dans tout l'uni-
» vers. » Et plus loin : « Pour nous, l'atome est composé d'un
» espace réel et d'une monade, comme l'homme est composé
» d'un corps et d'une âme ; et la monade est présente à tout
» le volume d'espace, comme l'âme, suivant beaucoup de
» philosophes, est présente à tout le corps. Cette présence
» dans les deux cas est une présence d'action. Comme l'âme
» communique la vie au corps, la monade communique l'impé-
» nétrabilité à l'espace qu'elle occupe. Toutefois, tandis que
» l'âme est toujours unie au même corps, la monade, dès qu'elle
» se meut, cesse d'être unie au même espace et rend impéné-
» trables successivement différents lieux. »

Je mentionne ensuite les propriétés générales de l'élément matériel, au nombre de cinq : l'étendue, l'impénétrabilité, la mobilité, l'inertie et l'élasticité.

Venons maintenant à l'explication des phénomènes de réflexion qu'éprouvent, selon moi, les atomes simples aux confins de l'espace, et commençons par rappeler les lois naturelles que nous regardons comme les principes fondamentaux de la mécanique des atomes.

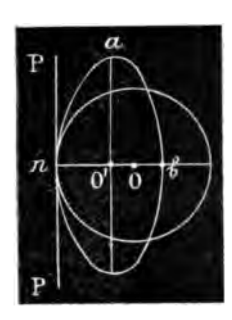
L'article v du chapitre II de notre essai se termine ainsi :
« Nous pouvons donc ramener les lois fondamentales de la
» nature aux deux suivantes :

» 1° Loi de conservation des atomes qui comprend non seule-
» ment la conservation de leur masse ou étendue, mais de
» toutes leurs propriétés, mobilité, inertie, élasticité ;

» 2° Loi de conservation de l'énergie qui suppose un premier
» mouvement communiqué par une cause distincte de la
» matière, et maintenu intégralement comme énergie, en vertu
» des propriétés mêmes des atomes. »

Nous y joindrons la loi de continuité des phénomènes naturels, mentionnée dans l'article v du chapitre I[er] (*Ibid.*), à propos de l'élasticité des atomes, et qui peut se formuler ainsi : « Une
» quantité continue ne passe d'une valeur ou d'une forme à une
» autre qu'en prenant successivement toutes les valeurs ou
» formes intermédiaires. »

Considérons maintenant un atome simple, sphérique, de rayon r, qui arrive aux limites de l'espace réel, et supposons d'abord que la vitesse v de son centre O soit dirigée suivant la normale On au plan tangent PP.



En vertu de la première loi, l'atome doit conserver sa masse m ou son volume réel d'espace impénétrable; en vertu de la seconde, il doit conserver son énergie $\frac{1}{2}mv^2$. La monade ou principe actif de l'élément matériel obtient ces deux résultats en transformant à la fois son volume et son énergie.

Le volume impénétrable, d'abord sphérique, devient un ellipsoïde de révolution O' de plus en plus aplati, ayant pour axe des pôles $2O'b = 2b$ et pour rayon de l'équateur $O'a = a$, longueurs qui varient d'une manière continue, en satisfaisant toujours à la relation $ba^2 = r^3$.

Le centre O, qui possédait une vitesse uniforme v, prend une vitesse variable u qui décroît de v à zéro, et l'énergie cinétique $\frac{1}{2}mv^2$ se transforme peu à peu en énergie élastique ε, de manière que l'on ait constamment

$$\tfrac{1}{2}mu^2 + \varepsilon = \tfrac{1}{2}mv^2.$$

Lorsque la transformation est complète, $u = 0$ et $\varepsilon = \frac{1}{2}mv^2$. A cet instant, l'énergie de ressort ε se transforme à son tour en énergie cinétique, le centre O' rebrousse chemin, et sa vitesse en arrière croît de zéro à v, en même temps que l'ellipsoïde de révolution parcourt en sens inverse la série des formes qu'il avait précédemment revêtues et revient à la forme sphérique. A ce moment, l'atome quitte la surface limite et s'éloigne avec la vitesse v dans la direction de la normale.

Les trois lois de la conservation de la masse, de la conservation de l'énergie et de la continuité des variations de forme et de vitesse ont été observées; et l'espace réel n'y est pour rien. Ce n'est pas la présence de l'espace, mais plutôt le défaut

d'espace ultérieur qui a été la cause occasionnelle des phénomènes, et leur cause efficiente est l'activité de la monade. Seule, elle est la véritable cause seconde, docile aux lois que la cause première lui a imposées.

La conclusion serait identique dans le cas où l'élément matériel atteindrait obliquement la surface limite de l'espace réel, et nous jugeons inutile de donner plus de développement à ce sujet.

Suis-je donc en opposition d'idées avec M. Vicaire, qui attribue à l'espace une fonction souveraine, une puissante activité? Peut-être; mais pas autant qu'il semblerait au premier abord.

Dans le monde inorganique, je ne reconnais d'autre activité que celle des forces physiques; et par suite, en refusant l'activité à l'espace, je lui refuse uniquement les propriétés d'une force. Or, M. Vicaire concède que l'action de l'espace n'est pas comparable à celle d'une force. « S'il n'y a d'action, dit-il, que » lorsqu'il y a accélération, s'il n'y a pas d'autre action que la » force, en ce cas, l'action de l'espace sur les corps est, j'en » conviens, rigoureusement nulle (*). » Donc, sur ce point, nous sommes parfaitement d'accord.

D'un autre côté, je ne refuse pas à l'espace réel le rôle souverain que réclame pour lui M. Vicaire, lorsqu'il parle de sa connexion nécessaire avec le mouvement absolu des corps, avec la détermination de leurs vitesses en grandeur et en direction. Seulement, ces relations de l'espace avec la matière sont pour moi des rapports de *position* et non des rapports d'*action*.

Toutefois, il reste un point sur lequel je ne puis accorder nos idées, c'est la notion d'inertie. Suivant M. Vicaire, c'est une action de l'espace réel sur la matière qui constitue l'inertie de celle-ci (**). J'avoue que cette assertion m'étonne, mais je n'entreprendrai pas de la discuter, parce que je soupçonne son auteur

---

(*) *Note sur la réalité de l'espace* (ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, 19e année (1894-1895), session d'avril 1895, p. 115).

(**) *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 18e année (1893-1894), 2e partie, p. 289.

de n'avoir pas la même idée que moi de l'essence de la matière, et pour qu'une discussion puisse aboutir, il faut commencer par s'entendre sur la signification des termes.

La seule conclusion de cette note que je tienne à énoncer, c'est que je ne vois rien dans le travail de M. Vicaire qui m'oblige à modifier mon opinion sur la passivité de l'espace. »

M. Vicaire présente les observations suivantes à propos de cette note du R. P. Leray :

« Le R. P. Leray se plaint que j'aie inexactement résumé les motifs qui l'ont conduit à considérer l'espace réel comme entièrement dépourvu d'activité. Le principal, dit-il, est que l'activité ne peut appartenir qu'à une substance simple et que l'espace, étant continu, n'est pas simple.

Je ne puis que donner acte à notre savant confrère de cette rectification, tout en constatant que, dans son *Essai sur la synthèse des forces physiques*, ce principe est invoqué dans l'article IV pour justifier ses vues sur la constitution de l'atome matériel et non à propos des propriétés de l'espace, tandis que l'aperçu sur la classification générale des êtres, auquel j'ai fait allusion, est développé dans l'article II, intitulé : « De l'étendue et de l'espace. » J'étais un peu excusable, ce me semble, de chercher surtout dans cet article II la justification des propriétés attribuées à l'espace.

Sur le fond de la question, je me borne à constater que mon différend avec le R. P. Leray porte uniquement sur une question philosophique, sur la définition de l'activité, de la passivité, peut-être aussi de la simplicité. Mais nous sommes entièrement d'accord sur l'existence de l'espace, sur le rôle qu'il joue par rapport aux corps, en un mot, sur tout ce qui intéresse la mécanique, à cela près que je n'ai pas eu à m'occuper de ce qui se passe aux confins de l'espace réel.

Qu'il me soit permis maintenant d'ajouter un mot à l'adresse de M. De Tilly. Le savant général n'est séparé de nous, sur cette question de l'espace, que par un pas qu'il aura bien de la peine à ne pas franchir.

Dans une note communiquée à la Société dans sa session d'avril 1892, et qui se trouve résumée à la suite de la communication de M. Mansion sur les principes de la mécanique rationnelle, M. De Tilly admet l'existence d'un système invariable *sans rotation ni accélération*, par rapport auquel le principe de l'inertie se vérifie. « L'expérience, dit-il, semble prouver que le système en question est celui des étoiles fixes. »

Or, le système des étoiles fixes n'est pas invariable et ne peut pas, par conséquent, être le système en question. Il faut donc chercher ce dernier ailleurs, et je ne vois que deux solutions possibles : le corps Alpha de Neumann, ou quelque chose qui soit entièrement distinct de la matière. J'ai développé dans mon mémoire sur la réalité de l'espace (*Annales de la Soc. scientifique de Bruxelles*, t. XVIII) les motifs qui doivent faire rejeter la première et admettre la seconde de ces solutions. »

La section vote l'impression de la note du R. P. Leray et des observations de M. Vicaire. Cette note d'ailleurs donne lieu à une discussion à laquelle tous les membres prennent part.

M. Mansion analyse ensuite l'important ouvrage historique qui vient de paraître sous le titre : *Theorie der Parallellinien von Euclid bis auf Gauss, eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuclidischen Geometrie,* in Gemeinschaft mit F. Engel herausgegeben von P. Stäckel (Leipzig, Teubner).

Cette analyse paraîtra *in extenso* dans la *Revue des questions scientifiques*, livraison d'octobre 1895.

On peut, d'après le livre de M. Stäckel, résumer comme il suit les résultats obtenus par les géomètres sur les principes fondamentaux de la géométrie, avant la première publication de Lobatchefsky. On suppose admis le postulat 6 d'Euclide.

I. *Théorème de Legendre* (1752-1833). La somme des angles d'un triangle ne peut surpasser deux droits (1800). Elle est égale ou inférieure à deux droits dans tous les triangles si elle l'est dans un seul (1833).

II. *Théorème de Saccheri* (1667-1733). Dans l'hypothèse où

la somme des angles d'un triangle est inférieure à deux droits, deux droites se rencontrent, ou sont asymptotes l'une de l'autre, ou ont une perpendiculaire commune à partir de laquelle elles divergent (1733).

III. *Théorème de Lambert* (1728-1777). Dans la même hypothèse, l'aire d'un triangle est proportionnelle à son déficit angulaire (1766; publié en 1786).

IV. *Théorème de Taurinus* (1794-1874). Cette même hypothèse répond à la relation suivante :

$$\mathrm{Ch}\frac{a}{\mathrm{R}} = \mathrm{Ch}\frac{b}{\mathrm{R}}\,\mathrm{Ch}\frac{c}{\mathrm{R}} - \mathrm{Sh}\frac{b}{\mathrm{R}}\,\mathrm{Sh}\frac{c}{\mathrm{R}}\cos \mathrm{A},$$

entre les côtés a, b, c et un angle A d'un triangle. Par suite, elle ne peut conduire à aucune contradiction logique (1826).

V. *Théorème de Gauss* (1777-1855) *et de Schweickart* (1780-1857). Cette hypothèse peut être réalisée dans la nature, contrairement aux assertions gratuites de Kant dans la *Kritik der reinen Vernunft* (1819).

VI. *Remarque.* Saccheri, Lambert et Taurinus ont trouvé les premières propositions de la géométrie riemannienne; les deux derniers savent qu'elle correspond à la géométrie euclidienne de la sphère et soupçonnent une correspondance semblable pour la géométrie où la somme des trois angles d'un triangle est inférieure à deux droits.

Enfin, la conclusion suprême à déduire de cette étude historique est la suivante : *La découverte de la géométrie non euclidienne vers 1830 était inévitable* (HALSTED).

M. Vicaire présente quelques observations au sujet d'une note de M. Mansion intitulée : *Sur les principes de la mécanique rationnelle* (ANN. DE LA SOC. SCIENTIF. DE BRUXELLES, 1891-1892, t. XVI, 1re partie, pp. 81-85), et des développements que M. Pasquier a donnés à la même manière de voir dans une communication faite à la Société, à la session de janvier 1895 (IBID., 1894-1895, t. XIX, 1re partie, pp. 46 et 56).

I. On peut, dit M. Vicaire, envisager ces communications de deux manières. Ou bien il s'agit simplement d'un mode d'exposition, et alors les objections ne peuvent porter que sur une question d'opportunité, sur les avantages ou les inconvénients de ce mode d'exposition. Ou bien il s'agit d'une manière de comprendre la mécanique; ce sont les principes mêmes de celle-ci qui sont contestés, et alors d'autres objections plus graves s'ajoutent aux premières.

Il semble bien que c'est surtout un mode d'exposition que nos confrères ont eu en vue, puisqu'ils admettent l'existence d'une mécanique physique s'appuyant sur des principes d'ordre expérimental. Cependant, on pourrait aussi penser que M. Mansion va plus loin lorsqu'il renvoie à la *Mechanik* de Kirchhoff, où ce sont bien les principes qui sont en cause, et surtout lorsque, dans une note *Sur l'inutilité de l'espace dit réel en mécanique* (*), il dit, se référant à la note ci-dessus citée : « Nous avons essayé de montrer que ces principes sont purement formels et équivalent à la définition de quelques termes nouveaux que l'on introduit dans la science de l'étendue. »

J'examinerai d'abord la question d'opportunité et je passerai ensuite à ce qui touche aux principes, me réservant toutefois de revenir ultérieurement sur la mécanique de Kirchhoff.

II. Évidemment, il est possible d'édifier une mécanique rationnelle de laquelle on bannirait toute discussion sur la valeur et la portée des notions et des principes fondamentaux en présentant ceux-ci comme de simples conventions et les forces ou autres entités nécessaires à la mécanique comme des grandeurs définies arbitrairement, sans se préoccuper de savoir s'il existe quelque chose de semblable dans la nature. Mais on ne bannirait ces discussions d'une partie de la science que pour les rejeter dans une autre; on ne pourrait pas les écarter lorsqu'il s'agirait de savoir jusqu'à quel point les formules et les conclusions de

---

(*) *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. XIX, 1894-1895, 1re partie, pp. 56-58.

cette mécanique rationnelle sont applicables aux problèmes du monde réel.

A vrai dire, tout l'exposé de la mécanique physique se réduirait à affirmer que les choses se passent en effet comme on l'a supposé dans la mécanique rationnelle, si l'on considère les grandeurs arbitraires de celle-ci comme représentant les réalités de même nom qu'on rencontre dans la nature et dans les arts. Est-ce bien la peine d'en faire une science distincte?

D'autre part, est-il admissible que le maître tienne son disciple, pendant de nombreuses leçons ou à travers de longs volumes, à spéculer sur des notions et des principes arbitraires, sans avoir le droit de lui dire que cela correspond à des réalités, alors que l'un n'enseigne et que l'autre n'étudie qu'en vue de ces réalités? Ce serait pousser bien loin le formalisme.

J'estime que le seul résultat de cette séparation serait de faire oublier la mécanique physique, de faire perdre de vue la nécessité de baser la mécanique sur l'expérience. Trop de savants sont déjà tentés d'en faire une science purement abstraite, une géométrie à quatre dimensions.

Je me demande même comment on pourrait définir cette mécanique rationnelle, sinon par la mécanique physique; quel en serait l'objet, sinon d'établir les formules nécessaires à la mécanique physique. Et, en effet, c'est bien à celle-ci qu'elle demande son programme; c'est aux besoins de celle-ci qu'elle subordonne ses recherches.

Ainsi, on a fait, en cinématique, des études considérables sur les accélérations de divers ordres. Pourquoi, en mécanique, se borne-t-on au premier ordre? Parce qu'il se présente seul dans la mécanique réelle. Pourquoi considère-t-on des résistances dépendant des premières dérivées des coordonnées? Parce que c'est le cas de la nature. Comment a-t-on été amené aux formules complexes relatives au frottement? Par des considérations de mécanique physique.

La note de M. Pasquier est intéressante à ce point de vue. Bien qu'il ait cherché à donner à ses formules la plus grande généralité possible, il est obligé de se repérer à tout instant sur

la mécanique physique. Sans ce guide, en effet, la prétendue mécanique rationnelle ne pourrait manquer de s'égarer dans le vaste domaine de la géométrie, au point de ne plus s'y reconnaître.

III. Il me semble qu'on donne complète satisfaction à ce qu'il y a de juste dans les vues de M. Mansion et de M. Pasquier en présentant la mécanique comme je l'ai fait dans mon mémoire *Sur la réalité de l'espace* (Ann. Soc. scient. de Bruxelles, t. XVIII, 1893-1894, 2e partie, p. 307).

Il n'y a pas deux mécaniques : il n'y en a qu'une, science essentiellement expérimentale, branche de la physique générale. Pour la constituer à l'état de science rationnelle, on a procédé comme pour toutes les autres branches de la physique : on a formé une hypothèse dont on a comparé les conséquences avec les faits. Cette hypothèse est formée de l'ensemble des notions fondamentales et des principes fondamentaux de la mécanique; le développement de cette hypothèse constitue la mécanique rationnelle.

Cette manière de présenter la science met bien en évidence ce qu'il y a de conventionnel jusqu'à un certain point, conventionnel, mais non arbitraire, dans les bases de la mécanique rationnelle : c'est une hypothèse.

Seulement, je place au point de départ la déclaration que cette hypothèse a pour objet d'être conforme à la réalité et que les dénominations employées répondent à celles qu'on rencontre dans les problèmes de la nature. La vérification suivra progressivement le développement mathématique de l'hypothèse.

Si l'on ajoute que cette hypothèse, de l'aveu général, s'est montrée jusqu'à présent satisfaisante, qu'elle a permis, dans un nombre immense de cas, de prévoir les mouvements des corps et qu'elle les a prévus avec d'autant plus d'approximation qu'on avait analysé plus complètement les conditions de chaque problème et les diverses causes en jeu, il y aura là, ce me semble, de quoi faire prendre patience à l'élève et autoriser le maître à faire attendre quelque temps les vérifications.

IV. Dans l'application aux problèmes de la nature, ce n'est pas la mise en équations qui est difficile. Elle est toujours facile quand le problème est bien et complètement posé, et cela même sans recourir aux procédés de Lagrange fondés sur l'emploi du principe de d'Alembert et de celui des vitesses virtuelles. Il suffit d'écrire que l'accélération de chaque point est égale à la résultante des forces divisée par la masse. La gloire qu'on attribue généralement à ce grand géomètre d'avoir donné, avec son équation générale de la Dynamique, le moyen de réduire en formules tous les problèmes, me semble le moindre de ses mérites.

Ce qui manque le plus, sans parler de la difficulté de tirer parti des équations, ce sont les données : c'est la connaissance de la constitution des corps considérés et des forces en jeu. On y supplée par de nouvelles hypothèses, comme il arrive dans la théorie de l'élasticité, dans la mécanique des fluides. De là de nouvelles branches de la science, d'un caractère moins général, plus hypothétique, que l'on a coutume néanmoins, et avec raison, de comprendre encore dans la mécanique rationnelle, parce qu'elles sont toujours le développement mathématique d'une hypothèse.

Mais dans une foule de questions, et les branches que je viens de citer en offrent de nombreux exemples, on n'arrive pas par ces moyens à des résultats suffisants, soit qu'on ne réussisse pas à formuler une hypothèse satisfaisante, soit que les ressources de la géométrie ne permettent pas d'exploiter convenablement les équations. Force est alors de recourir à des expériences directes. C'est l'ensemble de ces recherches expérimentales qui mérite seul, à mon avis, le nom de mécanique physique.

Ainsi comprises, la mécanique rationnelle et la mécanique physique ne sont pas deux sciences distinctes, différant par leur objet et par la définition des termes dont elles font usage : ce sont deux parties d'une même science, différant seulement par leurs méthodes et par leur degré d'avancement, susceptibles, à raison de ces différences comme de l'importance de leur développement, d'être enseignées à part, mais se prêtant un mutuel appui et se pénétrant intimement.

V. Doit-on admettre que l'exactitude de l'hypothèse est démontrée par le grand nombre des vérifications qu'elle a subies victorieusement? Oui, sans doute, dans une large mesure, mais peut-être pas en tout.

Un trait important de l'hypothèse, c'est la conception du point matériel. On sait que les principes fondamentaux ne peuvent s'énoncer avec précision et rigueur que pour un point matériel; la notion d'une force simple est liée intimement à celle du point matériel et, en somme, tous les raisonnements qu'on rencontre au début de la mécanique reposent essentiellement sur cette conception. Mais on sait aussi que, pour appliquer les formules aux cas de la nature, on est obligé d'opérer au dernier moment un petit escamotage qui transforme les sommes relatives à des agglomérations discontinues de points matériels en des intégrales relatives à des masses supposées continues.

La vérification des formules ainsi obtenues ne peut certes pas être considérée comme une preuve de l'existence effective du point matériel, et les dynamistes, pour qui il est une réalité et constitue l'atome matériel, ne sauraient s'en prévaloir. S'ils tiraient argument de la difficulté, disons l'impossibilité, dans l'état actuel des choses, de commencer la mécanique sans lui, on leur objecterait au même titre l'impossibilité de l'achever avec lui. Au point de vue strictement scientifique, la conception du point matériel n'a donc que la valeur d'un expédient mathématique, d'une hypothèse de coordination dont rien ne garantit la conformité avec la nature.

Il y a là certainement un point faible de la mécanique actuelle, point faible qui ne pourra disparaître que lorsqu'on aura résolu la question de la véritable constitution de la matière.

Bien des gens estiment que cette question importe peu, et je suis assez de cet avis au point de vue de la mécanique générale, où l'on ne considère que des forces agissant à de grandes distances; elle y gagnerait cependant une rigueur et une élégance de déduction qui n'est pas à dédaigner. Mais il ne pourrait manquer d'en être tout autrement pour la mécanique moléculaire; si le point matériel n'est pas une réalité, son introduction fictive

au lieu et place de l'atome réel doit certainement masquer la simplicité des phénomènes, comme il arrive toutes les fois qu'on substitue une formule empirique d'interpolation à l'expression d'une loi naturelle.

Mais revenons à la note de M. Mansion.

VI. En un sens, on peut dire avec lui que le principe de l'inertie équivaut à la définition de la force : cause altératrice du mouvement uniforme. Pourtant il n'est pas une pure tautologie, car il comprend l'affirmation que cette force est *extérieure* au mobile, en d'autres termes, que toutes les fois qu'un point matériel n'a pas un mouvement rectiligne et uniforme, il existe en dehors de lui un corps dont l'action explique l'altération du mouvement. On pourrait même ajouter que cette action se rattache toujours à un phénomène connu ou à un phénomène qu'on retrouvera dans tous les cas analogues.

Ce qui précède résulte très bien des énoncés suivants de Newton :

« Définition IV : La force (*vis impressa*) est une action exercée sur un corps pour changer son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme. »

C'est une action exercée du dehors évidemment, et l'on n'affirme pas encore qu'elle peut seule changer l'état de repos ou de mouvement uniforme. Cette affirmation constitue précisément le principe de l'inertie :

« Axiome ou loi I. — Tout corps persévère dans son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme s'il n'est obligé par des forces (*a viribus impressis*) à modifier son état. »

En d'autres termes, il y a là une proposition et sa réciproque : « La force est une cause altératrice... », et : « Toute cause altératrice... est une force. »

VII. M. Mansion distingue la force considérée au sens métaphysique (je dirais plutôt au sens physique), c'est-à-dire considérée en elle-même, en tant que cause, de la force mathématique. La distinction est nécessaire et Newton l'a déjà faite; la

force mathématique est ce qu'on pourrait, en notre langage moderne, appeler *mesure de la force*, mesure géométrique s'entend, c'est-à-dire comprenant la grandeur et la direction.

Cette force mathématique, M. Mansion la détermine par la *déviation*. J'emploierai de préférence l'accélération, qui me semble intervenir plus naturellement; mais c'est équivalent au point de vue cinématique et ce n'est pas là-dessus que je veux appeler l'attention.

Prendre l'accélération comme mesure de la force (eu égard, bien entendu, à la masse du point mobile), c'est ajouter beaucoup à la définition newtonienne de la force ci-dessus rappelée. J'admets bien, ainsi que je l'ai exposé plus longuement ailleurs (*), qu'une cause ne peut se mesurer autrement que par son effet; par conséquent la force, cause altératrice du mouvement, doit se mesurer par l'altération de celui-ci. Mais que l'altération du mouvement soit la même chose que l'accélération, c'est-à-dire dérivée géométrique de la vitesse, c'est ce qui est moins évident. Pourquoi, si l'on considère deux vitesses infiniment voisines, doit-on les combiner par la règle de la différentiation géométrique, et non autrement? Pourquoi même ne pas faire intervenir trois vitesses infiniment voisines, de sorte que la force dépendrait de la torsion de la courbe?

Sur un point au repos, on doit admettre comme évident que la même force produira toujours le même mouvement et par conséquent la même accélération. Il est très naturel de prendre cette accélération pour mesure de la force. On l'a fait et les succès obtenus ont montré qu'on avait bien fait.

Que l'accélération reste la même lorsque le point mobile a déjà une vitesse, c'est ce qui n'était pas aussi facile à prévoir. L'expérience ayant prouvé qu'il en est ainsi, Newton a fait de cette vérité l'objet de son second principe (**). Ce second

---

(*) *De la valeur objective des hypothèses physiques* (REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES, Bruxelles, avril 1893, § X).

(**) Loi II. « Le changement du mouvement est proportionnel à la force et se fait suivant sa direction. »

principe se trouve englobé implicitement dans la définition de la force mathématique telle que la donne M. Mansion; je crois que c'est un tort.

VIII. Beaucoup d'auteurs introduisent, dans l'énoncé de ce second principe, la règle de la composition ou de l'indépendance des effets des forces. M. Mansion réduit même le principe à cette seconde partie. Newton a procédé autrement.

Il considère comme évident que l'effet d'une force doit se composer avec l'effet simultané d'une autre force comme il se compose avec celui d'un mouvement initial. Il démontre ainsi le théorème de la composition des forces comme corollaire du second principe.

Si cela ne paraît pas suffisant, on peut recourir à l'une des nombreuses démonstrations qu'on a données depuis lors, notamment celles de d'Alembert, de Poisson, de Cauchy. Mais il semble défectueux de poser comme principe ce qui est susceptible de démonstration.

Ce qui semble, en tout cas, inadmissible, c'est de faire de cette vérité une *convention*.

Sans doute, dans une mécanique purement formelle, peu importe la base philosophique de la règle du polygone des forces; peu importe même qu'elle ait une base quelconque : cela ne change rien aux formules qu'on en tire. Mais peut-on vraiment admettre que le disciple se résignera à aller jusqu'au bout de la mécanique rationnelle sans savoir si cette convention est motivée, si ces formules serviront à quelque chose?

Bien plus, cette règle serait conventionnelle même dans la mécanique expérimentale! En effet, quand elle ne se vérifie pas, dit M. Mansion, on dit que les deux forces sur lesquelles on a opéré en font naître une troisième qu'on détermine par la règle en question, et ainsi celle-ci se vérifie toujours par construction.

Rien n'est moins exact, à mon avis.

Lorsqu'un mouvement se produit sous l'action de deux forces connues et que la résultante calculée par la règle du parallélogramme ne rend pas compte de l'accélération observée, on cal-

cule, en effet, par la même règle, la force complémentaire qu'il faut adjoindre. Mais ce qui est remarquable, c'est qu'on arrive généralement à une force dont la grandeur et la direction s'expliquent par des lois connues de la physique; s'il n'en est pas ainsi, on est en présence d'un phénomène encore inobservé, mais on le retrouvera dans tous les cas analogues. En outre, et c'est ce qui achève d'ôter à la règle du parallélogramme ou du polygone tout caractère conventionnel, si l'on essayait d'appliquer une autre règle, on n'arriverait à aucun résultat simple, à aucune loi constante.

Du reste, cette nécessité d'introduire des forces complémentaires se présente tout aussi bien pour les mouvements dus à une seule force connue et non à deux. La force unique dans un cas, la résultante des deux forces dans l'autre, se comportent exactement de la même manière.

Remarquons encore que la règle du parallélogramme n'est pas susceptible de vérification expérimentale directe. Elle n'a lieu, en effet, que pour des forces simples et, par conséquent, appliquées à un point matériel. Or, les physiciens n'ont pas encore réussi à isoler un point matériel. Toutes les forces sur lesquelles nous opérons sont des résultantes, ou plutôt des systèmes de forces qui, la plupart du temps, n'ont pas même, en toute rigueur, une résultante unique.

IX. M. Mansion exclut de la mécanique rationnelle le principe de l'égalité de l'action et de la réaction qui, dit-il, semble appartenir plutôt à la mécanique physique.

Je conviens qu'il est difficile d'en donner un énoncé purement mathématique. Il faut nécessairement parler de l'action d'un point déterminé sur un point déterminé, considération d'ordre essentiellement physique. Mais cela même met en évidence l'impossibilité de traiter la mécanique rationnelle en dehors de ces considérations. On serait conduit, en effet, à en exclure arbitrairement une foule de questions.

Ainsi, la mécanique rationnelle étudierait le mouvement du pendule, mais pour connaître l'effort supporté par le point de

suspension, il faudrait passer à la mécanique physique. Et de même toutes les fois qu'il y a des forces extérieures.

La distinction essentielle des forces extérieures et des forces intérieures soulève une difficulté du même genre et d'ailleurs en connexion intime avec la précédente. M. Mansion désigne improprement sous le nom de forces intérieures les forces de liaison qui peuvent tout aussi bien être extérieures. S'il avait voulu aborder la véritable définition de ces deux espèces de forces, il aurait eu, je crois, quelque difficulté à la présenter d'une manière purement mathématique.

Et cependant cette distinction est indispensable. Elle se présente dans une foule de questions. Elle est nécessaire, par exemple, pour démontrer le théorème du mouvement du centre de gravité.

Lorsqu'il y a une fonction des forces, on peut la diviser en deux parties, l'une qui ne dépend que des différences des coordonnées, l'autre qui ne peut pas se réduire à cette forme ; la première fournit les forces intérieures, qui se trouvent être deux à deux égales et directement opposées. Une distinction analogue faite dans les équations de condition donne les forces de liaison intérieures et extérieures. Dans ce cas donc, on obtient une définition purement mathématique des deux sortes de forces.

Je ne sais si l'on pourrait y parvenir dans le cas général. Toujours est-il que Jacobi n'y a pas réussi. Pour établir le théorème du mouvement du centre de gravité lorsqu'il n'y a pas de fonction des forces, il admet tout simplement l'égalité de l'action et de la réaction (*).

Quant à Kirchhoff, c'est autre chose. Il se contente de dire que le centre de gravité se meut comme si toutes les masses et toutes les forces y étaient concentrées. Mais n'ayant pas fait la distinction des deux sortes de forces, il ne peut pas constater que les forces intérieures disparaissent dans cette concentration ; par là le théorème perd son principal intérêt (**).

Des faits analogues se présentent dans beaucoup d'autres

(*) JACOBI, *Vorlesungen über Dynamik*, 3e leçon.
(**) KIRCHHOFF, *Mechanik*, 4e leçon.

questions, et c'est ainsi qu'en voulant isoler la mécanique rationnelle et surtout la mécanique rationnelle purement analytique, les plus profonds mathématiciens arrivent à la restreindre à des cas très particuliers et tout à fait théoriques, et à se faire de la mécanique une conception beaucoup plus étroite, moins pratique surtout, que celle d'un bon élève qui aura suivi un cours élémentaire fondé sur des considérations physiques.

M. Mansion répond en substance ce qui suit :

1° Sur la question du mouvement et de l'espace absolus, il ne peut que maintenir sa manière de voir. *Se mouvoir* est un terme essentiellement relatif. Le mouvement de n points est complètement décrit quand on donne à chaque instant les $\frac{1}{2}n\ (n-1)$ distances de ces points. Il pense d'ailleurs que les définitions de l'espace absolu données par divers auteurs sont purement conventionnelles.

2° Sur les autres points, au contraire, il est, au fond, à peu près d'accord avec M. Vicaire. Ainsi, il ne pense pas que l'on doive séparer l'enseignement de la mécanique physique de celui de la mécanique rationnelle, et il ne met nullement en doute les principes de la mécanique physique. Mais, dans l'enseignement de la mécanique, il pense qu'il faut distinguer plus nettement qu'on ne le fait d'ordinaire les principes purement rationnels qui sont une suite des définitions, des vérités expérimentales. Ainsi :

I. Le principe de l'inertie est une conséquence logique de la définition de la force : *cause altératrice du mouvement rectiligne uniforme* (*), ou de la convention d'après laquelle *on mesure cette force en divisant le double de la déviation qu'elle produit par le carré du temps et prenant la limite de cette expression.*

Le principe expérimental correspondant est celui-ci : *il existe dans la nature des forces ou causes altératrices du mouvement rectiligne uniforme* que nous pouvons observer et mesurer.

(*) Bien entendu par rapport à trois points ayant entre eux des distances invariables.

II. Le principe du parallélogramme des forces est une conséquence logique de la définition de l'action *simultanée* de deux forces sur un point.

Le principe expérimental correspondant est celui-ci : chaque fois que dans la nature on a pu constater séparément l'effet de deux forces isolées, l'effet de ces deux forces agissant simultanément a été celui de la résultante de ces forces donnée par la règle du parallélogramme. Si, dans certains cas, on a dû imaginer une troisième force pour expliquer le mouvement produit en apparence par deux autres, on a reconnu que cette troisième force ne servait pas seulement dans l'interprétation du phénomène considéré, mais aussi dans d'autres.

III. Les équations générales du mouvement d'un système de *n* points sont au fond une définition de ce que l'on appelle *système de* n *points soumis aux* MÊMES *forces proprement dites que* n *points libres.*

Le principe expérimental correspondant est celui-ci : lorsque, dans un pareil système, on parvient à supprimer les forces dites de liaison, les forces proprement dites restent les mêmes.

Le mode d'exposition préconisé ici fait disparaître toutes les difficultés relatives aux principes de la mécanique rationnelle et de la mécanique physique. Les principes de la première sont une suite des définitions. Dans ceux de la seconde, *on affirme* simplement, *au nom de l'expérience, que ce qui a été défini en mécanique rationnelle se présente réellement dans la nature.* Les premiers sont des jugements analytiques (*à priori*) ; les seconds, des jugements synthétiques (*à posteriori*).

M. Goedseels fait observer que le phénomène de l'aberration de la lumière fournit un moyen de reconnaître une catégorie de systèmes de comparaison parmi lesquels il convient de choisir ceux qui sont en repos absolu (ou dit absolu).

En effet, on sait que la direction apparente dans laquelle on voit un point lumineux est la diagonale d'un parallélogramme dont un des côtés est la vitesse absolue (ou dite absolue) de l'œil de l'observateur.

Par conséquent, si la vitesse de cet œil par rapport à un système d'axes OXYZ ne fournit pas la direction apparente observée, c'est que ces axes ne sont pas au repos absolu (ou dit absolu). Si, au contraire, la vitesse de cet œil par rapport au système d'axes OXYZ fournit la direction apparente observée, ce système est de ceux parmi lesquels il convient d'en choisir un au repos absolu (ou dit absolu).

Les communications de MM. Vicaire, Mansion et Goedseels donnent lieu à une discussion à laquelle prennent part la plupart des membres de la section.

Les trois communications suivantes sont renvoyées à la prochaine session :

1° *Sur les notations algébriques avant Descartes*, par M. C. Le Paige;

2° *Sur certaines sommations relatives à la série de Lambert*, par M. Ch.-J. de la Vallée Poussin;

3° *Sur une nouvelle forme de la relation entre les distances de cinq points en géométrie non euclidienne*, par M. P. Mansion.

Deuxième section.

M. le professeur L. Henry est empêché par une indisposition d'assister à la séance; ses communications sont remises à la prochaine réunion.

Une commission, composée de M. Duhem et du R. P. Lucas, est chargée d'examiner la note présentée par le R. P. Leray : *Composante normale de la tension superficielle des liquides.*

M. le professeur Van der Mensbrugghe, indisposé, a chargé le secrétaire de donner lecture du travail suivant :

Quelques expériences propres à faire comprendre la constitution des liquides, par M. G. Van der Mensbrugghe.

L'esprit humain est sujet à d'étranges aberrations. A l'appui de cette thèse, on peut citer les preuves les plus diverses; en voici une qui est tirée de l'histoire de la physique.

Tout le monde sait que les liquides s'évaporent; au bout de vingt-quatre heures et par mètre carré de surface libre, le poids de l'eau évaporée est de plus de 1 kilogramme; c'est là un résultat bien facile à constater; on en déduit qu'en une seconde et par mètre carré, il se répand dans l'air ambiant $11^{mgr},57$; or, la couche superficielle ayant 1 mètre carré de base et ${}^{1mm}/_{20000}$ d'épaisseur, ne pèserait que 50^{mgr} si elle avait partout même densité; il suit de là que cette même couche perd en 1″ plus du cinquième (près du quart) du liquide qui la constitue.

D'après cela, est-il permis de supposer qu'un liquide donné est en équilibre dans toutes ses parties? Évidemment non; c'est pourtant ce que mathématiciens et physiciens à l'envi ont toujours fait et font encore couramment. Il y a même en physique un chapitre spécial, intitulé *Hydrostatique*, c'est-à-dire science de l'équilibre des liquides. Est-ce à dire que les physiciens n'étudient pas aussi les lois de l'évaporation? Non certes; seulement, pendant cette étude, ils oublient qu'antérieurement ils ont toujours supposé les liquides en équilibre parfait. Voilà la singulière inconséquence que je tenais à constater ici.

Toutefois n'exagérons pas, et convenons que, dans les questions relatives aux propriétés des liquides considérés en masses assez grandes, il n'y a aucun inconvénient à admettre que l'équilibre ait lieu dans la couche superficielle comme à l'intérieur; car alors les forces extérieures qui sollicitent les liquides l'emportent de beaucoup sur celles qui peuvent dériver de la cohésion, tout au moins à une certaine distance des parois des vases renfermant les liquides.

Mais il en est tout autrement dans l'étude de la capillarité, dont les effets sont dus à des forces dont le siège se trouve

précisément dans la couche superficielle; supposer l'équilibre parfait du liquide dans cette couche qui se renouvelle incessamment, c'est se mettre dans l'impossibilité de découvrir les véritables forces figuratrices qui président aux phénomènes capillaires.

Depuis longtemps déjà, j'ai signalé l'instabilité d'une surface liquide libre (*); mais alors je cédais encore trop à la routine, et je n'ai pas formulé mes réserves en termes suffisamment catégoriques.

L'année dernière, j'ai présenté à notre section une démonstration très simple de la cause commune de l'évaporation et de la tension superficielle des liquides (**); jusqu'à présent, cette démonstration n'a été ni combattue ni acceptée; mais personne n'ignore avec quelle facilité on passe sous silence une méthode plus simple et plus fondée, plutôt que de la signaler au détriment des idées reçues.

Aujourd'hui je me proposais de décrire quelques expériences destinées à mettre de mieux en mieux en lumière la vraie constitution des liquides; toutes sont fondées sur le principe suivant :

Si l'on produit une compression dans un ensemble de corps élastiques soumis à des forces inégales qui tendent à les rapprocher, la réaction due à l'élasticité donnera lieu, entre ces corps, à des écartements d'autant plus prononcés que les forces qui les sollicitent sont moins intenses.

On se rappelle, en effet, que, d'après moi, les forces attractives qui rapprochent les particules à l'intérieur d'un liquide, sont plus nombreuses que près de la surface libre; la réaction due à l'élasticité doit donc produire entre les particules superficielles des écarts d'autant plus grands qu'elles sont plus voisines du milieu ambiant.

(*) *Sur l'instabilité de l'équilibre de la couche superficielle d'un liquide* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELG., 1886, t. XI, p. 341).

(**) *Ann. de la Soc. scientif. de Bruxelles*, t. XVIII, 1re partie, séance du 25 janvier 1894.

Lorsque mes expériences de vérification seront suffisamment variées, je ne manquerai pas de les communiquer à la section.

Le R. P. Barcel fait *quelques remarques sur une pile voltaïque.*

Les piles Leclanché se composent, comme chacun sait, de charbon en contact avec du bioxyde de manganèse, et d'une lame ou d'un bâton de zinc, le tout plongeant dans une solution de chlorure ammonique.

Dans certains modèles, la pyrolusite en fragments entoure simplement la plaque de charbon; dans d'autres, le bioxyde pulvérisé avec du graphite forme, à l'aide de matières agglutinantes, un aggloméré obtenu par moulage.

Quoi qu'il en soit, le bioxyde passe pour être ici la substance dépolarisante, et l'on serait tenté de croire que la suppression de MnO_2 dans ce genre de pile doit amener une polarisation rapide, et même un arrêt complet de fonctionnement après quelques instants.

Or, l'expérience montre qu'en supprimant de fait le bioxyde, et en ne conservant, par conséquent, que charbon — chlorure ammonique — zinc, on obtient une pile fort passable.

Deux éléments ainsi constitués et réunis en tension ont fait fonctionner une sonnerie ordinaire, de résistance moyenne, pendant plus de huit jours, sans interruption.

Sans doute, au commencement de l'expérience, la force électromotrice a dû s'abaisser assez vite. Des mesures n'ont été prises que pendant les six derniers jours : or, durant tout ce temps, l'intensité du courant est restée sensiblement constante.

Pendant tout ce temps aussi, des bulles d'hydrogène se détachaient des charbons et venaient crever à la surface du liquide.

Les électrodes positives, il est utile de le remarquer, étaient des charbons artificiels, à grains serrés, compacts, et probablement meilleurs conducteurs que les charbons de cornue naturels.

Nous nous proposons d'étudier de plus près les phénomènes

relatifs à cette pile, d'en déterminer les constantes physiques, et de chercher en particulier quel est, au juste, le rôle du bioxyde de manganèse dans les piles ordinaires. Il pourrait se faire que l'action chimique de ce composé fût insignifiante, si pas nulle, tandis que son intervention comme dépolarisant physique (*) pourrait ne pas être négligeable. Dans ce cas, l'emploi de certains charbons permettrait de laisser de côté MnO_2.

Pratiquement, il est certain qu'en sus des avantages qui ont mis en faveur la pile Leclanché, l'élément simplifié possède encore ceux-ci : résistance intérieure relativement faible, puisque l'on peut rapprocher beaucoup les deux électrodes; volume réduit; économie et facilité d'entretien.

M. F. Leconte présente quelques remarques sur une expérience de capillarité.

Le R. P. H. Bolsius, S. J., communique à la section la disposition d'un appareil pour le développement de gaz d'un usage fréquent en chimie, tels que H_2S, CO_2, Cl, etc.

Cet appareil, combiné par un collègue, le R. P. Kramers, professeur au Gymnase de Katwijk, présente un grand avantage sur d'autres appareils du même genre, par exemple sur celui de Kipp, à trois ballons superposés.

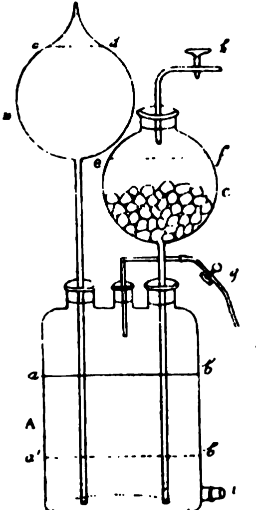
Tandis que, dans d'autres, le gaz est maintenu sous une certaine pression pendant le repos de l'instrument, ou que le gaz développé *refoule* le liquide, ici il n'y a pas de pression hors le temps où l'on se sert de l'instrument, ce qui donne le grand avantage de prévenir bien des fuites, très désagréables souvent, par exemple pour H_2S.

Voici la disposition de l'appareil.

La première partie est un flacon de Woulff, A, à trois tubulures. Par une des trois tubulures passe un tube surmonté d'un ballon, B, étiré par le haut et portant un orifice étroit.

(*) Cf. J. Thirion, S. J., *Le Courant électrique* (Revue des quest. scientif., janvier 1895, p. 70).

Une autre tubulure donne passage à un second tube, surmonté également d'un ballon, C. Celui-ci est pourvu d'un *large* orifice.



La troisième tubulure porte un petit tube recourbé et muni d'un tube en caoutchouc avec pince.

Pour se servir de l'appareil, on commence par mettre dans le ballon C des morceaux de carbonate de calcium, de sulfure de fer, etc., selon le cas.

Afin de prévenir la chute de menus morceaux, on peut recouvrir le fond du ballon C d'une plaque en plomb perforée, ou le munir de toute autre façon.

On ferme le goulot du ballon C à l'aide d'un bouchon de liège ou de caoutchouc pourvu d'un tube à robinet, *h*. Le ballon B avec son long tube est placé ensuite dans l'autre tubulure du flacon, dans lequel on a versé préalablement l'acide dilué, par exemple HCl, aq., jusqu'au niveau *a* — *b*. Les tubes de B et de C atteignent presque le fond du flacon.

Enfin on insère dans la tubulure le tube recourbé avec son prolongement en caoutchouc pourvu de sa pince.

Lorsque tout cela est installé avec des bouchons bien ajustés, on ouvre la pince *g*, et on souffle à travers le petit tube, en ayant soin de fermer d'abord le robinet *h*.

Par cette insufflation, le niveau du liquide, *a* — *b*, descend, par exemple en *a'* — *b'*, et l'acide monte dans le ballon B, par exemple jusqu'en *c* — *d*. Puis on referme le tube en caoutchouc.

En ouvrant maintenant le robinet *h*, l'air s'échappe du ballon C, le liquide du ballon B descend, et ne pouvant monter dans le flacon A, il monte dans le ballon C, où il vient en contact avec la matière qui s'y trouve, et la recouvre par exemple jusqu'en *e* — *f*.

Le dégagement commence, le liquide est refoulé vers le bal-

lon B, et en ouvrant alors le robinet *h*, on obtient un courant de gaz de la manière ordinaire.

Lorsqu'on veut faire cesser le fonctionnement de l'appareil, on n'a qu'à rouvrir la pince *g*, et tout le liquide revient dans le flacon A.

Pour débarrasser le flacon du liquide usé, on peut se servir d'une tubulure placée près du fond du flacon, en retirant le bouchon *i*.

Si, au lieu d'étirer le ballon B en pointe, on lui donnait un goulot muni d'un tube de sûreté, on obtiendrait le moyen de remettre aisément du liquide dans le flacon sans autre dérangement.

M. Thiry donne la *description d'une pile au bichromate de potasse et piles fortes à immersion automatique du zinc.*

Le zinc d'un élément de la pile est attaché à une chainette qui s'enroule autour d'un treuil. Ce treuil fait partie d'un moteur électrique avec volant.

Deux éléments de pile Leclanché sont nécessaires.

Quand on établit le courant, la pile Leclanché soulève un clapet attaché à un aimant. Celui-ci se trouve sur une roue dentée au bout du treuil; le déclanchement se produit et le zinc tombe par son propre poids. Quand on interrompt le courant, le clapet en retombant touche deux contacts qui mettent le courant des piles fortes en communication avec le moteur, le moteur relève le zinc et par la force de son volant fait que celui-ci sort complètement du liquide. Il retombe dans le liquide lorsqu'on rétablit le courant.

On peut de cette manière établir des batteries dans une cave. La pile n'use qu'au moment même de l'emploi.

Les éléments peuvent être réunis en batterie comme dans les autres piles.

Ce système pourrait servir pour moteur sur route, carillons, etc., etc.

M. le professeur Fr. De Walque entretient la section des phénomènes observés quand on fait bouillir une solution moyennement concentrée de bicarbonate de sodium.

On sait que le composé $NaHCO_3$ est peu stable et que le sel sec est décomposé complètement, et assez rapidement, dès qu'on le chauffe de 100° à 125° C. Une dissolution de ce sel portée à l'ébullition laisse aussi dégager du gaz carbonique très régulièrement, et c'est même là un procédé facile de préparation de ce gaz que l'orateur a indiqué dans la nouvelle édition de son *Manuel de manipulations chimiques*. Mais la dissociation n'est complète qu'au bout d'un temps assez long et quand la solution se trouve à peu près évaporée à sec. Il semble que la décomposition en solution étendue s'arrête quand le bicarbonate s'est transformé en sesquicarbonate, mélange de carbonate neutre et de carbonate acide, molécule à molécule, c'est-à-dire que la moitié seule du carbonate acide est transformée en carbonate bisodique. La décomposition continue cependant quand la concentration de la solution s'accentue.

Dans les dosages alcalimétriques de solutions fort étendues de soude, on perçoit des phénomènes de ce genre ; quand on ajoute de l'acide titré, le gaz CO_2 ne se dégage pas : il se forme du bicarbonate et, si on ne faisait bouillir, on aurait un titre moitié de ce qu'il devrait être, au moins si on prend le tournesol comme indicateur de neutralisation.

M. De Walque donne ensuite les détails de la préparation industrielle du gaz carbonique liquide retiré des gaz de la fermentation, d'après le procédé qu'il a contribué à faire installer dans l'établissement de M. Louis Meeus, distillateur à Wyneghem. Ce procédé fonctionne depuis trois ans déjà et donne les meilleurs résultats.

Troisième section.

M. Jean Ballion montre aux membres de la section des poissons, mollusques, larves, etc., ainsi qu'une dissection de grenouille, préparés au formol.

Ces objets ont été macérés pendant deux ou trois jours, d'abord dans une solution faible d'eau contenant 1 p. c. de formol, puis dans une solution à 2 p. c. Après quelques jours, il les a retirés afin de les faire sécher; ils ont acquis ainsi une dureté suffisante pour assurer une conservation indéfinie.

En effet, le formol coagule instantanément l'albumine et par là épargne mieux que l'alcool la couleur des objets à conserver.

Le formol, aldéhyde formique ou oxyde de méthylène, agit plus énergiquement que le bichlorure de mercure pour enrayer la putréfaction et le développement des bactéries. Il présente le grand avantage de pouvoir amener des pays lointains, dans un état de conservation parfaite, les poissons, reptiles, mollusques, arachnides, etc., que leur dessiccation permet d'entasser sans craindre de les détériorer.

La solution au formol coûte dix fois moins cher que l'alcool.

M. Ballion présente également un lacertien vivant, à forme bizarre, qui porte le nom de *Phrynosoma planiceps* Hallowell. C'est un reptile de la famille des Iguaniens; il lui a été envoyé de l'*Indian Territory*, au nord du Mexique.

La tête armée de forts piquants, le dos hérissé de tubercules à pointe, le contour du corps portant des écailles pointues, semblables à de petites dents de squale, aident l'animal à s'engager dans les endroits arides et sablonneux et lui servent de point d'appui pour le porter en avant.

Expédié le 1er septembre 1895, l'animal a refusé jusqu'à présent toute nourriture; il se tient blotti dans sa cage, les yeux fermés, mais au moindre rayon de soleil il se met en mouvement, sans pourtant accorder aucune attention aux insectes qui

sont mis à sa disposition. Contrairement à ce qu'affirment certains auteurs, le Phrynosome évite parfaitement les obstacles qu'il rencontre sur sa route.

Mis en liberté dans un jardin, il se dirige d'instinct vers les pelouses, où il cherche à se cacher. Par un effet de mimétisme, il se confond avec le sable et échappe ainsi à l'œil le plus attentif.

C'est probablement le premier type de l'espèce qui soit arrivé vivant en Belgique.

Le R. P. Van den Gheyn, S. J., développe les considérations suivantes sur la race et les facteurs qui ont présidé à la différenciation des divers types de l'espèce humaine.

Il est peu de mots dont on ait abusé davantage que du terme de *race*. Sans parler du règne animal et végétal, où il est aussi fréquemment employé que mal défini, combien vague et inexacte n'est pas souvent l'acception du mot race, quand il s'agit de l'homme! S'il n'est pas possible de méconnaître, parmi les représentants si nombreux et si variés de l'humanité, des races diverses, il est souvent malaisé de classifier ces races, de les distinguer les unes des autres, de marquer nettement les causes de cette diversité.

Pour ne citer qu'un exemple, la race aryenne, dont on a tant parlé, n'existe pas, et ce mot doit à tout prix disparaître de la terminologie ethnographique. Il y a des peuples employant des idiomes aryens, mais ils appartiennent à des rameaux ethniques très divergents.

Je n'ai pas l'intention d'approfondir en ce moment les graves et multiples questions que soulève le problème de la race en ethnographie. Je me borne à les signaler et à exprimer le vœu qu'elles soient un jour nettement posées, méthodiquement résolues et qu'une étude sérieuse serve de point de départ aux travaux ethnologiques. Les recherches de Quatrefages et en particulier son *Introduction à l'étude des races humaines* ont fourni, sur plusieurs des points que je viens de signaler, des solutions sinon définitives, du moins fort satisfaisantes pour l'état présent de nos connaissances. On ne saurait suivre d'assez près ce guide sûr.

C'est pour avoir négligé les indications si précises fournies par Quatrefages que la théorie récente émise par M. von Jhering dans son ouvrage posthume ne saurait être entièrement approuvée (*). Juriste distingué de l'Université de Göttingen, R. von Jhering pose cet axiome que le sol est toute la race. A ses yeux, l'habitat d'un peuple possède la valeur intrinsèque d'un facteur unique et essentiel de causalité pour la formation de sa race. Pour nous servir de ses propres expressions, en ethnographie *où* équivaut à *quoi* et à *comment*.

Il n'est pas contestable que l'influence du milieu a son importance, exerce une action indéniable sur la formation d'une race. Encore faut-il distinguer les temps, comme le demande l'adage philosophique. Cette action du milieu n'a pas été la même à toutes les époques, elle ne saurait d'ailleurs être identique. Très sensible au début de l'histoire de l'humanité, elle est moins accentuée aujourd'hui que l'homme se défend plus aisément contre les influences externes. Il y a aussi à considérer la nature des migrations qui ont amené un peuple dans d'autres milieux, différents de celui de son berceau. En particulier, pour les Aryas, ces migrations ont été graduelles. Ils n'ont pas été d'un coup transportés d'Asie en Europe.

Voilà pourquoi, pour la différenciation subie par les divers rameaux de la race dite aryenne, il faut accorder une importance plus considérable au mélange. Ces rameaux ont rencontré en Asie et en Europe des populations qui y étaient antérieurement établies, se sont mêlées avec elles, et voilà comment se sont formés les Grecs, les Romains, les Germains, les Gaulois, les Slaves, les Éraniens, les Hindous.

Cette communication est suivie d'une discussion à laquelle prennent particulièrement part MM. les chanoines Boulay et Swolfs.

(*) Voir un compte rendu détaillé de cet ouvrage dans la *Revue des questions scientifiques*, livraison d'octobre 1895.

M. Fernand Meunier présente les travaux entomologiques suivants :

1° *Les chasses hyménoptérologiques aux environs de Bruxelles,* 2e partie : *Fouisseurs.*

2° *Note sur un hyménoptère des lignites du Rhin.*

3° *Revue des* Belostoma *fossiles (hémiptères hétéroptères) des musées de Munich et de Haarlem.*

La section nomme rapporteurs de ces mémoires le R. P. Bolsius, S. J., et M. l'abbé Maurice Lefebvre.

M. Raymond Storms adresse la note suivante *sur un nouveau* Cybium *du terrain bruxellien.*

Les ossements découverts par M. Alph. Proost dans le terrain bruxellien comprennent la moitié gauche des mâchoires d'un poisson, plus une série de six vertèbres remarquables par leurs grandes dimensions.

Ces ossements ont dû appartenir à un poisson de la famille des Scombridés, comme le prouve l'ensemble des caractères qu'ils présentent et qui sont les suivants :

1° Les prémaxillaires et les dentaires forment seuls les bords de la cavité buccale;

2° Les prémaxillaires formaient, en s'unissant l'un à l'autre, un rostre plus ou moins aigu;

3° Le dentaire est de forme allongée et se termine en arrière en un prolongement assez étroit, placé fort bas, qui porte la facette creuse pour l'articulation avec le quadratum;

4° Les dents sont soudées aux mâchoires et elles ne forment qu'une seule rangée;

5° Il n'y a pas de canines ou de dents plus développées que les autres.

Parmi les Scombridés typiques, c'est-à-dire les genres *Thynnus, Auxis, Pelamys, Scomber, Cybium,* c'est de ce dernier genre que notre fossile se rapproche le plus par la nature de ses dents qui sont fortes, lancéolées, tranchantes sur les bords. Nous pouvons ajouter qu'une comparaison soigneuse avec les mâchoires des *Cybium regale* et *Cybium caballa* vivants confirme cette détermination.

Cette détermination générique étant admise, il nous reste à rechercher si le fossile bruxellien doit rentrer dans l'une des espèces fossiles déjà connues ou bien s'il doit se rapporter à une nouvelle espèce.

Il résulte des recherches que j'ai faites dans ce but que notre *Cybium* diffère des autres espèces fossiles par des caractères importants. Je me contenterai de donner ici ceux qui le séparent de *Cybium Bleekeri* avec lequel on serait, de prime abord, porté à le classer à cause de l'identité du gisement et d'une certaine ressemblance dans la dentition. Ces caractères sont :

1° La forme beaucoup plus allongée des éléments des mâchoires du nouveau *Cybium;*

3° Le profil plus aigu du rostre;

3° Les dimensions beaucoup plus petites de l'articulaire comparées à celles du dentaire et de l'intermaxillaire;

4° Le mode d'implantation des dents, qui ne s'étendent pas jusqu'à l'extrémité postérieure du prémaxillaire et du dentaire, en conservant à peu près la même taille, comme chez *Cybium Bleekeri,* mais manquent ou ne sont représentées que par de fort petites dents sur un espace qui peut être évalué au cinquième environ de la longueur totale de ces os;

5° Enfin les dents sont bien plus irrégulièrement espacées.

Ces caractères ont d'autant plus d'importance que les mâchoires et les dents ne diffèrent pas autant chez plusieurs des espèces vivantes du genre *Cybium.* Aussi je considère comme justifiée la création d'une espèce nouvelle pour le beau fossile découvert par M. Proost, et je propose de l'appeler en son honneur *Cybium Proosti* sp. nov.

Les vertèbres associées avec les mâchoires se font aussi remarquer par leurs grandes dimensions ; elles ne diffèrent pas essentiellement de celles des *Cybium* vivants, quoiqu'elles aient une surface moins unie que celle des espèces avec lesquelles je les ai comparées.

Le poisson auquel ces restes ont appartenu devait avoir une taille considérable, car la mandibule mesure environ $0^m,34$. Or, si nous recherchons combien de fois la longueur de la mandibule

est contenue dans celle du corps chez une espèce vivante, telle que le *Cybium regale*, par exemple, nous trouvons qu'elle l'est au moins sept fois et demie, ce qui donnerait pour le *Cybium* fossile une longueur de 2m,55, à l'exclusion des rayons de la caudale.

Enfin on ne doit pas s'étonner de trouver deux espèces de *Cybium* dans le même terrain, car de nos jours encore les *Cybium Commersoni*, Lacép., *Cybium lineolatum*, Cuv. et Val., et le *Cybium guttatum*, Blkr., habitent tous trois les mers des Indes.

Le R. P. Schmitz, S.-J., fait parvenir à la section quelques considérations sur une prétendue période glaciaire contemporaine de la houille.

M. A. Julien, professeur de géologie et minéralogie à la Faculté des sciences de Clermont-Ferrand, prétend tenir les preuves de l'existence d'une période glaciaire houillère. Dans un long article, — qui a vu le jour dans le volume de 1894 du *Club Alpin Français* (t. XXI, pp. 377 à 402), — l'auteur expose sa nouvelle théorie qui renverse toutes les idées accréditées jusqu'à ce jour.

Disons d'abord que M. Julien confond dans sa première partie « glacier » et « période glacière ». Il nous semble que des preuves certaines nous gagneraient aisément à l'idée de glaciers n'importe à quelle époque géologique. S'il y a eu des sommets assez élevés et convenablement situés aux âges primaires, pourquoi ne pourrions-nous pas les trouver couronnés de neiges et de glaces? Mais tout géologue rejettera une extension glaciaire quelconque sous le régime de l'isothermie, régime qui ne paraît avoir disparu qu'avec le milieu de l'ère tertiaire.

Quant aux preuves au moyen desquelles M. Julien veut établir l'origine des brèches morainiques de Mont-Crépon, etc., elles semblent bien plutôt relever de l'imagination et d'idées préconçues que d'une étude approfondie. Et il n'est pas à penser que la phalange des glaciéristes invoquée — ou mieux évoquée — par l'auteur eût voulu ratifier des conclusions si faiblement étayées.

Il n'y a qu'un passage (p. 387) où M. Julien semble douter un peu de la bonté de sa cause. Les blocs nettement striés, si caractéristiques des formations glaciaires, sont restés introuvables pour l'auteur lui-même. A défaut de cet argument, que valent les autres, qui d'ailleurs se trouvent uniquement fondés sur des analogies ou des apparences? Car, à notre gré, M. Julien attache une trop grande importance aux « arêtes vives » que présentent les éléments des brèches houillères. Ces arêtes ne prouveraient-elles pas simplement l'impétuosité de l'agent coupable de la formation, impétuosité qui serait corroborée par l' « absence de triage » des blocs et leur « mode de tassement » ?

D'ailleurs des maîtres ont parlé avant nous. Devant la Société géologique de France, M. de Lapparent a réfuté les arguments de M. Julien, et M. Zeiller ses arguments paléontologiques, auxquels les *Comptes rendus* avaient ouvert leurs colonnes.

C'est à cause même de la publicité donnée aux opinions de M. Julien que nous avons tenu à en entretenir les membres de la troisième section. Avertis, nous ne nous laisserons pas attirer par le miroitement d'un titre, ni captiver par les charmes de la nouveauté.

Quatrième section.

M. Cuylits, vu le peu de temps dont dispose la section, se voit forcé de ne donner que les conclusions d'*une visite à Woerishöffen.*

On voit à Woerishöffen des faits hautement blâmables, mais il s'en dégage une idée, un principe qu'on oublie trop et qui consiste à rappeler que l'homme vit mieux, vit plus longtemps, vit sainement, quand il est ramené à ses conditions naturelles. Ce n'est pas de l'hygiène, c'est mieux et c'est plus. Allons à ces conditions. Tâchons de les retrouver, ce n'est pas difficile. Révolutionnons-nous courageusement, tout au moins, si nous voulons vivre longtemps et bien, contre les abominables étreintes des conventions sociales.

M. le Dr Eustache, doyen de la Faculté catholique de Lille, parle de la fécondité de la race française. Il s'élève avec force contre l'idée trop généralement répandue que, si la population de la France ne s'accroît pas, cela est dû à l'infécondité de la femme française, et il montre par plusieurs exemples que, sous ce rapport, la France n'a rien à envier aux autres pays.

Le peuple a de très nombreux enfants. Malheureusement les conditions déplorables d'hygiène décapitent dès les premières années de l'existence cette nombreuse prolificité.

La bourgeoisie ne le cède en rien aux classes ouvrières, sous ce rapport, ainsi qu'en témoignent les remarquables exemples cités par l'auteur. L'avantage est assuré à cette dernière qui, quand elle le veut bien, se multiplie d'une façon remarquable.

L'auteur termine en disant que, pour assurer l'accroissement de la population de la France, comme de tout autre pays, il est deux facteurs importants : 1° le médecin, qui conserve, grâce à ses soins et à ses prescriptions, la vie aux jeunes enfants et qui, dans ses derniers temps surtout, obtient des résultats vraiment remarquables; 2° le moraliste, qui devrait convertir tous les ménages sans exception à l'idée des familles nombreuses. Mais le moraliste n'arrivera à ce résultat qu'en faisant intervenir au premier plan l'idée de religion et de patrie. En dehors de ces deux idées maîtresses, l'égoïsme et le malthusianisme détruiront toujours les résultats de la fécondité dans tous les pays.

M. le Dr Desplats, collègue de M. Eustache, préconise l'*administration périodique de la digitale aux cardiaques et aux brightiques.* Tous les médecins connaissent les services précieux que rend la digitale dans le cas d'insuffisance du cœur. M. Desplats s'est demandé s'il n'y avait pas mieux à faire que de combattre l'asystolie et s'il ne valait pas mieux la prévenir. Dans ce but, il prescrit la digitale un, deux, trois jours par semaine, ou tous les dix jours, parfois moins souvent encore.

Ce ne sont pas seulement les cardiaques purs, mais aussi les réno-cardiaques qui peuvent bénéficier de cette médication. M. Desplats cite le cas remarquable d'un confrère atteint d'asys-

tolie, suite des grandes fatigues causées par sa profession de médecin de campagne. A cette maladie du cœur s'était jointe une néphrite qui, à diverses reprises, occasionna des symptômes d'urémie. La digitale rétablit les fonctions du cœur et le médecin, malgré la persistance de sa néphrite, put reprendre sa dure vie. Depuis trois ans, il prend de la digitale trois fois par semaine, et rien ne pourrait le faire renoncer à ce médicament auquel il attribue son salut.

M. Desplats prescrit de préférence la digitaline de Homolle et Quevenne, et ne craint pas d'aller d'emblée jusqu'aux doses de 5 et 6 milligrammes.

M. le Dr Warlomont, oculiste à Bruges, fait un exposé clair et vrai de la triste situation des nouveau-nés pauvres que, de nos jours encore, l'ophtalmie purulente n'atteint que trop souvent. L'auteur ne craint pas de le dire, et à notre avis il le fait avec raison : l'ophtalmie purulente, capable d'engendrer une cécité irrémédiable, est devenue de nos jours un vrai scandale d'autant plus navrant que c'est un mal évitable et curable. Il est facile, ajoute-t-il, d'accuser l'impéritie et la négligence des pauvres : c'est aux autorités que remonte la responsabilité des désastres causés par l'ophtalmie. Il faut, dit M. Warlomont, instruire les ménages du danger et leur indiquer, par des publications et des conférences, les précautions à prendre. Il faut veiller à ce que les sages-femmes s'acquittent rigoureusement de leur mission et particulièrement de l'application des précautions antiseptiques préalables à l'accouchement d'une part, et relatives d'autre part à la désinfection oculaire.

Mais le mal a éclaté : que faut-il faire? Il importe que l'enfant soit soigné immédiatement et convenablement. Pour cela : *a*) la sage-femme sera tenue, sous menace de pénalités sévères, de prévenir le médecin; *b*) les médecins chargés de la constatation des naissances devront examiner les yeux des nouveau-nés, et prescrire, le cas échéant, les soins nécessaires : cautérisations au nitrate d'argent à 2 ou 3 °/o et répétées deux ou trois fois par jour dans les cas graves. Mais le médecin ne peut tout faire. Qui se

chargera des lotions antiseptiques fréquentes que réclame un œil malade? Est-ce une parente, une voisine, est-ce la mère elle-même? Oh! leur bon cœur et leur amour, s'ils sont capables de le tenter, failliront souvent à la tâche par ignorance ou impéritie. C'est à la charité, « mère de ceux pour qui la fortune est marâtre », c'est aux grandes dames qui, à Bruxelles, ont fondé l'œuvre du Calvaire, que M. Warlomont demande de fonder « l'œuvre du traitement à domicile de l'ophtalmie des nouveau-nés », et il termine sa remarquable communication par des considérations dont l'éloquence se trouve au niveau de ses sentiments chrétiens.

M. le Dr Dumont entretient ensuite la section d'un sujet susceptible d'application fréquente : la tuberculose et son traitement par la cure d'air à domicile. Il relate le cas d'un tuberculeux qui, en se conformant aux exigences de ce traitement, en retira de réels avantages, avantages qu'il faillit compromettre quand il se crut suffisamment rétabli pour s'affranchir des prescriptions imposées. Cette communication, tout en contenant les règles du traitement de la tuberculose par la cure d'air à domicile, peut se résumer en deux mots : six semaines de repos et d'aération continue, au cœur d'un hiver rigoureux, ont amené d'abord et dès le début la chute de la fièvre et progressivement une augmentation de poids de 4 kilogrammes 500 grammes.

M. le Dr Faidherbe expose en quelques mots, faute de temps, l'histoire d'un ancien médecin de Tournai, Benoît Perdu. Il envisage spécialement Perdu comme théologien et apprécie son principal ouvrage, *Le Paranymphe eucharistique*. On lira avec intérêt cette communication dans la seconde partie des *Annales*.

M. le Dr Lemière, professeur à la Faculté libre de Lille, fait une savante dissertation sur la bactériologie des angines pseudo-membraneuses.

La bactériologie est indispensable au diagnostic des angines pseudo-membraneuses : car telle angine n'est pas diphtérique,

malgré ses apparences; telle autre l'est, malgré des apparences contraires. On peut dire que 50 °/o des angines pseudo-membraneuses ne sont pas dues au bacille de Löffler. M. Lemière signale le coccus de Brisou, le staphylocoque et le pneumocoque dans les angines pseudo-membraneuses bénignes non diphtériques; le streptocoque, qui peut engendrer des angines graves et que l'on rencontre dans l'angine du début de la scarlatine; puis d'autres microbes plus rares : le *Saccharomyces albicans*, c'est-à-dire la levure du muguet; le bacille de la diphtérie aviaire, distinct du bacille de Löffler; le bacille pseudo-diphtérique, que l'on rencontre le plus souvent à l'état d'association et qui, d'après certains auteurs, ne serait que le bacille de Löffler à l'état d'atténuation; enfin, le bacille de Löffler, que l'on peut rencontrer sous trois formes, longue, moyenne et courte, et qui est d'autant plus dangereux qu'il est plus long et qu'il a plus de tendance à abandonner son mode de groupement particulier en petites séries de bacilles disposés parallèlement les uns aux autres.

La diphtérie peut être pure ou associée. L'association streptococcienne est plus grave que la diphtérie pure.

La sérothérapie a fait tomber la mortalité par diphtérie de 50 °/o à 15 °/o et même à moins de 5 °/o, si le traitement est entrepris dans les quarante-huit premières heures.

Des recherches récentes et qui se continuent à l'Institut Pasteur permettent de croire que l'on aura bientôt un sérum antistreptococcique, et l'on sera ainsi armé pour combattre toutes les angines pseudo-membraneuses.

Enfin, M. le Dr Derville, professeur suppléant à la Faculté libre de Lille, a présenté un travail sur le traitement des tubercules isolés du lupus par la dilacération suivie d'applications de chlorure de zinc. Il creuse à l'aide du scarificateur de Vidal, auquel il imprime un mouvement de rotation rapide, une petite cavité qu'il remplit d'un cristal de chlorure de zinc. Malheureusement, ce procédé laisse après la chute de l'eschare une cicatrice difforme. Il donne naissance à du tissu scléreux, ce qui peut avoir un grand inconvénient quand la production de ce tissu a lieu dans le voisinage des orifices naturels.

Ces diverses communications paraîtront *in extenso* comme mémoires dans les *Annales*, 2e partie.

Après avoir pris connaissance de ces travaux, la section de médecine s'est rendue à l'asile des aliénés de Tournai dont elle a pu admirer les constructions spacieuses, la bonne hygiène des salles, l'atmosphère d'ordre et de propreté qui y règne partout, les innombrables fleurs et plantes vertes que l'on y a réunies pour égayer un séjour où la vue de tant de malheureux inspire naturellement des pensées pleines de mélancolie.

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE.

L'assemblée générale a eu lieu, comme celle des sections, au collège Notre-Dame. Elle est présidée par Mgr Du Rousseaux, évêque de Tournai, ayant à sa droite M. R. du Sart, gouverneur du Hainaut, à sa gauche M. E. Vicaire, président de la Société pendant l'année 1895-1896.

Il y avait dans l'assemblée un grand nombre de notabilités du clergé, de la magistrature, de l'armée, des médecins et des ingénieurs, plusieurs professeurs des Facultés des sciences et de médecine de l'Université catholique de Lille, et en outre quelques dames.

M. Mansion expose d'abord en quelques mots l'origine, le but et les travaux de la *Société scientifique de Bruxelles*. Il fait ressortir en particulier le rôle prépondérant que le R. P. Carbonnelle, S. J., un Tournaisien, a eu dans la fondation et dans la direction de la Société pendant ses quatorze premières années. Il termine en faisant appel à de nouveaux dévouements pour soutenir l'œuvre si nécessaire de l'union de la science et de la foi, entreprise par la Société scientifique.

M. Maurice Lefebvre, docteur en sciences naturelles, professeur au collège Saint-Joseph, à Virton, fait ensuite la conférence annoncée sur *Les Venins.*

Le conférencier élucide d'abord une question de mots : pour distinguer les venins des poisons et des virus, il propose d'appeler venin un produit de sécrétion toxique dont certains organismes sont pourvus pour l'attaque ou pour la défense.

L'origine des venins est donc dans certains organismes, et ceux-ci méritent d'être étudiés. M. Lefebvre fait défiler dans une description rapide les types d'organismes venimeux les plus intéressants du règne végétal et du règne animal, depuis l'ortie jusqu'au scorpion et au terrible serpent à lunettes; dans cette revue, il expose quelques modèles particulièrement curieux d'appareils à venin, parmi lesquels ceux de l'abeille et de la nèpe présentent d'admirables mécanismes, encore peu connus : celui de l'abeille, décrit il y a peu d'années par Carlet; celui de la nèpe, objet des recherches personnelles du conférencier.

Les effets pathologiques des venins occupent ensuite l'attention de l'auditoire : différant avec les divers venins, ils se manifestent sur le cœur sous l'action du venin du crapaud, qui est un alcaloïde paralysant; sur le cerveau, dans le cas d'envenimation par le scorpion; sur l'appareil vaso-moteur, lorsqu'il s'agit des morsures de serpents, etc.

L'étude de la nature des venins donne lieu à des remarques du plus haut intérêt, surtout au point de vue des analogies entre les venins et les virus. M. Lefebvre résume à ce propos les découvertes récentes dues surtout à MM. Phisalix et Bertrand, et il émet l'hypothèse que l'action de l'*échidnotoxine,* l'un des principes du venin des serpents, ainsi que celles des albumines toxiques d'origine microbique, pourraient bien n'être qu'une simple combinaison chimique, d'une très grande stabilité, entre ces substances toxiques et les albumines du sang; diverses considérations, tirées d'expériences récentes, favorisent cette manière de voir.

Enfin, envisageant le côté pratique de son sujet, le conférencier retrace l'histoire des remèdes préconisés contre les enveni-

mations; aucun d'entre eux, jusqu'aujourd'hui, ne donne de résultat satisfaisant, mais tout fait espérer que les recherches de MM. Phisalix et Bertrand aboutiront à la découverte d'un vaccin anti-venimeux puissant.

Après cette conférence, M. Vicaire remercie tous ceux qui ont bien voulu contribuer au succès de la session de la Société scientifique à Tournai : M[gr] Du Roussaux; M. le Gouverneur de la province; les RR. PP. Jésuites, qui lui ont donné l'hospitalité; les professeurs de l'Université de Lille, qui lui ont apporté de savantes communications; M. Lentz, qui a fait à la quatrième section les honneurs de l'établissement qu'il dirige d'une manière si distinguée; le savant conférencier que l'on vient d'entendre; enfin tous ceux qui ont bien voulu donner à la Société un témoignage de sympathie en assistant à l'assemblée générale.

M. Vicaire rappelle ensuite en quelques mots la perte immense que la science vient de faire en la personne de Louis Pasteur et se fait l'organe de la Société scientifique tout entière en exprimant les vifs regrets que lui cause la mort du plus éminent de ses membres d'honneur. (Adhésions unanimes.)

Monseigneur l'évêque de Tournai répond en quelques mots à M. Vicaire et le remercie à son tour de n'avoir pas reculé devant un long et pénible voyage pour venir assister à la séance de ce jour; puis il prononce l'allocution suivante :

Messieurs,

En voyant ici de nombreux représentants de la science contemporaine, de cette science dont l'impiété voudrait se faire un instrument pour renverser l'édifice des dogmes catholiques, notre pensée se reporte tout naturellement aux paroles du Concile du Vatican que notre Société a choisies pour devise : « Jamais il ne peut y avoir de véritable désaccord entre la foi et la raison. »

Votre présence ici est une éloquente démonstration de cette vérité. Vous n'êtes point restés étrangers aux conquêtes scienti-

fiques dont notre époque est légitimement fière. Dans ce domaine comme dans tant d'autres, vous avez voulu être les premiers, et si, après les études auxquelles vous avez consacré tous vos instants, alors que la science moderne n'a plus de secrets pour vous, vous demeurez les fidèles enfants de l'Église catholique, c'est, à n'en pas douter, qu'à votre jugement il n'y a point d'opposition entre vos croyances et les conclusions scientifiques auxquelles vous êtes parvenus. Il serait en effet tout aussi déraisonnable de suspecter votre sincérité, que d'attribuer à je ne sais quels préjugés la fermeté de vos convictions religieuses. Il faudrait pour cela affirmer que, doués d'une incontestable supériorité sur le terrain des sciences, vous cessez d'être les mêmes dès qu'il s'agit de religion, et qu'après avoir, au prix d'incessantes fatigues, élargi le cercle des connaissances humaines, vous acceptez, sans même vouloir en faire l'examen raisonné, des doctrines qui contredisent toutes les données de votre science. Ce serait là, Messieurs, une aberration tellement étrange, que nul ne peut vous l'imputer; aussi suis-je en droit de conclure qu'en assistant à cette assemblée de la Société scientifique, vous entendez proclamer bien haut qu'il ne peut y avoir de véritable désaccord entre la foi et la raison.

Le Dieu qui s'est révélé aux humbles et aux petits est aussi le *Maître des sciences* (*). La foi et la raison viennent toutes deux de lui et toutes deux elles doivent conduire à lui. Le rôle de la science ne consiste-t-il pas à retrouver dans les créatures l'empreinte de la Divinité, à rechercher les vestiges de cette sagesse que Dieu a répandue sur toutes ses œuvres, à procurer enfin à Dieu cette gloire extérieure pour laquelle il a tout créé? Oui, s'il a livré à nos investigations le monde tout entier, c'est pour que les créatures soient comme autant de degrés par lesquels l'intelligence remontera jusqu'au Créateur, dont elle connaîtra mieux les infinies perfections sans parvenir jamais à les comprendre d'une manière adéquate. C'est pour cela que, loin

(*) I. Reg. 2, 3.

de s'effrayer des progrès toujours croissants de la science, l'Église les encourage, puisqu'ils aboutissent à perfectionner la connaissance de Dieu à laquelle l'homme peut prétendre ici-bas.

Ce ne sont point les mystères qui détourneront de Dieu le véritable savant : n'est-il pas accoutumé à en rencontrer pour ainsi dire à chaque pas? Et à côté des certitudes que la science lui donne, n'y a-t-il pas de graves questions où elle le laisse aux prises avec le doute et l'incertitude? Naguère encore — l'expression est devenue célèbre — on constatait la banqueroute de la science; elle avait, disait-on, failli à toutes ses promesses, parce qu'elle ne pouvait donner à l'humanité la solution des problèmes qui l'intéressent le plus vivement. Mais, Messieurs, je ne saurais admettre pareille assertion.

La fausse science a pu seule faire banqueroute et faillir à toutes ses promesses, et quand j'examine, fût-ce même superficiellement, les nombreux systèmes élaborés par ses adeptes pour résoudre la grande question de l'origine et de la destinée de l'homme, je ne puis m'empêcher de songer à ces paroles de Bossuet : « Les absurdités où ils tombent en niant la religion, deviennent plus insoutenables que les vérités mêmes dont la grandeur les étonne, et pour ne pas vouloir croire des mystères incompréhensibles, ils suivent l'une après l'autre d'incompréhensibles erreurs (*). »

Tel n'est point, Messieurs, le sort réservé à la vraie science, à celle qui s'incline devant la parole révélée sans pour cela s'interdire les investigations et les recherches. Elle peut aborder sans crainte les problèmes les plus arides, car la colonne de feu guide ses pas dans le désert. Loin d'entraver sa marche, la foi est toujours là pour la mettre en garde contre toutes les surprises de l'orgueil, pour lui inspirer une salutaire défiance d'elle-même et l'aider à discerner toujours ce que les faux savants confondent si aisément, le domaine de l'hypothèse et celui de la vérité acquise.

(*) Oraison funèbre d'Anne Gonzague de Clèves.

Voilà, Messieurs, la science dont vous êtes les dignes représentants, et c'est à ce titre que je suis heureux et fier de vous saluer aujourd'hui. Puisse le Seigneur bénir et féconder les travaux de votre Société, puisse-t-il vous conserver vous-mêmes dans les dispositions qu'apportait à ses études le grand précurseur de la philosophie scolastique, saint Anselme, lorsqu'au début même de ses œuvres il disait : Je ne cherche pas à comprendre pour croire, mais je crois pour comprendre : « *Non quaero intelligere ut credam, sed credo ut intelligam* (*). »

D'unanimes applaudissements accueillent ces paroles de Mgr Du Roussaux.

La séance est levée à cinq heures.

(*) *Proslogium*, cap. I.

SESSION DU JEUDI 30 JANVIER 1896

A BRUXELLES.

SÉANCE DES SECTIONS

Première section.

—

M. E. Vicaire présente la note suivante : *Sur la nécessité du mouvement absolu en mécanique.*

La discussion qui a eu lieu dans la première section de la Société scientifique, lors de sa session d'octobre 1895, à Tournai, nous a mis à peu près d'accord, M. Mansion et moi, sur la véritable conception de la mécanique et sur la manière d'en comprendre les principes. Mais notre savant confrère a maintenu énergiquement son point de vue relativiste quant à la conception du mouvement. « *Se mouvoir* est, dit-il, un terme essentiellement relatif. Le mouvement de n points est complètement décrit quand on donne à chaque instant les $\frac{1}{2}n(n-1)$ distances de ces points. »

Je voudrais faire une nouvelle tentative pour le convaincre de son erreur.

Pour que la proposition de M. Mansion soit vraie, même à un point de vue purement cinématique, il faut, bien entendu, que les n points considérés constituent à eux seuls tout l'univers matériel. Autrement, la connaissance des distances mutuelles à tout instant donnerait seulement la loi de déformation du système et non celle de son déplacement par rapport à d'autres corps.

Je dis que, même dans ce cas, la proposition n'est pas exacte au point de vue mécanique; tout au moins, elle ne peut se concilier avec les faits que moyennant des hypothèses peu vraisemblables.

Considérons un système de corps qui a été parfaitement étudié, aussi bien par la théorie que par l'observation, le système solaire, dans lequel nous supposerons que chacun des corps puisse être assimilé à un point matériel. Les étoiles n'exercent sur lui aucune force appréciable, et si nous les supposons éteintes ou masquées, ou simplement, si nous nous interdisons de les observer, nous rentrons dans le cas prévu : nous opérons sur un système qui n'a, au moins pratiquement, aucune relation mécanique ou géométrique avec quoi que ce soit en dehors de lui.

Pour étudier expérimentalement ce système, nous n'avons rien de mieux à faire que de supposer fixe l'un quelconque des points, la Terre par exemple, ainsi que la droite passant par ce point et par l'un des autres, tel que le Soleil, et enfin le plan mené par cette droite et par un troisième point, soit Jupiter, le tout choisi uniquement par la considération de la plus grande commodité.

Ce point, cette droite et ce plan déterminent un système d'axes rectangulaires auxquels nous pouvons rapporter les positions des planètes. Si nous avons le moyen de mesurer à tout instant leurs distances mutuelles, nous en déduirons les coordonnées et nous pourrons former des tables donnant pour toute époque la position de chacun des astres. La description du mouvement sera complète au point de vue cinématique.

Il est vrai qu'en fait, les moyens par lesquels nous déterminons les distances ne sont pas indépendants de la loi de l'attraction ; mais il suffit pour ce qui va suivre que l'exactitude très approchée de ces distances ne soit pas contestée.

Il s'agit maintenant de trouver la loi de ces mouvements, la formule qui les relie. Pour cela, nous allons employer une méthode de synthèse.

Nous admettons que les corps considérés s'attirent suivant la loi newtonienne et nous cherchons, d'après les théories de la mécanique, les équations de leurs mouvements rapportés à trois axes de direction fixe, ou au moins *supposée fixe* jusqu'à nouvel ordre, et passant par le centre de gravité du système.

Pour le corps de rang i, dont la masse est m_i, nous avons trois équations telles que la suivante :

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{d^2x_i}{dt^2} = \sum_k \frac{fm_k(x_k - x_i)}{r_{k,i}^3}, \quad k = 1, 2, \ldots i-1, i+1, \ldots n, \\ & r_{k,i} = \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2}, \end{aligned} \right.$$

f est la constante de l'attraction.

Intégrons ces $3n$ équations. Nous ne pouvons le faire que par approximation, en profitant des particularités que présente le système solaire; mais rien ne nous empêche d'essayer, à titre d'hypothèse, de reconstituer notre système avec ces particularités, notamment d'employer pour les masses les valeurs admises par les astronomes.

Les équations intégrales contiennent $6n$ constantes arbitraires que nous déterminerons aussi à l'aide des valeurs admises par les astronomes pour les éléments des orbites planétaires. Les formules sont alors complètement réduites en nombres; elles nous permettent de calculer pour toute époque les coordonnées rectangulaires de chaque planète.

Pour comparer ces coordonnées avec celles qu'a fournies l'observation, il faut les rapporter à une même origine. Par exemple, je transporte parallèlement à eux-mêmes, au centre de gravité déterminé à l'aide de l'hypothèse faite sur les masses, les axes des coordonnées observées.

Une dernière transformation reste à opérer : c'est de faire coïncider en direction les axes des coordonnées calculées avec ceux des coordonnées observées, ce que je puis toujours faire au moins pour une époque donnée prise comme initiale; j'opère à cet effet, au moyen des méthodes connues, sur les coordonnées calculées.

Ceci fait, je constate, pour l'époque initiale, une coïncidence complète entre les deux séries de coordonnées. Mais cette coïncidence disparaît aussitôt et des écarts croissants se manifestent.

Au contraire, si au lieu de comparer directement entre elles les coordonnées, je me sers seulement de celles-ci pour calculer

les positions relatives des astres, leurs distances angulaires ou linéaires, je trouve une coïncidence parfaite entre le calcul et l'observation.

Ainsi, mes hypothèses rendent parfaitement compte des mouvements relatifs des astres; comme ces mouvements relatifs seuls sont abordables à l'observation, il y a là une vérification complète de ces hypothèses qui comprennent non seulement la loi de l'attraction, les valeurs admises pour les masses et pour les données qui caractérisent l'état initial du système, mais aussi les principes de la mécanique et, en particulier, l'hypothèse du mouvement absolu que j'ai invoquée explicitement pour établir les équations différentielles (1).

Ce n'est toutefois qu'une vérification; voyons jusqu'à quel point elle est décisive en ce qui concerne cette dernière question.

Les axes qualifiés de fixes auxquels sont rapportées les coordonnées des équations (1) occupent dans l'espace des positions bien déterminées par rapport aux planètes. Par exemple, l'axe des x forme des angles connus avec les rayons vecteurs passant par Jupiter et par la Terre; un observateur placé au centre de gravité, origine des axes, pourrait donc en déterminer la position dans le ciel. L'expérience prouve qu'ils ne coïncident pas d'une manière continue avec les axes d'observation, parallèles à ceux que nous avions déterminés au moyen de la Terre, du Soleil et de Jupiter, et la coïncidence établie à l'époque initiale prouve que ce fait ne résulte pas des valeurs attribuées aux constantes d'intégrations. Ce sont donc bien les équations différentielles elles-mêmes qui ne peuvent pas être vérifiées par des coordonnées rapportées à ces axes d'observation.

Au contraire, nous savons par la théorie que si elles sont vérifiées pour certains axes, elles le seront aussi pour tout système d'axes qui occupe une position invariable par rapport au premier.

La même théorie nous explique pourquoi elles ne peuvent l'être pour aucun système d'axes ne remplissant pas cette condition. Car l'accélération relative à ce système s'obtient, ainsi que Coriolis l'a montré, en composant l'accélération absolue, donnée

par les seconds membres des équations (1), avec l'accélération d'entraînement prise en sens contraire et avec l'accélération centrifuge composée.

En partant de là, on trouve aisément que si l'on désigne par p, q, r les composantes, suivant les nouveaux axes, de la rotation du système de ces axes par rapport à ceux qualifiés de fixes, auxquels s'appliquent les équations (1), les équations différentielles du mouvement rapporté à ces nouveaux axes seront pareilles à celles-ci :

$$(2) \quad . \quad . \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2 x_i}{dt^2} + 2\left(q\frac{dz_i}{dt} - r\frac{dy_i}{dt}\right) \\ &-(q^2 + r^2)x_i + \left(pq - \frac{dr}{dt}\right)y_i + \left(pr + \frac{dq}{dt}\right)z_i \\ &= \sum \frac{fm_k(x_k - x_i)}{r^3_{k,i}}. \end{aligned} \right.$$

p, q, r sont, ou des fonctions explicites du temps données *à priori*, ou des fonctions de certaines coordonnées, comme il arriverait dans le cas des axes d'observation envisagés ci-dessus.

L'intégration, même approximative, de ces équations ne serait sans doute pas facile; mais on peut les vérifier *à posteriori* lorsqu'on connaît à tout instant la position des axes par rapport à un système fixe.

Ainsi cette notion de fixité (en direction) que nous avons introduite dans notre mise en équations avec son acception vulgaire, si elle n'est pas actuellement vérifiable dans cette acception, se trouve au moins correspondre à un fait expérimental : il y a des systèmes d'axes par rapport auxquels les mouvements planétaires satisfont aux équations (1), et d'autres pour lesquels il faut recourir aux équations (2).

Prenant ce fait comme définition provisoire, nous conviendrons d'appeler les premiers axes fixes, et les autres axes mobiles.

Tous les systèmes fixes en ce sens occupent des positions invariables les uns par rapport aux autres, et des positions variables par rapport aux systèmes mobiles, comme cela aurait lieu avec la signification usuelle des mots.

Ce que nous venons de dire pour le système planétaire, nous pourrions le répéter, en termes exactement parallèles, pour le mouvement de la Terre autour de son centre de gravité, pour celui du gyroscope de Foucault ou du barogyroscope de Gilbert, pour celui du pendule de Foucault. Pour chacun de ces mouvements, nous trouverions des systèmes d'axes par rapport auxquels se vérifient les équations établies pour des axes fixes, dans l'hypothèse du mouvement absolu, et d'autres par rapport auxquels elles ne se vérifient pas.

Il y a plus. Si nous observons simultanément ces divers mouvements, nous reconnaîtrons que les axes qui se comportent comme fixes pour l'un d'eux jouissent de la même propriété pour les autres. Nouvelle concordance avec la notion vulgaire de fixité, concordance bien remarquable puisqu'elle se produit entre des phénomènes qui semblent n'avoir aucune relation entre eux.

Voilà donc un ensemble considérable de faits, disons mieux, l'ensemble de tous les faits suffisamment précis de la mécanique, qui se montrent en parfait accord avec l'hypothèse du mouvement absolu.

Comment les concilier avec celle de la relativité du mouvement ? Je n'en vois guère le moyen. Si l'on peut comprendre à la rigueur que certains axes jouissent, par rapport à un ensemble de corps, de propriétés spéciales, comme en ont, par exemple, les axes principaux d'inertie, on comprend moins que ces propriétés puissent s'étendre à tous les axes formant avec les premiers des angles invariables, et l'on ne comprend plus du tout qu'elles s'étendent à des axes déterminés par un système de corps entièrement indépendant du premier.

Il importe de remarquer que cette notion expérimentale de la fixité et ces vérifications sont obtenues sans aucun recours aux étoiles. Tout ce que nous avons dit s'appliquerait alors même que les étoiles ne seraient pas observables. Mais nous obtiendrons une nouvelle vérification, plus frappante encore, si nous supposons écarté l'écran fictif qui nous les cachait.

Nous constatons alors, en effet, que nos axes fixes sont réellement fixes, au sens habituel du mot, par rapport aux étoiles ; ils

n'éprouvent par rapport à elles, ou celles-ci n'éprouvent par rapport à eux que des déplacements extrêmement lents, très inégaux de l'une à l'autre ; c'est ce qu'on appelle les mouvements propres des étoiles. Les axes dits mobiles se déplacent plus ou moins rapidement dans le ciel étoilé.

Ce nouveau fait permet de présenter sous une forme bien concrète l'inexactitude de l'énoncé de M. Mansion. Supposons, en effet, que, sans aucun changement dans les mouvements relatifs des planètes et du Soleil, l'ensemble du système prenne un mouvement tel que l'axe de l'écliptique, au lieu de rester presque immobile dans le ciel, en fasse le tour en un an. Rien ne serait changé aux $\frac{1}{2}n(n-1)$ distances, et cependant il y aurait certes un changement considérable dans la loi du mouvement, dans les forces qui le déterminent, dans les équations qui le régissent.

Ce fait est d'ailleurs en parfaite harmonie avec l'hypothèse du mouvement absolu.

Il est bien vrai, nous le savons, que les étoiles ne sont pas véritablement fixes. Mais nous savons aussi qu'elles sont très loin, et cela suffit pour qu'elles se comportent à peu près comme des points fixes. C'est ainsi qu'en pleine mer, lorsque plusieurs bateaux, tous en mouvement, sont en vue les uns des autres, ceux qui sont très loin de l'observateur peuvent lui servir comme de repères fixes pour observer de combien il tourne sur lui-même ou comment se modifie sa position par rapport à des objets rapprochés ; le temps pendant lequel on peut pratiquement les regarder comme fixes dépend de leur distance, de leur vitesse propre, du degré de précision dont on a besoin.

Ainsi, la fixité approchée par rapport aux étoiles résulte de la petitesse des mouvements angulaires de celles-ci, conséquence de leur immense éloignement. Elle n'est qu'un fait accidentel : les axes fixes et les étoiles n'ont les uns par rapport aux autres que des déplacements extrêmement faibles parce que les uns et les autres sont fixes absolument ou à peu près.

Toutefois, l'intervention des étoiles dans la question fournit un moyen, le seul qui reste, ce me semble, d'expliquer, dans le

système relativiste, les coïncidences que nous avons signalées. C'est d'admettre que cette immobilité relative des axes fixes par rapport aux étoiles, au lieu d'être un fait accidentel, est un fait essentiel : ce serait parce qu'ils sont immobiles par rapport aux étoiles que les axes fixes jouissent des propriétés que nous leur avons reconnues dans le mouvement des corps.

En d'autres termes, l'énoncé de M. Mansion, inexact quand on considère séparément le système solaire ou tout autre système partiel, deviendrait exact à la condition de comprendre nécessairement les étoiles parmi les *n* corps auxquels il s'applique.

J'ai montré dans un précédent travail (*) qu'il ne paraît pas impossible de soumettre cette thèse au contrôle de l'expérience par une étude sur les mouvements propres des étoiles, étude qui la renverserait complètement si elle concluait d'une certaine manière, sans toutefois la démontrer ou même la rendre sensiblement plus vraisemblable si elle concluait à l'opposé.

Jusqu'à ce que ce travail soit fait, je reconnais bien volontiers qu'il n'est pas possible d'opposer autre chose que des vraisemblances à la proposition de M. Mansion ainsi comprise. Elle reste gratuite; on ne peut pas dire qu'elle soit impossible.

On pourrait se demander ce que signifie la notion de fixité par rapport à un système éminemment variable et déformable comme celui des étoiles. On répondrait que l'immobilité a lieu par rapport au système des axes principaux d'inertie de l'univers ou par rapport à quelque autre système de comparaison déterminée d'une manière analogue.

On pourrait se demander aussi comment, sans faire intervenir les étoiles dans nos raisonnements, sans nous préoccuper d'elles en aucune façon, nous avons pu obtenir un système d'équations, les équations (1), qui n'est exact que pour des axes déterminés par les étoiles.

On répondrait que celles-ci sont intervenues dans nos calculs

(*) *Sur la réalité de l'espace et le mouvement absolu* (ANN. DE LA SOC. SCIENTIF. DE BRUX., t. XVIII, 1894, 2e partie p. 297

d'une manière implicite et en quelque sorte latente, parce qu'elles constituent le système de comparaison essentiel par rapport auquel se vérifie le principe de l'inertie, base de tous nos raisonnements.

Tout cela peut se soutenir, mais, ainsi que je l'ai déjà fait observer dans le travail précité, pour que ce système de comparaison détermine les corps à se mouvoir d'une manière plutôt que d'une autre, il ne suffit pas qu'il fournisse *géométriquement* des directions, il faut qu'il agisse *physiquement* sur les corps. Il faut donc attribuer aux étoiles cette action physique, et nous tombons forcément dans le système d'Ernest Mach, que j'ai rappelé d'après Streintz : « Les corps célestes lointains, qui n'ont aucune influence sur les accélérations des corps du système solaire, en ont une sur les vitesses. » Et cette influence doit l'emporter absolument sur celle des corps rapprochés.

Ainsi donc, pas de milieu : il faut admettre, ou bien l'hypothèse de directions fixes absolues, qui rend compte de tout d'une manière si simple, qui est si naturelle à l'esprit et qui a été admise implicitement et, en quelque sorte, instinctivement dans tous les travaux de mécanique, ou bien l'hypothèse de Mach, avec cette action à distance qui ne décroît pas, qui augmente peut-être par l'éloignement. Le système de Mach est bien, comme je l'ai dit, le dernier refuge du relativisme. Et dans quel but accepterait-on cette conception étrange? Uniquement pour accommoder la science à un dogme relativiste posé *à priori* d'une façon entièrement arbitraire. Pour moi, je n'hésite pas, mon choix est fait.

Je me suis, dans ce qui précède, placé à un point de vue exclusivement expérimental. J'ai montré qu'après avoir étudié les mouvements d'une manière géométrique, par l'observation des distances des corps entre eux, on est amené, lorsqu'on veut s'en rendre compte mécaniquement, par la considération des forces, à faire intervenir des directions fixes, indépendantes des corps en mouvement. Cela ne conduit pas tout à fait au mouvement absolu, mais seulement à la rotation absolue. Expérimentalement, on ne peut pas aller plus loin. Dans mon mémoire sur

la réalité de l'espace, j'ai montré (*loc. cit.*, p. 303) comment, de là, on est conduit logiquement au mouvement absolu. J'ai exposé aussi des raisons philosophiques qui militent en faveur du mouvement absolu, notamment la considération de l'énergie.

Le mouvement absolu conduit logiquement à la réalité de l'espace. Cette action directrice que, dans le système relativiste, on doit, de toute nécessité, attribuer aux étoiles, il faut bien, dans le système absolu, qu'elle soit exercée par quelque chose, et cette action, toute physique, ne peut être exercée que par un être réel. Cet être réel, qui agit ainsi dans tous les lieux accessibles aux corps, c'est l'espace.

L'espace réel a d'ailleurs sa raison d'être philosophique, indépendamment même du caractère absolu du mouvement, de sorte que ces deux conceptions, celle du mouvement absolu et celle de l'espace réel, se soutiennent mutuellement.

Je ne veux pas revenir ici, à cet égard, sur ce que j'ai exposé dans le mémoire déjà plusieurs fois cité. Je voudrais seulement faire observer que l'espace réel fournit peut-être un terrain de conciliation à offrir aux relativistes. Grâce à lui, le mouvement absolu conserve encore un caractère relatif; c'est toujours un déplacement par rapport à quelque chose et à quelque chose de réel; seulement ce quelque chose n'est pas de la matière. L'espace réel répond ainsi à un véritable besoin de l'esprit; il suffit, ce me semble, à le satisfaire.

Nous n'observons le mouvement, au moins d'une manière directe, que sous la forme d'un déplacement relatif des corps, des parties de la matière. En conclure que c'est là son essence, qu'il n'y a pas autre chose en lui, c'est, à mon avis, se confiner dans un empirisme excessif et étroit. La continuité de l'espace ne nous permet d'en saisir la présence et de l'observer que par l'intermédiaire d'agents matériels. Le nier par ce motif ne serait pas plus justifié que de nier l'âme de notre voisin parce que nous ne pouvons l'observer aussi que par l'intermédiaire de la matière. Avant de nous prononcer sur ces questions, il faut analyser rationnellement les faits. C'est une partie de cette analyse que j'ai essayé de présenter dans ce qui précède.

M. Mansion fait observer que si l'on prend pour coordonnées des points du système solaire les distances de ces points à quatre points d'un solide terrestre invariable, on peut décrire tous les mouvements du système considéré; la description serait plus compliquée que celle dont parle M. Vicaire, mais elle serait tout aussi complète. Inversement, que de mouvements de systèmes terrestres dont la description par rapport aux axes fixes de M. Vicaire serait plus compliquée que la description par rapport aux quatre points dont nous parlons !

M. Ch.-J. de la Vallée Poussin communique à la section la note suivante : *Sur la série de Lambert.*

1. La série de Lambert est la suivante :

$$\sum_1^{\infty} \frac{q^m}{1-q^m} = \frac{q}{1-q} + \frac{q^2}{1-q^2} + \frac{q^3}{1-q^3} + \cdots$$

Cette série est étroitement liée à celles que Jacobi a introduites dans la théorie des fonctions elliptiques, et cette dépendance permet d'exprimer d'un grand nombre de manières la somme de la série par des intégrales définies.

Nous croyons utile d'appeler l'attention sur ces résultats, parce qu'ils nous paraissent devoir être le point de départ nécessaire de toute recherche sur cette série.

2. Rappelons d'abord quelques relations auxiliaires qui vont nous être utiles. On a (*)

$$e^{\theta i} + e^{3\theta i} + e^{5\theta i} + \cdots + e^{(2n-1)\theta i} = \frac{\sin n\theta}{\sin\theta} e^{n\theta i},$$

d'où

$$e^{\theta i(1-n)} + e^{\theta i(3-n)} + \cdots + e^{(n-1)\theta i} = \frac{\sin n\theta}{\sin\theta},$$

(*) Voir Gilbert, *Cours d'analyse*, 4e édition, p. 310.

et, en changeant n en $2n+1$,

$$\frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta} = 1 + (e^{2\theta i} + e^{-2\theta i}) + (e^{4\theta i} + e^{-4\theta i}) + \cdots + e^{2n\theta i} + e^{-2n\theta i}),$$

c'est-à-dire

$$(1) \quad . \quad . \quad \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta} = 1 + 2(\cos 2\theta + \cos 4\theta + \cdots + \cos 2n\theta).$$

On a d'ailleurs

$$\frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta} = \sin 2n\theta \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \cos 2n\theta,$$

par suite aussi

$$(2) \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{aligned} &\sin(2n\theta)\cot\theta = 1 - \cos 2n\theta \\ &+ 2\left[\cos 2\theta + \cos 4\theta + \cdots + \cos(2n-2)\theta\right]. \end{aligned} \right.$$

Les relations (1) et (2) nous permettent de calculer aisément les valeurs des intégrales définies correspondantes

$$(\alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta} d\theta = \frac{\pi}{2},$$

$$(\beta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2n\theta)\cot\theta d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Si l'on change θ en $\frac{\pi}{2} - \theta$ dans ces intégrales, il vient

$$(\alpha') \quad . \quad . \quad . \quad . \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n+1)\theta}{\cos\theta} d\theta = (-1)^n \frac{\pi}{2},$$

$$(\beta') \quad . \quad . \quad . \quad . \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2n\theta)\operatorname{tg}\theta d\theta = (-1)^{n-1} \frac{\pi}{2}.$$

3. *Sommation de la série de Lambert par des intégrales des fonctions* θ_1 *et* θ_2 *de Jacobi.* On a (*)

$$\log \theta_1(x) = \log(2q^{\frac{1}{4}} \sin x) - \sum_r \frac{1}{r} \frac{q^{2r}}{1-q^{2r}} - 2\sum_r \frac{1}{r} \frac{q^{2r}}{1-q^{2r}} \cos 2rx,$$

$$\log \theta_2(x) = \log(2q^{\frac{1}{4}} \cos x) - \sum_r \frac{1}{r} \frac{q^{2r}}{1-q^{2r}} - 2\sum_r \frac{(-1)^r}{r} \frac{q^{2r}}{1-q^{2r}} \cos 2rx.$$

En différentiant par rapport à x, on trouve

$$\frac{\theta_1'(x)}{\theta_1(x)} - \cot x = 4\sum \frac{q^{2r}}{1-q^{2r}} \sin 2rx,$$

$$\frac{\theta_2'(x)}{\theta_2(x)} + \operatorname{tg} x = 4\sum (-1)^r \frac{q^{2r}}{1-q^{2r}} \sin 2rx;$$

d'où, par la formule (β),

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\theta_1'(x)}{\theta_1(x)} - \cot x\right) \cot x\, dx = 2\pi \sum_{r=1}^{\infty} \frac{q^{2r}}{1-q^{2r}},$$

et par la formule (β'),

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\theta_2'(x)}{\theta_2(x)} + \operatorname{tg} x\right) \operatorname{tg} x\, dx = 2\pi \sum_{r=1}^{\infty} \frac{q^{2r}}{1-q^{2r}}.$$

Ces deux expressions sont les plus simples que nous ayons obtenues pour représenter la série de Lambert. Les autres fonctions θ peuvent servir au même usage, mais conduisent, comme nous allons voir, à des résultats moins élégants.

4. *Sommation de la série de Lambert par des intégrales des fonctions* θ *et* θ_3 *de Jacobi.* On a

$$\log \theta(x) = -\sum_r \frac{1}{r} \frac{q^{2r}}{1-q^{2r}} - 2\sum_r \frac{1}{r} \frac{q^r}{1-q^{2r}} \cos 2rx,$$

(*) Voir, par exemple, ENNEPER. *Elliptische Functionen Theorie und Geschichte*, Zweite Auflage. Halle, 1890. p. 174.

d'où, en différentiant par rapport à x,

$$\frac{\theta'(x)}{\theta(x)} = 4\sum_r \frac{q^r}{1-q^{2r}} \sin 2rx,$$

puis, en multipliant membre à membre avec l'égalité (*)

$$\frac{q \sin 2x}{1 - 2q \cos 2x + q^2} = q \sin 2x + q^2 \sin 4x + q^3 \sin 6x + \cdots$$

et intégrant par rapport à x,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\theta'(x)}{\theta(x)} \frac{q \sin 2x}{1 - 2q \cos 2x + q^2} dx = \pi \sum_r \frac{q^{2r}}{1-q^{2r}},$$

et par le changement de q en $-q$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\theta_3'(x)}{\theta_3(x)} \frac{q \sin 2x}{1 + 2q \cos 2x + q^2} dx = -\pi \sum_r \frac{q^{2r}}{1-q^{2r}}.$$

5. *Sommation de la série de Lambert par les fonctions* ζu *et* pu *de Weierstrass.* Ces formules sont équivalentes à la première des formules du n° 3, mais il est aussi simple de les obtenir directement.

On a (**), en posant pour abréger $\nu = \frac{u}{2\omega_1}$,

$$\zeta u = \frac{1}{2\omega_1}\left(4\eta_1\omega_1\nu + \pi \cot \pi\nu + 4\pi \sum_1^\infty \frac{q^{2m}}{1-q^{2m}} \sin 2m\pi\nu\right),$$

d'où, en posant $\pi\nu = x$,

$$\frac{2\omega_1}{\pi} \zeta\left(\frac{2\omega_1}{\pi} x\right) - \cot x = \frac{4\eta_1\omega_1}{\pi^2} x + 4\sum \frac{q^{2m}}{1-q^{2m}} \sin 2mx,$$

(*) Cette formule s'obtient en différentiant la formule correspondante du n° 6.

(**) JORDAN, *Cours d'analyse de l'École polytechnique*, 2e édition (1894), t. II, p. 454.

et, par la formule (β),

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{2\omega_1}{\pi}\zeta\left(\frac{2\omega_1}{\pi}x\right) - \cot x\right]\cot x\,dx = \frac{4\eta_1\omega_1}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cot x\,dx + 2\pi\sum_1^{\infty}\frac{q^{2m}}{1-q^{2m}}.$$

Mais on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cot x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x.dl\sin x = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} l\sin x\,dx = \frac{\pi l2}{2}\ (*)$$

et, par conséquent,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{2\omega_1}{\pi}\zeta\left(\frac{2\omega_1}{\pi}x\right) - \cot x\right]\cot x\,dx = 2l2\,\frac{\eta_1\omega_1}{\pi} + 2\pi\sum_1^{\infty}\frac{q^{2m}}{1-q^{2m}}.$$

Si, pour simplifier, on construit la fonction ζu avec les périodes $2\omega_1 = \pi$ et $2\omega_2$, la formule se réduit à

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\zeta u - \cot u)\cot u\,du = \eta_1 l2 + 2\pi\sum_1^{\infty}\frac{q^{2m}}{1-q^{2m}}.$$

Par une intégration par parties on trouve, toujours dans l'hypothèse $2\omega_1 = \pi$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(pu - \frac{1}{\sin^2 u}\right) l(\sin u)\,du = \eta_1 l2 + 2\pi\sum_1^{\infty}\frac{q^{2m}}{1-q^{2m}}.$$

6. *Sommation de la série de Lambert au moyen de la fonction* $\operatorname{sn} x$. Cette formule est équivalente à celles du n° 4 dont elle se

(*) Voir GILBERT (ouvrage cité), p. 439.

déduirait par une intégration par parties, mais nous allons encore l'établir directement. On a (*) :

$$\left(\frac{2kK}{\pi}\right)^2 \mathrm{sn}^2 \frac{2Kx}{\pi} = \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 - \frac{2K}{\pi}\frac{2E_1}{\pi}$$
$$- 8\left[\frac{q \cos 2x}{1-q^2} + \frac{2q^2 \cos 4x}{1-q^4} + \frac{3q^3 \cos 6x}{1-q^6} + \cdots\right],$$

D'autre part (**),

$$-\frac{1}{2} l(1 - 2q \cos 2x + q^2) = q \cos 2x + \frac{q^2}{2} \cos 4x + \frac{q^3}{3} \cos 6x + \cdots$$

Multipliant membre à membre, puis intégrant par rapport à x, il vient :

$$\left(\frac{kK}{\pi}\right)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} l(1 - 2q \cos 2x + q^2) \,\mathrm{sn}^2 \frac{2Kx}{\pi}\, dx = \pi \sum_1^\infty \frac{q^{2m}}{1-q^{2m}},$$

ou, en changeant x en $\frac{x}{2}$,

$$\left(\frac{kK}{\pi}\right)^2 \int_0^{\pi} \mathrm{sn}^2 \frac{Kx}{\pi}\, l(1 - 2q \cos x + q^2)\, dx = 2\pi \sum_1^\infty \frac{q^{2m}}{1-q^{2m}}.$$

Cette dernière relation est moins simple que celles du n° 4 auxquelles on peut la ramener, comme le montre la relation de Jacobi :

$$\int_0^x k^2 \,\mathrm{sn}^2 x dx = \frac{Jx}{K} - \frac{\theta'(x)}{\theta(x)},$$

mais elle a déjà été signalée (***) et c'est ce qui nous engage à la reproduire ici. Les recherches que nous avons faites nous portent

(*) JACOBI, *Œuvres complètes*, t. I, p. 168.
(**) GILBERT, *Cours d'analyse*, p. 319.
(***) O. SCHLÖMILCH, *Notiz über die Lambert'sche Reihe*, JOURNAL DE SCHLÖMILCH, XXIX, 384.

à croire que la série de Lambert ne peut pas s'exprimer sous forme finie au moyen des fonctions θ de Jacobi, mais il nous semble que s'il est possible de la définir par une équation différentielle, ce sont les relations des n°s 3 et 5 sur lesquelles il faut s'appuyer pour la découvrir.

M. Mansion fait une communication sur *Une nouvelle forme de la relation entre les distances de cinq points en géométrie non euclidienne* dont voici le résumé :

Soient OX, OY, OZ, trois axes rectangulaires, dans un espace riemannien; M, un point; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ses distances aux plans coordonnés et à l'origine; a, b, c, les projections de δ sur les axes, toutes ces longueurs étant rapportées à la constante riemannienne prise pour unité. Si l'on pose

$$x = \sin\alpha, \quad y = \sin\beta, \quad z = \sin\gamma, \quad u = \cos\delta,$$
$$X = \operatorname{tang} a, \quad Y = \operatorname{tang} b, \quad Z = \operatorname{tang} c,$$

on prouve aisément que l'on a

$$x = Xu, \quad y = Yu, \quad z = Zu, \quad x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 1.$$

On trouve ensuite, pour la distance 12 de deux points,

$$\cos(12) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 + u_1u_2,$$

relation qui donne la précédente, quand 2 coïncide avec 1.

La relation riemannienne entre cinq points est

$$| x_i, y_i, z_i, u_i, 0 |^2 = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5).$$

On peut lui donner la forme nouvelle

$$| x_i, y_i, z_i, u_i, u_i | = 0,$$

où les mineurs des éléments de la dernière colonne sont les racines carrées de fonctions des distances seules de ces points; u_i est le cosinus de la distance du point i à une origine *arbitraire*.

Ce qui précède s'étend, *mutatis mutandis*, à la géométrie lobatchefskienne.

M. Mansion espère déduire les formules fondamentales relatives aux aires et aux volumes, en géométrie non euclidienne, de la relation générale entre les distances de cinq points.

M. Ch.-J. de la Vallée Poussin présente un Mémoire intitulé : *Sur la fonction* $\zeta(s)$ *de Riemann.*

MM. C. Jordan et P. Mansion sont nommés commissaires pour examiner ce travail.

Deuxième section.

MM. Ferron, Leconte, Thiry et Van der Mensbrugghe se font excuser de ne pouvoir pas assister à la séance.

Le secrétaire présente à la section, au nom de M. Duhem, professeur à la Faculté des sciences de Bordeaux, un mémoire intitulé : *Troisième fragment d'un cours d'optique.* M. Van der Mensbrugghe et le R. P. Thirion sont chargés d'examiner ce mémoire.

M. L. Henry, professeur à l'Université catholique de Louvain, fait la communication suivante :

Études de chimie classique. — Les lois de nombre en chimie (*).

A. *Lois des poids. Loi générale* ou *loi de la constance des rapports des masses réactionnelles.* — Il existe des rapports constants entre les quantités pondérables des corps qui inter-

(*) M. Henry croit qu'il est possible de modifier utilement l'énoncé habituel des *lois de nombre*. Il les formule comme il suit dans ses leçons.

viennent dans les actions chimiques soit comme *facteurs*, soit comme *produits*.

L'expression de ce rapport, dans des cas particuliers, constitue des lois spéciales.

Cette loi générale peut être envisagée de deux manières :

a) dans une réaction *unique*, considérée en soi.

b) dans plusieurs réactions considérées ensemble.

A. Dans une réaction unique, considérée en soi.

a) *Loi de Lavoisier* ou principe de la conservation de la masse. — Ce rapport est celui de l'égalité entre ce qui existe *avant* et ce qui existe *après* une réaction.

Envisagée dans l'acte particulier de la combinaison et dans son résultat, la loi de Lavoisier devient

b) *La loi des poids*. — Le poids d'un composé est égal à la somme des poids de ses constituants.

c) *La loi de Proust* ou *la loi des proportions définies*, ou mieux *la loi de la constance de composition des corps composés*. Un corps composé est toujours formé des mêmes éléments unis dans les mêmes proportions.

B. Dans un ensemble de plusieurs réactions.

a) *La loi de Stas*. — Les corps se combinent suivant des rapports constants dans toutes les combinaisons, quelles qu'elles soient, où l'on en constate la présence.

b) *La loi des rapports simples*. — Il existe un rapport simple entre les quantités diverses d'un même corps susceptibles de réagir sur une même quantité d'un autre corps.

Appliquée au phénomène de la combinaison et à son résultat, c'est *la loi de Dalton* ou *des proportions multiples*. Il existe un rapport simple entre les quantités diverses d'un même élément susceptible de se combiner avec une quantité constante d'un autre élément pour former une série de combinaisons chimiques.

c) *La loi des masses réactionnelles en général*. — Les nombres qui expriment les rapports suivant lesquels des corps réagissent sur une quantité constante d'un autre corps, expriment aussi les rapports suivant lesquels, ou suivant les multiples desquels, ils réagissent entre eux.

Appliquée au phénomène de la combinaison et aux corps composés, c'est *la loi de Berzélius* ou *des nombres proportionnels.*

B *Lois des volumes.* — Rien n'est aussi variable que le volume occupé par les masses *réactionnelles*, au milieu des actions chimiques.

Les lois qui règlent les volumes des masses réactionnelles ne peuvent être établies que pour l'état gazeux (dans des conditions physiques semblables, de pression et de température).

Cela étant, on peut formuler, quant aux volumes, des lois identiques à celles qui règlent les poids.

Loi générale ou *loi de la constance des rapports des volumes réactionnels.* — Il existe des rapports constants entre les volumes des corps qui interviennent dans les actions chimiques soit comme *facteurs*, soit comme *produits.*

Loi spéciale. — Ces rapports constants, entre les volumes réagissants, entre la somme de ceux-ci et le volume du produit ou des produits de la réaction, sont *simples.*

L'expression de ce fait constitue les lois de *Gay-Lussac.*

Dans son mémoire, M. L. Henry reviendra d'une manière spéciale sur les propositions qui se rattachent aux deux *lois générales* réglant les *poids* et les *volumes* des masses réactionnelles.

M. l'abbé Coupé, secrétaire de la section, donne lecture de la communication suivante :

Sur quelques expériences propres à faire comprendre la constitution des liquides (*suite*) (*), par M. G. VAN DER MENSBRUGGHE.

Décrivons actuellement quelques expériences ayant pour but de montrer qu'une compression produite dans un système de corps élastiques qui tendent à se rapprocher avec des forces inégales, se communique de proche en proche et détermine

(*) Voir le premier article sur ce sujet (*Ann. de la Soc. scient. de Bruxelles*, session d'octobre 1895).

entre ces corps des écarts d'autant plus marqués que les forces tendant à les rapprocher sont moindres.

, I. Procurons-nous une série de balles en caoutchouc de même diamètre et travaillées avec grand soin, afin qu'elles aient autant que possible la forme sphérique; choisissons ensuite un tube en verre de 40 à 50 centimètres de longueur, dans lequel ces balles puissent se mouvoir sans frottement et sans laisser un intervalle libre de plus d'un demi-millimètre; fermons l'une des extrémités du tube à l'aide d'un bouchon de caoutchouc, et introduisons la série des balles élastiques, six, par exemple. Assurons-nous que, le tube reposant verticalement sur le bouchon, la suite des points de contact des balles soit sur une même droite (fig. 1). Dans l'appareil qui nous a servi, cette condition n'était remplie qu'à peu près; mais les balles n'avaient pas rigoureusement le même diamètre (21 millimètres environ) et n'étaient pas absolument sphériques. Toutefois, les résultats obtenus ont été assez concordants.

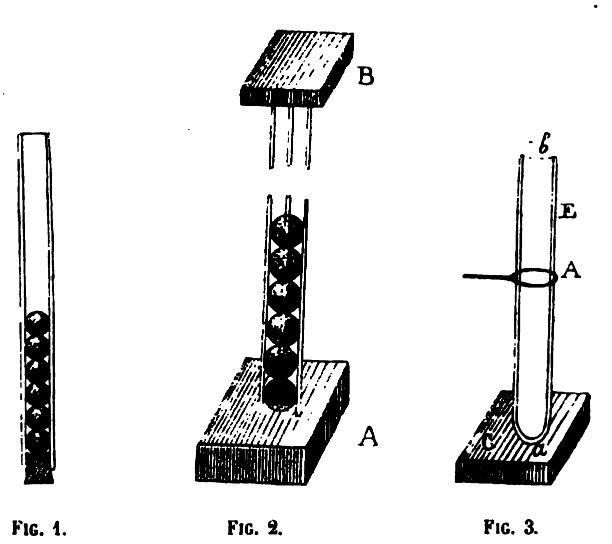


FIG. 1. FIG. 2. FIG. 3.

Soulevons le tube verticalement au-dessus d'une plaque de caoutchouc et à une vingtaine de centimètres au-dessus de cette plaque; puis laissons tomber l'appareil, mais de manière à pou-

voir le saisir immédiatement après le choc ; nous verrons ainsi que la balle inférieure se sépare un peu du fond, la balle suivante un peu plus de celle qui est en dessous d'elle, et ainsi de suite jusqu'à la supérieure qui rebondit en laissant le plus grand intervalle entre elle et celle qui la suit immédiatement.

Pour expliquer cet effet, remarquons que, par l'action du poids total du tube, du bouchon et des balles élastiques, il se produit, pendant le choc, un léger aplatissement dans le bouchon et dans chacune des balles; seulement, pour celles-ci, la déformation est d'autant plus marquée que la balle considérée est plus voisine du fond ; pour cette double raison, il se développe ainsi, au bas du tube, une compression plus forte que partout ailleurs dans la série des corps superposés. Si ces derniers étaient doués d'une élasticité parfaite, les quantités de mouvement annulées pendant le choc seraient rendues intégralement pendant la détente ; mais cette restitution n'est que partielle ; on voit par là qu'après le choc, la balle inférieure doit se soulever à peine au-dessus du bouchon, la deuxième un peu plus au-dessus de la première, la troisième encore un peu davantage au-dessus de la deuxième, et ainsi de suite jusqu'à la supérieure, qui doit rebondir en se séparant le plus fortement.

II. J'ai varié l'expérience précédente en opérant comme suit.

Soit un petit bloc en bois de chêne A (fig. 2), à base inférieure bien lisse, et percé de trois ouvertures équidistantes, de 4 à 5 millimètres de diamètre et destinées à recevoir trois bâtons ou tubes de verre solidement fixés ; ces tubes, de 50 à 60 centimètres de longueur, sont disposés parallèlement entre eux et de manière que, si le bloc A repose sur un plan horizontal, ils soient bien verticaux. Cela étant, engageons dans l'intervalle des trois tubes une balle de caoutchouc et serrons-la entre eux et le bloc A ; puis introduisons dans le même intervalle cinq ou six billes en ivoire de même diamètre et susceptibles de se mouvoir librement, mais sans trop de jeu, dans l'espace compris entre les trois tiges ; les billes dont je me suis servi avaient environ 22 millimètres de diamètre ; elles étaient presque rigoureusement sphériques. Pour maintenir le parallélisme des tiges, j'ai fait usage

d'un autre petit bloc B en chêne, où étaient pratiqués aussi trois petits trous de 15 à 20 millimètres de profondeur, et susceptibles de recevoir les extrémités supérieures des trois tubes : de cette manière, le système offrait une fixité suffisante.

Cela étant, j'appuie fortement le bloc A contre un plan horizontal, puis je soulève doucement la bille inférieure et en même temps les cinq autres, et cela jusqu'au contact de la bille supérieure avec le bloc B; ensuite je laisse retomber la série entière; chaque bille aura parcouru à fort peu près le même chemin au moment du choc de la bille inférieure contre la balle de caoutchouc; comme le système est très élastique, chaque bille transmettra son énergie à la suivante vers le bas, de sorte que la balle de caoutchouc sera comprimée avec une énergie à fort peu près égale à $6mv^2$.

Si l'élasticité du caoutchouc était parfaite, la détente se ferait avec une énergie égale à $6mv^2$. En réalité, il n'y a qu'une portion de cette énergie qui est rendue disponible; avant de rebondir, la bille inférieure éprouve des chocs provenant des cinq autres, et ne s'élève ensuite que d'une petite quantité; la deuxième remonte un peu plus haut, et ainsi de suite jusqu'à la dernière, qui s'élève le plus; ainsi se trouve réalisée, grossièrement, il est vrai, la variation de la densité dans la couche superficielle d'un liquide, densité qui est la moindre à la surface limite même.

III. Soit (fig. 3) une éprouvette E remplie d'eau ou d'un liquide quelconque; disposons-la verticalement au-dessus d'un plan horizontal portant une plaque de caoutchouc C, de telle manière qu'elle puisse se mouvoir à travers l'ouverture d'un anneau fixe A, qui ne lui laisse que peu de jeu, sans pourtant donner lieu à un frottement sensible; quand le liquide est parfaitement en repos, soulevons l'éprouvette à une hauteur de 15 à 20 centimètres, puis laissons-la retomber verticalement sur la plaque élastique C; le choc au point de contact a du verre et du caoutchouc produira une réaction qui se propagera de proche en proche aux portions liquides voisines du filet vertical passant par a; cette détente imprimera donc la plus grande vitesse à la portion

extrême *b* de ce filet, puis une vitesse décroissante aux portions inférieures à *b*; aussi, en l'absence de toute cause perturbatrice, nous verrons se lancer dans l'air une suite de globules liquides dont le supérieur sera toujours le plus écarté du suivant.

Un effet du même genre s'observe à chaque coup d'un bélier hydraulique, quand le tuyau d'ascension du liquide a une portion communiquant librement avec l'air extérieur, indépendamment, bien entendu, du tuyau d'écoulement.

Le R. P. Thirion, S. J., résume le mémoire de M. Röntgen : « *Sur une nouvelle espèce de rayons* »; il expose ensuite les expériences qu'il a réalisées au laboratoire du Collège de la Compagnie de Jésus, à Louvain.

La bobine dont il est servi peut donner 12 centimètres d'étincelle, mais il a constaté qu'une bobine de puissance moindre donnait encore des résultats convenables.

On lance dans le circuit primaire le courant de neuf accumulateurs; un rhéostat, installé dans le circuit, permet de faire varier l'intensité du courant jusqu'à ce que le tube de Crookes, intercalé dans le circuit secondaire, s'éclaire bien et régulièrement, l'étincelle d'extra-courant à l'interrupteur étant faible.

Le tube de Crookes dont il s'est servi est un tube vertical, dont la cathode est un demi-cylindre; il est enfermé dans une caisse en bois dont la partie supérieure reste ouverte. Les fils qui y amènent le courant secondaire traversent une des parois latérales de la caisse. On peut intercaler un condensateur en dérivation sur le circuit secondaire; mais il n'est pas nécessaire, et a l'inconvénient d'exposer les tubes à s'échauffer outre mesure.

La bobine étant mise en marche et l'obscurité étant faite dans le laboratoire, on place en guise de couvercle, sur la caisse qui contient le tube, des cartons, des planchettes, un livre, etc., et par-dessus un écran fluorescent. Celui du P. Thirion est une feuille de papier bristol sur laquelle on a étendu une couche de cyanure de platine et de barium.

L'écran s'est éclairé à travers plusieurs feuilles de gros carton, à travers un volume de 300 pages, à travers des planchettes de sapin dont l'épaisseur dépassait 5 centimètres, etc.

Pour montrer rapidement l'opacité inégale des métaux, on place des découpures d'aluminium, de cuivre, de plomb, etc., entre deux cartons ou deux planchettes minces. Ces boîtes se posent sur l'ouverture supérieure de la caisse, et on met par-dessus l'écran fluorescent : l'ombre plus ou moins opaque des objets interposés se dessine sur l'écran. Quand les parois de la boîte sont assez épaisses, il est bon de se couvrir la tête du voile noir des photographes pour empêcher que toute lumière étrangère ne nuise à la netteté du phénomène.

Au lieu de découpures métalliques, on peut évidemment placer entre les deux cartons, ou entre les deux planchettes, d'autres objets : un crayon, par exemple, qui montre l'ombre de son âme de plombagine, une patte de grenouille, un poisson, etc.

L'emploi de l'écran fluorescent permet jusqu'à un certain point de régler la position et la distance du tube donnant l'ombre la plus nette. On enlève alors l'écran et on le remplace par une plaque sensible enfermée dans un sac de papier fort ou même dans son châssis ordinaire, le volet restant fermé. Dans les premiers essais, la plaque posait au moins quarante minutes; de nouveaux tubes ont permis de procéder plus rapidement. Le développement doit être poussé énergiquement et exige parfois un temps assez long. On obtient alors l'impression permanente des ombres que montrait l'écran fluorescent.

Cet écran ne s'éclaire pas seulement quand on le place horizontalement en regard de la cathode, mais aussi quand on le place verticalement à proximité de la partie phosphorescente du tube; en sorte qu'en enlevant le tube de la caisse on a pu faire poser à la fois plusieurs plaques photographiques.

Parmi les photographies que le P. Thirion, aidé du P. Van Tricht, a obtenues, la plus intéressante est celle-ci : ils ont placé *entre deux cartons* un papier bristol sur lequel étaient écrits quelques mots avec du cyanure de platine et de barium. Ils ont exposé cette boîte aux radiations du tube après avoir placé dessus une plaque sensible enfermée dans un double sac de fort papier. Au développement, sur le cliché négatif, *l'écriture est venue très nettement en blanc*, c'est-à-dire que la substance fluorescente a

agi sur les rayons Röntgen comme un corps opaque. En réalité, les rayons x passent partout où ils ne rencontrent pas la substance fluorescente; là où ils la rencontrent, une transformation s'opère : ils deviennent rayons lumineux ordinaires. Mais ces rayons lumineux ne peuvent traverser le second carton, les lettres doivent donc venir en blanc sur le cliché négatif.

Sur quelques observations météorologiques faites à Kimuenza près de Léopoldville (*Congo*), par le R. P. De Hert, S. J. — Il existe jusqu'ici relativement peu de documents concernant le climat des différentes régions qui constituent l'État indépendant du Congo. Une série d'observations complètes a été faite, pendant un an et demi, par M. le D[r] Étienne, à Banana; d'autres, mais incomplètes, ont été faites, entre autres par M. le lieutenant Lemaire, à l'Équateur, et par M. le D[r] Dupont, à Basoko. Depuis le 1[er] octobre 1894, des observations semblables ont été commencées à Kimuenza ; elles embrassent la série complète, tel que cela se pratique dans les stations établies sur toute la Belgique, par les soins de l'Observatoire royal d'Uccle. Le résultat de ces observations pendant la saison chaude et pluvieuse d'octobre 1894 à mai 1895 a été traduit dans les diagrammes présentés à la section. L'inspection des diagrammes des pressions atmosphériques montre que le baromètre oscille entre deux extrêmes, dont la différence n'est que de $8^{mm},8$. Jamais on n'y a constaté des chutes de la colonne mercurielle semblables à celles qui se produisent dans nos régions pendant les orages ; très souvent, en dehors des heures ordinaires d'observation, lorsqu'une tornade se déchaînait sur la contrée, le baromètre a été consulté, aussi bien au commencement qu'au milieu et à la fin de la tourmente, et toujours il s'en est montré indépendant. A en juger par ces diagrammes, on dirait qu'une cause ou un phénomène inconnu fait monter le mercure à un maximum, suivi d'une chute de valeur à peu près égale; toutefois, la longueur de cette période de montée et de descente est fort inégale. Des observations ultérieures sont nécessaires néanmoins pour démontrer si cette assertion est fondée.

Les orages viennent presque tous du nord-est. Cependant peu d'entre eux ont éclaté au zénith de la station.

Il doit y avoir une cause de déviation sur le Congo, au delà du Stanley-Pool, ou sur le Pool lui-même, ou dans une vallée au sud-est de Kimuenza et dans laquelle coule la Djéri, affluent du Congo.

Il y aurait sous ce rapport une étude intéressante à faire, si différents observateurs voulaient s'imposer la tâche d'annoter exactement le commencement, la durée, l'intensité, etc., des orages, principalement à Berghe-Sainte-Marie, Brazzaville, Kinshassa, Kimuenza, Ntampa ou Ndembo et Kisantu.

Les diagrammes de la température (thermomètre abrité) montrent un certain nombre de chutes de la colonne mercurielle assez considérables ; ces chutes ont eu lieu pendant les pluies ou au moins le lendemain de pluies abondantes. Elles sont plus fortes dans le thermomètre non abrité et sont dues à la même cause; une fois il y a eu entre le maximum du thermomètre non abrité, observé à une heure, et celui du lendemain, annoté à la même heure, une différence de 30 degrés.

Dans la livraison d'octobre 1895 de la *Revue des questions scientifiques*, le R. P. De Hert a donné un résumé détaillé de toutes les observations météorologiques qu'il a faites pendant la saison chaude 1894-1895, à la colonie Sainte-Marie-de-Kimuenza.

Le R. P. Bareel, S. J., présente la communication suivante sur les *résultats d'une expérience relative à une pile.*

Nous avons signalé récemment (*) une simplification avantageuse de la pile Leclanché, simplification consistant dans la suppression du vase poreux et du bioxyde de manganèse.

Voici une expérience qui montre que l'oxygène de l'air intervient dans ces conditions nouvelles, comme dépolarisant.

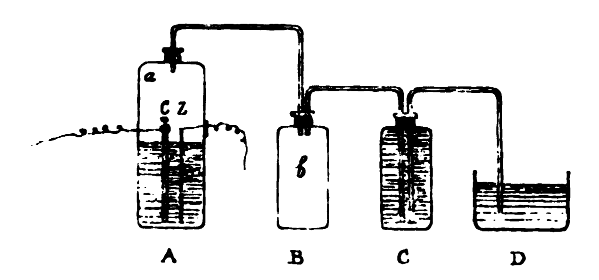
Deux piles ont été disposées suivant le schéma ci-après : l'une Leclanché ordinaire, l'autre simplifiée.

(*) Session d'octobre 1895.

Le flacon A, coupé en deux pour recevoir l'élément, a été ensuite refermé et luté avec soin, et muni d'un tube de dégagement.

B est un flacon vide, et C un flacon plein d'eau.

Cette disposition permet d'observer une augmentation ou une diminution dans les volumes gazeux *a* et *b*.



Si on laisse fonctionner pendant quelque temps les deux piles ainsi montées séparément, on observe d'abord que la pile pourvue de bioxyde de manganèse ne manifeste ni absorption ni dégagement de gaz. Quant à la pile simplifiée, il en va tout autrement. D'abord, une absorption se produit, et une certaine quantité d'eau passe du flacon C en B, puis c'est un dégagement de gaz insoluble qui a lieu, refoulant l'eau de C en D.

Remarquons que le volume de l'eau aspirée par l'absorption correspond sensiblement au cinquième du volume d'air qui surmonte la pile en A, ce qui permet de supposer que l'oxygène de cette atmosphère se combine avec l'hydrogène mis en liberté. Ensuite, l'oxygène venant à faire défaut, l'hydrogène se dégage et refoule l'eau comme nous avons dit. Il n'y a plus alors qu'une dépolarisation physique, la nature du charbon (*) permettant aux bulles gazeuses de se détacher facilement pour venir crever à la surface du liquide.

Comme on le voit, il est avantageux de laisser l'air se renouveler librement dans la pile. Grâce à la porosité du charbon, qui

(*) L'expérience a été faite avec des charbons Lacombe.

agit alors, quoique à un moindre degré, comme la mousse de platine, ou bien comme le charbon platiné de la pile Maiche, les deux gaz hydrogène et oxygène peuvent entrer en combinaison pour former de l'eau. Il va sans dire, toutefois, que cette dépolarisation n'est pas complète, pas plus que dans la pile Leclanché ordinaire.

Quand à la variation d'intensité, de résistance, etc., elle suit sensiblement la même marche dans les deux modèles.

M. l'abbé Coupé entretient la section des trousses photographiques dites « objectifs universels ».

Celui qui, dans les sciences comme dans les arts, veut se faire de la photographie un puissant auxiliaire pour saisir à l'instant d'irréfutables documents, sait combien il importe pour lui de pouvoir garnir son appareil de systèmes optiques appropriés aux diverses circonstances dans lesquelles il peut se trouver.

Que de fois un géologue, par exemple, étudiant la conformation des roches et voulant les photographier, ne se trouve-t-il pas dans la nécessité de dresser son appareil à une distance que lui détermine la disposition du terrain sur lequel il travaille. Tantôt il se trouve tout rapproché de l'objet à prendre, ayant derrière lui un cours d'eau, une fondrière, un rocher; tantôt il en est éloigné plus qu'il ne voudrait par un infranchissable obstacle. Ou bien encore il lui faut opérer du seul point d'où le document est appréciable dans toute sa vérité.

Chacune de ces circonstances le forcerait à faire usage d'objectifs de foyers différents. Pour se tirer d'affaire, il n'a que deux moyens : ou bien se munir d'une série d'objectifs couvrant une même plaque avec des angles différents, ou bien faire usage d'un de ces objectifs dits « universels », d'une trousse.

Le premier moyen, la série d'objectifs, est encombrant, coûteux; le second, l'usage de la trousse, était jusqu'ici bien peu conseillé.

L'idée m'est venue, l'an dernier, de rechercher expérimentalement, parmi tous les objectifs qui encombrent le marché photographique, un objectif universel capable de rendre au touriste

comme au savant tous les services désirables, en prenant pour type de plaque à couvrir le 13 × 18.

C'est le résultat de ces recherches que j'ai l'honneur de vous présenter.

Grâce à l'obligeance de plusieurs fournisseurs d'appareils photographiques, j'ai pu réunir une assez jolie collection de ces trousses. J'en ai eu de toutes les dimensions, de toutes les formes, les unes dans des écrins volumineux comme des valises, les autres dans de petites bonbonnières. Dans ces écrins, un choix de lentilles d'une étonnante variété. Par exemple, dans une de ces séries, j'ai trouvé des éléments de 80 centimètres de foyer; dans une autre, des lentilles exigeant un tirage de 1 mètre 20 centimètres.

Quant aux qualités photographiques de ces lentilles, pour la plupart anonymes (il en était pourtant qui portaient des noms qui m'ont fort surpris sur semblables instruments), elles étaient navrantes.

L'élément premier, l'élément constitutif dans la composition d'une trousse, c'est l'objectif simple, et cet élément, qu'on peut exiger parfait en lui-même, doit être tel que, combiné avec un autre élément de la même trousse à foyer identique ou différent, il forme avec lui un doublet irréprochable comme chacun de ses éléments constitutifs.

Or, cet élément premier, l'objectif simple, présentait, dans le très grand nombre de lentilles que j'ai examinées, des défauts tels qu'ils laissaient à peu près tout à désirer.

Les plus graves défauts étaient la courbure du champ de l'image, une forte distorsion, l'astigmatisme très prononcé, enfin des aberrations sphérique et chromatique tant et plus qu'on n'en voudrait.

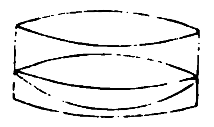
Il est clair qu'une trousse composée de lentilles élémentaires de cette qualité ne pourrait rendre service qu'aux amateurs du flou. Mais comme le savant est généralement nettiste, il en résulte que ces objectifs universels ne pourraient lui être d'aucune utilité. Il en ferait donc ce que j'ai fait de ceux qui m'avaient été confiés, les renvoyer aux fournisseurs.

Ce fut alors que, grâce à l'obligeance de M. Krauss, l'excellent constructeur parisien concessionnaire des brevets Zeiss, je fus mis en mesure d'étudier à fond une trousse nouvelle, construite par cet habile opticien.

Le Dr Rudolf en avait déterminé la combinaison.

Déjà en 1893, le savant collaborateur de M. Zeiss avait créé des lentilles formées de la combinaison de trois verres infiniment supérieure à celles données jusqu'ici.

Continuant ses recherches, le Dr Rudolf finit par composer ses lentilles de deux couples de verres collés ensemble. Ces couples sont composés chacun d'un élément positif et d'un élément négatif. Mais tandis que dans l'un des couples l'indice de réfraction de l'élément positif est plus petit que celui de l'élément négatif, dans l'autre l'indice de réfraction de l'élément positif est plus grand. Un coup d'œil jeté sur cette figure fera comprendre.



Le résultat de cette combinaison a été des éléments d'objectifs excessivement remarquables au point de vue de la correction des aberrations sphérique et chromatique et de l'astigmatisme. L'image est absolument plane, présente une netteté parfaite de bord à bord avec une définition absolue de détails et sans déformation sur les bords. Ces objectifs simples couvrent ainsi à toute ouverture (*f*/12.5) un angle de 80 degrés environ et sont d'une rapidité telle qu'ils permettent aisément les instantanés à l'ombre.

Mais, en outre, ils se combinent deux à deux, et forment ainsi des doublets qui, diaphragmés à *f*/6.3, présentent des types absolument parfaits.

J'ai tenu à étudier à fond cette remarquable combinaison. Toutes les promesses faites par le constructeur ont été parfaitement tenues, et je me plais à signaler la trousse Krauss-Zeiss à

l'attention des membres de la Société scientifique comme étant un progrès immense, laissant loin derrière elle toutes les combinaisons de ce genre.

La trousse est formée de trois éléments simples : le premier de 350 millimètres de foyer, le deuxième de 285 millimètres et le troisième de 224 millimètres.

Mais le constructeur, pour faciliter l'achat de ce bel instrument, fournit, une à une, les lentilles qui le composent.

Voici les combinaisons possibles dans une trousse 13 × 18. Je signale dans le même tableau l'ouverture maxima, l'angle utilisé et la surface couverte à *f*/12.5 et à *f*/25.

DISTANCE FOCALE			OUVERTURE relative maxima utilisable.	ANGLE utilisé sur plaque 13 × 18.	COUVRANT	
lentille antérieure.	lentille postérieure.	résultante.			à *f*/12,5.	à *f*/25.
—	350	350	*f*/12,5	35°	21 × 25	29 × 34
—	285	285	—	43°	16 × 21	24 × 30
—	224	224	—	53°	13 × 18	21 × 27
350	285	179	*f*/7	64°	16 × 21	18 × 24
350	224	156	*f*/7,7	71°	15 × 20	16 × 21
285	224	143	*f*/7	77°	13 × 21	13 × 21

On fera peut-être l'objection que cette trousse ne présente pas d'objectif assez grand angulaire, de 9 centimètres de foyer, par exemple, couvrant le 13 × 18, comme le fait le Steinheil.

Il ne faut pas être très versé dans l'optique photographique pour comprendre que semblable combinaison nécessiterait une modification complète de la lentille simple qui ne pourrait plus se joindre à d'autres foyers. Ce serait, somme toute, ajouter un objectif à la trousse, qui perdrait ainsi dans ses éléments constitutifs son caractère universel.

J'ai cru que le sujet pouvait intéresser tous ceux qui se font de la photographie un puissant auxiliaire, et j'ai tenu à signaler le résultat de l'étude comparative à laquelle je me suis livré.

Troisième section.

Le R. P. Dierckx, S. J., présente aux membres de la section quelques spécimens des tableaux muraux qui servent actuellement à l'enseignement des sciences biologiques au Collège de la Compagnie de Jésus, à Louvain.

Cette communication est d'un caractère exclusivement pratique. Elle tend à montrer comment le professeur peut se former, *à peu de frais*, un attirail complet et *durable* d'excellentes pièces de démonstration théorique pour n'importe quelle branche de l'histoire naturelle.

D'ordinaire on se contente d'esquisser d'une manière quelconque les dessins et les schémas que chaque leçon comporte. Sur un tableau noir en verre dépoli et au moyen de craies tendres de cinq ou six couleurs, on peut arriver à un bon résultat, obtenir de la netteté malgré la multiplicité des détails.

Seulement, après la leçon, le dessin est sacrifié. De là perte de temps et de travail pour le professeur, et, pour l'étudiant, impossibilité de compléter ou de corriger sa copie ordinairement très défectueuse. Au surplus, une esquisse rapidement crayonnée est rarement irréprochable.

On trouve dans le commerce des collections de tableaux muraux qui ne manquent pas de valeur; mais, outre que leur prix est très élevé, elles ne répondent d'ordinaire qu'imparfaitement aux exigences de l'enseignement dont on est chargé.

Il est donc utile que le professeur puisse, une fois pour toutes, exécuter lui-même ou faire exécuter les dessins de son choix, et leur donner toutes les qualités requises pour une démonstration publique. Ce problème, nous croyons l'avoir résolu d'une manière satisfaisante.

Nos dessins ont toujours été empruntés aux meilleurs ouvrages; leur provenance est indiquée dans la légende. De cette façon, il est possible de contrôler leur exactitude et d'en retrouver immédiatement une explication détaillée et précise. Cette précau-

tion est nécessaire à d'autres titres. Plusieurs fois nous avons simplifié les schémas à l'effet d'éliminer des détails encombrants et inutiles pour le but à atteindre. Il nous est arrivé aussi de combiner plusieurs dessins. Dans les deux cas, les indications bibliographiques renseignent les figures mises à contribution, et le contrôle est aisé.

Pour supprimer le collage sur toile, nous peignons sur du fort papier de dessin. Les côtés sont bordés d'un ruban cousu; le haut et le bas sont cloués comme on le fait pour les cartes géographiques déroulables.

Les couleurs à l'aniline doivent être absolument rejetées : leur altérabilité à la lumière compromet la durée des tableaux. Il y a tout avantage à employer exclusivement les terres et les couleurs en poudre, en vente chez tous les droguistes. Délayées dans l'eau avec de la gomme arabique ou de la dextrine, elles adhèrent solidement et gardent indéfiniment leur fraicheur. Cette préparation est d'un maniement facile. Elle permet la retouche : bien des fois nous avons fait avec succès des modifications importantes, après un simple lavage à l'eau au moyen d'une éponge.

Dans certains cas, il faut conserver aux objets représentés leur couleur naturelle; dans d'autres cas, l'emploi de couleurs conventionnelles est à recommander. Le bleu et le rouge seront adoptés pour distinguer le système veineux du système artériel. Dans les schémas du système nerveux, les neurones sensitifs auront des tons rouges, les neurones moteurs des tons verts; et les neurones de même sorte, qui s'articulent entre eux, recevront des teintes différentes d'une même couleur. Les localisations cérébrales pourront être indiquées au moyen des couleurs correspondantes. En embryologie, on choisira de même trois couleurs pour suivre, à travers toutes leurs différenciations, les tissus d'origine exodermique, mésodermique ou endodermique, etc. En minéralogie, on colorera différemment les axes binaires, ternaires, etc ; on teintera les facettes de troncature, et on les teintera diversement, si elles ne sont pas de la même espèce, etc. L'emploi judicieux des couleurs permet ainsi d'arriver à une clarté que ne sauraient donner ni la gravure, ni le dessin à la craie blanche.

Mais, dans un tableau mural destiné à l'enseignement, la légende du dessin n'importe pas moins que le dessin lui-même. Nous avons spécialement soigné cette partie, et c'est en cela surtout que consiste l'originalité de notre système.

La légende s'imprime à l'*encre d'imprimerie*, au moyen d'un composteur à main et de caractères mobiles *en métal*, mesurant 2 centimètres de hauteur. Le type choisi est la majuscule réduite à ses éléments essentiels et présentant dans toutes ses parties la même épaisseur de trait; il a sur la minuscule l'avantage d'être bien plus lisible à distance et de n'avoir point de hauteurs inégales pour les différentes lettres. Les caractères en caoutchouc ne sont généralement pas bien dressés; ils se déforment après quelques jours d'usage. Quant à l'encre à tampon, elle ne résiste ni à la lumière, ni aux vapeurs acides ou ammoniacales. Aussi, après quelques tâtonnements, nous nous sommes arrêtés à l'emploi exclusif des caractères en alliage, et de l'encre d'imprimerie à base de noir de fumée absolument inaltérable. Élégance, netteté, rapidité d'exécution, solidité, voilà les principaux avantages du composteur à lettres mobiles.

Avec un éclairage convenable, nos légendes sont lisibles pour un œil normal à la distance de 6 mètres au moins.

Pour les grands auditoires, il faudrait augmenter les dimensions. Même dans ce cas, le composteur l'emporterait sur le pinceau pour la beauté et la rapidité de l'exécution.

Un membre de la section émet le vœu de voir publier cette série de tableaux réduits à de moindres dimensions. Le R. P. Dierckx fait observer que les sujets représentés répondent aux besoins d'un enseignement un peu spécial; que la réduction de ces pièces leur ferait perdre leur utilité au point de vue didactique; qu'au surplus son seul désir, en faisant cette communication, était de rendre service à ses collègues en leur suggérant un moyen relativement simple et éminemment pratique de suppléer par eux-mêmes à l'insuffisance des dessins faits à la planche et des tableaux que renseignent les catalogues des naturalistes.

M. le chanoine de Dorlodot, professeur à l'Université de Louvain, présente deux mémoires pour lesquels il demande la nomination de commissaires. M. de la Vallée Poussin, professeur à la même Université, est désigné comme rapporteur.

I Le premier de ces mémoires, intitulé *Sur la genèse de la crête du Condroz et de la grande faille*, a pour but de rechercher jusqu'à quel point les travaux les plus récents obligent à modifier les théories de M. Gosselet relativement à l'origine de ces grands accidents tectoniques. L'auteur arrive aux conclusions suivantes :

A. *Relativement à la genèse de la crête du Condroz :*

1° Contrairement à l'opinion de M. Gosselet, on doit admettre aujourd'hui que les bassins de Dinant et de Namur ne constituaient, à l'époque du dépôt, qu'un seul bassin hydrographique.

2° Néanmoins, il faut reconnaître que, dès l'époque de l'immersion du bassin de Namur, l'axe de la crête du Condroz était tracé, cet axe étant déterminé par la limite nord des dépôts dévoniens inférieurs. L'auteur pense que la zone où ces dépôts, d'une puissance moyenne d'au moins 1500 mètres, cessaient de s'interposer entre les schistes siluriens et la base du dévonien moyen, constituait une ligne de moindre résistance tout à fait favorable à la formation d'un genou anticlinal. Le genou dévonien une fois dessiné, la nature des schistes siluriens et l'inclinaison générale de leurs feuillets vers le sud ont dû déterminer un développement considérable du pli dans le sens de la hauteur.

3° Il est, en outre, *probable* que, pendant la période rhénane, la côte nord du bassin de Dinant a subi déjà un léger relèvement, tandis que l'ensemble du bassin s'enfonçait. Quelque faible qu'on le suppose, ce mouvement du sol constituait la première ébauche de la crête du Condroz et a dû exercer son influence sur le développement ultérieur de cette crête. — L'auteur fait remarquer que, si l'on admet cette dernière conclusion, il n'y a rien à changer au fond de la théorie de M. Gosselet sur l'origine première de la crête du Condroz. Il faut seulement diminuer considérablement l'intensité attribuée à la première phase du soulèvement.

4° L'auteur cherche ensuite à établir, par diverses considérations, que le développement pris par la crête du Condroz, après le dépôt du houiller, est plus considérable encore qu'on ne semble l'avoir supposé jusqu'ici.

5° Cette crête gigantesque, dont le flanc nord était renversé, n'a pu conserver cette position inclinée : l'action de la pesanteur s'ajoutant à celle du refoulement, elle a dû se coucher sur le grand plateau houiller du bassin de Namur.

L'auteur met sous les yeux de l'assemblée un profil représentant la reconstitution de l'état du sol dans la phase qui a précédé la formation de la grande faille, le long de la coupe n° 5 de ses *Recherches sur le prolongement occidental du silurien de Sambre-et-Meuse et sur la terminaison orientale de la faille du Midi* (*).

B. *Relativement à la genèse de la grande faille :*

1° Après avoir récapitulé les principaux résultats des recherches les plus récentes, l'auteur conclut que la *grande faille*, appartenant, ainsi que ses diverses ramifications, à la catégorie des *chevauchements horizontaux*, ne constitue pas simplement une phase avancée de la formation de la crête du Condroz, dans ce sens qu'elle consisterait, comme l'a admis M. Gosselet, dans le glissement du flanc sud sur le flanc nord de l'anticlinal.

2° Néanmoins il est vrai, dans un certain sens, que la formation de la grande faille est due à l'exagération du phénomène qui a donné naissance à la crête du Condroz. Il est manifeste, en effet, que le résultat de cette faille a été de refouler la crête du Condroz sur le grand plateau houiller qui s'étendait à ses pieds vers le nord. Or, on comprend parfaitement que la poussée venant du sud, après avoir écrasé dans un pli gigantesque la région située immédiatement au nord des dépôts rhénans, ait déterminé ensuite le refoulement en masse de ce pli le long d'une surface de cassure aboutissant au pied nord de la crête, et, à partir de ce dernier point, sur le sol même du plateau qui

(*) ANN. SOC. GÉOL. DE BELG., t. XX, Mém., pp. 291–424, et pl. IV, V et VI.

s'étendait au nord et n'offrait aucune résistance à cette progression.

3° La relation intime de la crête du Condroz avec la grande faille semble d'ailleurs résulter, en outre, de ce que le principal accident que présente la crête du Condroz, et qui consiste dans le remplacement de l'anticlinal qui la constitue à l'est de Sart-Eustache par un anticlinal situé plus au sud, est accompagné d'une modification correspondante de la grande faille, qui, représentée exclusivement jusque-là par la *faille d'Ormont*, se complique par la formation d'une branche à affleurement plus méridional qui n'est autre que la *faille du Midi*, et qui devient bientôt la branche principale. Les relations de la faille du Midi avec l'anticlinal du sud sont d'ailleurs si manifestes, qu'à son origine cette faille paraît continuer l'anticlinal. La faille d'Ormont, qui prend également son origine dans le silurien, paraît avoir des relations semblables avec l'anticlinal nord.

II. Dans son second travail, intitulé : *Quelques remarques sur les rapports entre la tectonique des Alpes et celle du massif primaire de la Belgique*, M. H. de Dorlodot fait observer qu'outre sa faible altitude, notre massif primaire diffère principalement, au point de vue tectonique, du massif des Alpes, par l'absence des grands plis couchés, et par l'allure des grands chevauchements horizontaux, surtout en ce qui concerne leur lèvre inférieure.

L'auteur pense qu'on peut facilement rendre raison de ces faits, sans supposer aucune différence dans le mode d'action, ou même dans l'intensité des forces orogéniques.

1° *La différence d'altitude* paraît due uniquement à l'ancienneté de nos montagnes primaires, qui a permis à l'érosion d'achever son œuvre de démolition. Après la formation de la grande faille, le point culminant du grand pli couché qui constituait la crête du Condroz devait atteindre une altitude qu'il serait difficile d'évaluer à moins de 14 à 15 kilomètres au-dessus du niveau actuel des mers, si l'on faisait abstraction du laminage des couches et de l'érosion contemporaine au soulèvement. On voit

que, même en accordant une très grande importance à ces deux facteurs, l'altitude dépasserait encore de beaucoup celle des Alpes actuelles.

2° *L'absence des grands plis couchés* s'explique suffisamment par le fait qu'il ne nous reste plus que les fondements de nos anciennes montagnes, tandis que, dans les Alpes, ces fondements, situés profondément sous le sol, échappent à l'observation. En effet, le renversement doit être d'autant plus faible que l'on est plus près de la racine des plis. — Toutefois, il est possible que cette différence soit due, dans certains cas, à la résistance plus faible du buttoir et à la formation précoce des grandes failles. La grande analogie que présente la tectonique des préalpes romandes et des *Klippen* avec celle de notre massif primaire pourrait donner créance à cette explication.

3° La première raison invoquée pour expliquer l'absence des grands plis couchés dans le massif belge, rend également compte de la *différence d'allure des chevauchements horizontaux*. Les grandes failles dirigent nos massifs refoulés vers la surface du grand plateau houiller, qui occupait la partie centrale du bassin de Namur; mais l'érosion a démoli la partie avancée de ces massifs, qui reposait sur le sol houiller primitif, et nous ne possédons plus que la partie profonde, où le massif refoulé glissait à la surface de la cassure. Dans les Alpes, au contraire, la partie avancée, qui repose à la surface tertiaire de la partie centrale des synclinaux, est, en général, seule visible, la partie profonde étant encore enterrée à un niveau notablement inférieur au sol actuel (*).

En résumé, les différences que présente la tectonique des Alpes avec celle de notre massif primaire de Belgique paraissent dues, en grande partie sinon exclusivement, à ce que, les mon-

(*) Il est à remarquer, en outre, que dans l'état actuel du sol, les massifs refoulés qui reposent sur les plateaux éocènes des Alpes suisses, sont souvent séparés de leur racine et constituent des lambeaux de recouvrement. Ce fait paraît avoir été facilité par des soulèvements postérieurs; mais, en supposant que des phénomènes analogues se soient produits en Belgique, nous ne pourrions le constater, toute la partie avancée du massif refoulé ayant disparu.

tagnes belges étant beaucoup plus anciennes, l'œuvre de dissection opérée par l'érosion y est beaucoup plus avancée. L'auteur conclut que, si l'on veut avoir des notions complètes sur l'anatomie d'une montagne, il faut étudier des montagnes de différents âges.

Le gisement d'insectes de l'étage corallien de la Bavière, la prétendue période glaciaire à l'époque houillère de M. Julien et la faune entomologique du stéphanien de Commentry, font l'objet de deux communications de M. F. Meunier.

La section vote leur publication dans les *Annales*.

Le même auteur montre quelques *Agrionidae* du corallien de la Bavière, qui lui ont été envoyés par M. le professeur Zittel, et un autre fossile du musée Teyler, à Haarlem, qui a beaucoup d'analogie avec nos Cicadaires. Il est cependant impossible de déterminer rigoureusement cet articulé en se basant sur les observations imparfaites de Weyenberg et d'Oppenheim.

Un magnifique exemplaire de hache de pierre polie est soumis à la section par le R. P. Bolsius, S. J.

Le savant jésuite développe aussi diverses considérations sur les organes segmentaires des Hirudinées.

M. Proost, inspecteur général de l'agriculture, fait parvenir un curieux rhizome roulé par les vagues, dont il serait intéressant de déterminer la provenance, et un spécimen très rare de colonie de Serpules (vers marins sédentaires) qu'il a trouvé sur le littoral septentrional de la Corse. A première vue, on dirait une roche volcanique ou corallienne, ou un tuf moderne.

Sur une motion de M. le comte A. de Limburg-Stirum, la section charge le bureau de transmettre au Conseil de la Société le vœu que la prochaine expédition antarctique belge, organisée sous les auspices de la Société royale de géographie de Bruxelles, ne soit point perdue de vue par la Société scientifique.

A la fin de la séance, il est donné communication d'une note du R. P. Schmitz, S. J., sur *un gisement de* **trente-trois** *troncs-debout.*

Récemment, il nous a été donné de faire une observation pleine d'intérêt aux charbonnages du Bois-d'Avroy (Sclessin-Ougrée). Nous devons à ce propos nos meilleurs remerciements à l'obligeance de la Direction.

Il s'agit de la présence au *toit* de la couche *Grande-Veine* de *trente-trois troncs-debout.* Nous les avons observés à la cote 409 mètres, dans le *dressant* qui passe au sud de la faille de Seraing et à l'est du dérangement-est.

Le gisement de ces végétaux n'a que 92 mètres de long et 2 mètres de haut, élévation de la galerie. Rien de plus naturel que de croire à une trouvaille *in loco natali.*

Mais cette interprétation ne peut être maintenue devant un détail d'une grande importance. La faible couche de *faux-toit* qui fait la transition naturelle entre le toit et la couche et qui sépare les *troncs-debout* du lit de houille, contient des empreintes couchées à plat.

Certaines de ces empreintes, de fortes branches de Sigillaires, sont appliquées et nettement moulées sur la base arasée des *troncs-debout.*

Il est donc impossible de conclure que les troncs sont *in loco natali,* car les racines auraient eu bien de la peine à remplir leurs fonctions dans de pareilles conditions.

La portée du fait signalé est grande et pourrait remettre en question plusieurs phénomènes du même genre accueillis et expliqués avec trop peu de critique.

Ailleurs (*) nous reviendrons sur l'étude détaillée de notre observation.

(*) Postérieurement à la réunion de la Société scientifique, l'Académie royale des sciences de Belgique a voté l'impression d'une note détaillée qui va paraître.

M. Victor Lambiotte, directeur-gérant aux charbonnages d'Oignies-Aiseau, communique à la section deux concrétions de limonite, trouvées dans le gravier du terrain houiller, et présentant cette particularité de renfermer de nombreuses concrétions miliaires ou pisaires d'argile limonitifère. Ces échantillons ont été recueillis à proximité du charbonnage du Roton, à Farciennes.

Quatrième section.

—

La quatrième section a entendu une intéressante communication de M. le Dr Guermonprez, professeur à la Faculté catholique de Lille, sur le cancer des fumeurs et sur certaines de ses conditions étiologiques. Pour M. Guermonprez, l'influence de la pipe et surtout du vulgaire « brûle-gueule » n'est pas douteuse. Mais cette influence est bien plus mécanique et physique que spécifique.

Le cancer siège particulièrement à la lèvre inférieure, du côté où le fumeur tient la pipe, rarement à la lèvre supérieure ; on le trouve aussi à la face interne des joues et beaucoup plus rarement à la face dorsale de la langue et à l'amygdale. Dans ces deux derniers cas surtout, les malades sont ordinairement édentés, et c'est parce qu'ils sont obligés d'engager le tuyau de la pipe beaucoup plus profondément dans la bouche que l'irritation se produit plus profondément aussi, là où la chaleur du tuyau et la fumée de tabac se dégagent de la pipe.

Mais le cancer, malgré le peu de succès des expériences, est considéré comme étant de nature microbienne. Et pour qu'il se manifeste au point où l'irritation se produit, il faut que le microbe y soit amené. D'où vient ce microbe? Si l'on se rappelle que le cancer des fumeurs sévit surtout dans la classe ouvrière; que les ouvriers fréquentent des cabarets où l'eau du réservoir sert à laver les verres et n'est renouvelée qu'au bout d'un jour, quand ce n'est pas au bout d'une semaine, on reconnaitra qu'en fin de compte il existe chez les ouvriers une pro-

miscuité dangereuse dès que l'un d'eux est atteint d'une affection susceptible de se communiquer par la bouche.

M. le professeur Lefebvre, MM. Borginon et Dumont prennent part à la discussion qui suit la communication de M. Guermonprez.

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE.

Après lecture du rapport du trésorier sur les recettes et les dépenses pendant l'année écoulée, M. l'abbé Renard, professeur à l'Université de Gand, fait une savante conférence sur *Les Fondateurs de la minéralogie*, dont voici un aperçu :

« Les recherches minéralogiques vraiment scientifiques commencent vers le milieu du siècle dernier. Steno avait découvert, en 1669, que le cristal de roche se présente sous des angles dièdres constants, quelles que soient la forme et la dimension des facettes. Romé De l'Isle généralise, en 1772, la loi de la constance des angles; il montre qu'en effectuant sur une forme polyédrique primitive des troncatures symétriques, on obtient des formes secondaires, et il indique les relations géométriques qui unissent tous les solides d'un même groupe. Il établit six séries de solides primitifs auxquels il applique la méthode des troncatures sur les angles solides et sur les arêtes, et arrive ainsi à montrer le lien qui unit presque toutes les formes de cristaux connues à cette époque. Il découvre la loi d'hémitropie et signale les pseudomorphoses.

Au moment où De l'Isle se livrait à ses recherches, les progrès de la chimie minérale vinrent permettre de classer méthodiquement les minéraux connus et de dévoiler leur composition; l'introduction du chalumeau aida puissamment ces premières investigations chimiques sur les espèces minérales. Mais toutes les découvertes faites jusqu'ici sont surpassées par celles de

l'abbé Haüy qui, presque immédiatement après la publication des mémoires de De l'Isle, fit connaître ses vues sur la structure moléculaire des cristaux. C'est en 1784 que fut publiée cette œuvre capitale pour l'étude du règne minéral. Il substitue à la forme primitive arbitraire celle que donne le solide de clivage; il fait connaître la loi de symétrie d'après laquelle toutes les modifications se répètent de la même manière et produisent le même effet sur toutes les parties extérieures identiques du cristal.

Il montre par sa loi des décroissements que les faces secondaires ont une direction déterminée, répondant à la soustraction d'un certain nombre de rangées de molécules intégrantes, dont l'épaisseur est mesurée par un multiple d'une molécule. Cette loi, qu'on désigne généralement sous le nom de « loi de la rationalité des axes », est le principe de tous les calculs cristallographiques, et dès ce moment on peut dire que la branche la plus importante de la minéralogie est fondée. Les minéralogistes allemands, Weiss et Mohr, substituent au système d'Haüy celui des axes cristallographiques, mais, dans leur conception absolument géométrique, ils trouvent cependant réalisées les lois établies par leur illustre devancier. Vers 1819, Brewster montre, par l'étude des propriétés optiques, les liens qui unissent les six systèmes cristallins.

Les chimistes, parmi lesquels Klaproth et Scheele, contribuent largement à augmenter les connaissances sur le règne minéral. »

M. Renard s'arrête au moment où les sciences minérales subissent la division du travail, rendant impossible un résumé des recherches variées dont les minéraux sont l'objet.

La conférence du savant professeur, vivement applaudie par les nombreux auditeurs, a été suivie d'explications données par M. Renard sur divers points spéciaux.

Elle sera publiée prochainement dans la *Revue des questions scientifiques*.

SESSION DES 14, 15 ET 16 AVRIL 1896

A BRUXELLES

SÉANCE DES SECTIONS

Première section.

Mardi, 14 avril 1896. — La section procède d'abord au renouvellement de son bureau.

Sont élus :

Président :	MM. Ch.-J. de la Vallée Poussin.
Vice-Présidents :	le Cte de Sparre,
	É. Goedseels.
Secrétaire :	H. Dutordoir.

La section pose ensuite comme sujet de concours la question suivante : *Démontrer qu'il est impossible de résoudre en nombres entiers l'équation indéterminée* $x^n + y^n = z^n$, *quand* n *est supérieur à* 2, *ou prouver l'inexactitude de ce théorème de Fermat.*

M. Ch.-J. de la Vallée Poussin analyse une partie de ses nouvelles *Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers.*

M. Mansion lit une note de M. G. Lechalas sur l'*Identité des plans de Riemann et des sphères d'Euclide.* Il fait suivre cette lecture d'*Observations* relatives à un point de la note de M. Lechalas. La section vote l'insertion de la note de M. Lechalas et des observations de M. Mansion dans les *Annales.*

Enfin M. Mansion donne quelques renseignements sur la nouvelle démonstration du postulatum d'Euclide publiée récemment par M. Frolov. La réfutation de cette démonstration sera publiée dans *Mathesis*.

Mercredi, 15 avril 1896. — Il est donné lecture du rapport suivant de M. C. Jordan sur le mémoire de M. Ch.-J. de la Vallée Poussin intitulé : *Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers. Première partie : La fonction* ζ (s) *de Riemann et les nombres premiers en général.*

Le mémoire de M. de la Vallée Poussin a pour objet l'étude des zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, définie (pour s réel et > 1) pour la série

$$\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s} = \Pi(1 - p^{-s})^{-1},$$

où la somme s'étend aux entiers positifs, et le produit aux nombres premiers p.

L'auteur rappelle dans un premier chapitre les propriétés de cette fonction établies par Riemann et par M. Hadamard et en déduit sans peine cette double expression de $D \log \zeta(s)$:

$$(1) \quad . \quad . \quad \begin{cases} D \log \zeta(s) = -\sum \dfrac{\log p}{p^s - 1} = \dfrac{1}{2} \log \pi - \dfrac{1}{s-1} \\ \qquad - D \log \Gamma\left(\dfrac{s}{2} + 1\right) + \sum\limits_{\rho} \dfrac{1}{s - \rho}, \end{cases}$$

la somme du second membre étant étendue aux racines imaginaires $\rho_1, \rho_2, \ldots$ de l'équation $\zeta(s) = 0$, rangées par ordre de modules croissants.

Ces racines jouissent des propriétés suivantes :

1° Elles sont en nombre infini et conjuguées deux à deux;

2° La série $\sum\limits_{\rho} \rho^m$ est absolument convergente si $m < -1$;

3° La partie réelle de chacune des racines ρ est > 0, mais < 1.

Ces préliminaires posés, l'auteur énonce le théorème suivant,

dont la démonstration rigoureuse forme l'objet principal de son mémoire :

Parmi les racines ρ, *il n'en existe aucune dont la partie réelle soit égale à* 1.

Il montre tout d'abord que s'il existait des racines de la forme $1 + \beta i$, leur ordre de multiplicité serait nécessairement égal à 1.

Mais la supposition de leur existence conduit à une contradiction.

Pour l'établir, il multiplie les deux membres de l'équation (1) par $\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)}$, intègre de $a - bi$ à $a + bi$ et cherche la limite vers laquelle tendent les deux membres lorsque b tend vers ∞.

La détermination rigoureuse de cette limite est assez délicate. On se trouve en effet conduit à intégrer une série entre des limites infinies, et il est nécessaire de s'assurer s'il est permis d'intégrer terme à terme. M. de la Vallée Poussin ayant déjà approfondi le problème de l'intégration des séries dans un mémoire antérieur couronné par la Société, était bien préparé à traiter cette question particulière.

Sa démonstration, fondée sur les propriétés de l'intégrale

$$\int_{a-bi}^{a+bi} \frac{y^s ds}{s+k},$$

ne laisse rien à désirer comme rigueur ni comme clarté. Nous nous bornerons à indiquer le résultat final de son analyse. Il est exprimé par l'équation ci-dessous :

$$(2) \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{aligned} & y^u \sum \frac{lp}{p^{\lambda u}} - y^v \sum \frac{lp}{p^{\lambda v}} = -\left[y^u \frac{\zeta' u}{\zeta u} - y^v \frac{\zeta' v}{\zeta v} \right] \\ & \qquad + \frac{u-v}{(u-1)(v-1)} y - (u-v) \sum_\rho \frac{y^\rho}{(u-\rho)(v-\rho)} \\ & \qquad - (u-v) \sum_1^\infty \frac{y^{-2m}}{(2m+u)(2m+v)}. \end{aligned} \right.$$

Dans cette formule, les sommations du premier membre s'étendent à toutes les puissances p^λ de nombres premiers qui

sont $< y$; y et a sont supposés réels et > 1 ; u et v ne sont pas des pôles de la fonction D log $\zeta(s)$.

Posons dans l'équation (2) $v = 0$ et faisons tendre u d'abord vers 1, puis vers une racine ρ_1 de $\zeta(s)$, et ajoutons les deux résultats obtenus. Nous obtiendrons l'équation

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
\sum lp \left[\frac{1}{p^\lambda} + \frac{1}{p^{\lambda\rho_1}}\right] - \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y^{\rho_1}}\right) \sum lp = -\frac{1}{\rho_1} - 1 \\
- \lim_{u=0} \left[\frac{\zeta'(1+u)}{\zeta(1+u)} + \frac{\zeta'(\rho_1+u)}{\zeta(\rho_1+u)}\right] \\
+ \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y^{\rho_1}}\right) \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} + \frac{\rho_1}{1-\rho_1} y^{1-\rho_1} \\
- \sum_\rho \frac{y^{\rho-1}}{\rho(\rho-1)} - \rho_1 \sum_\rho{}' \frac{y^{\rho-\rho_1}}{\rho(\rho-\rho_1)} \\
- \sum_1^\infty \frac{y^{-2m-1}}{2m(2m+1)} - \rho_1 \sum_1^\infty \frac{y^{-2m-\rho_1}}{2m(2m+\rho_1)}.
\end{aligned}
\right.
$$

Les sommes du premier membre sont encore étendues à toutes les puissances p^λ de nombres premiers qui sont $< y$; et dans la somme $\sum\limits_\rho{}'$ la valeur $\rho = \rho_1$ est exclue à la sommation.

Supposons maintenant que ρ_1 soit de la forme $1 + \beta i$. L'équation (3) pourra s'écrire

$$
(4) \quad . \; . \quad \sum_p lp \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^{\rho_1}}\right) - \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y^{\rho_1}}\right) \sum_p lp = \mathrm{L} + \mathrm{P},
$$

les sommes du 1er membre s'étendant aux nombres premiers $< y$; L désignant une somme de termes qui pour $y = \infty$ tendent vers une limite finie, et P désignant l'expression

$$
\frac{\rho_1}{1-\rho_1} y^{1-\rho_1} - \mathrm{S} \frac{y^{\rho-1}}{\rho(\rho-1)} - \rho_1 \mathrm{S}'_\rho \frac{y^{\rho-\rho_1}}{\rho(\rho-\rho_1)},
$$

la somme S s'étendant aux racines ρ de la forme $1 + \beta i$; la somme S' aux mêmes racines, sauf ρ_1.

Cette expression P est une somme de termes périodiques, de la forme

(5) . . . . . $\sum a_n \cos \alpha_n ly + b_n \sin \alpha_n ly,$

les séries Σa_n, Σb_n étant absolument convergentes, et les coefficients α_n ne tendant pas vers zéro.

M. de la Vallée Poussin se trouve ainsi conduit à étudier les fonctions $\varphi(y)$ de la variable y qui pour $y > 1$ admettent un développement de la forme

$$\varphi(y) = \mathrm{L} + \mathrm{P},$$

L convergeant pour $y = \infty$ vers une limite fixe, et P étant une série de termes périodiques de la forme (5). Il établit que ce développement ne peut se faire que d'une seule manière.

Cela posé, si, dans l'équation (4), on sépare les parties réelles et les parties imaginaires, on obtiendra deux équations de la forme

$$\sum_p \frac{lp}{p}(1 + \cos \beta lp) - \frac{1 + \cos \beta ly}{y} \sum_p lp = \mathrm{L}' + \mathrm{R},$$

$$-\sum_p \frac{lp}{p} \sin \beta lp + \frac{\sin \beta ly}{y} \sum_p lp = \mathrm{L}'' + \mathrm{J},$$

R et J désignant la partie réelle et le coefficient de la partie imaginaire dans P.

Ces équations peuvent se simplifier. M. de la Vallée Poussin montre en effet que les premiers termes de chacune d'elles sont de la forme L. On pourra donc écrire

(6) . . . . $-\frac{1 + \cos \beta ly}{y} \sum_p lp = \mathrm{L}_1 + \mathrm{R},$

(7) . . . . $\frac{\sin \beta ly}{y} \sum_p lp = \mathrm{L}_2 + \mathrm{J}.$

Mais ces deux équations sont incompatibles. L'auteur montre

en effet que, de leur combinaison, on pourrait en déduire une troisième de la forme

$$(8) \quad \ldots\ldots \quad -\frac{1+\cos\beta ly}{y}\sum_p lp = L_3 + R_2,$$

R_2 étant une somme de termes périodiques non identique à R.

Le premier membre des formules (6) et (8) admet donc deux développements distincts de la forme L + P, contrairement à ce qui a été établi.

Le théorème dont nous venons de résumer la démonstration est intéressant en lui-même, et plus encore par les conséquences asymptotiques qui en découlent relativement à la théorie des nombres premiers.

Posons, en effet, dans la formule (2) $v = 0$ et faisons tendre u vers l'unité. Nous obtiendrons un résultat de la forme

$$(9) \quad \ldots \quad \sum_p \frac{lp}{p-1} - \frac{1}{y}\sum_p lp = ly - 1 - C + \varepsilon,$$

ε tendant vers zéro pour $y = \infty$ et C désignant une constante, que l'auteur montre être identique à la constante d'Euler.

Intégrant cette équation de 1 à y, on trouve, après quelques réductions,

$$\frac{1}{y}\int_1^y \frac{dy}{y}\sum_p lp = 1 + \varepsilon$$

et l'on en déduit sans peine la relation

$$(10) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \lim_{y=\infty} \frac{\sum_p lp}{y} = 1.$$

Donc *la somme des logarithmes des nombres premiers inférieurs à y est asymptotique à y.*

Ce beau théorème, énoncé par M. Stieltjes, ne paraît pas avoir été démontré jusqu'à présent d'une manière rigoureuse.

L'équation (9) simplifiée au moyen de la relation (10) donne cette autre formule non moins intéressante :

$$\lim_{y=\infty} \left(ly - \sum_{y} \frac{lp}{p-1} \right) = C,$$

C désignant la constante d'Euler.

Cette courte analyse nous paraît suffire pour montrer que la Société scientifique de Bruxelles doit s'estimer heureuse que ce remarquable mémoire ait été destiné à ses *Annales*.

Sur la proposition de M. Mansion, second rapporteur, la section vote l'impression du mémoire de M. de la Vallée Poussin dans les *Annales* et adresse des remerciements à l'auteur.

M. Vicaire présente diverses observations critiques sur les *Leçons de mécanique*, de Gustave Kirchhoff. Ces observations peuvent se résumer ainsi :

Le traité de mécanique de Kirchhoff paraît avoir exercé une assez grande influence sur l'enseignement de cette science; il résume avec autorité la plupart des tendances que M. Vicaire a cherché à combattre dans diverses publications. Il y aura donc un sérieux intérêt à en examiner les premiers chapitres, les seuls dans lesquels les principes soient en cause.

La définition de la mécanique donnée au début de la préface : science des phénomènes dans lesquels on a à considérer exclusivement des mouvements, est très bonne, à cela près qu'il ne serait pas sans intérêt, vu son importance, de viser explicitement le cas particulier de l'équilibre. Le mot de phénomènes implique qu'il s'agit de mouvements des corps; cela distingue la mécanique de la cinématique qui, suivant une remarque présentée ailleurs par M. Vicaire, doit être définie comme la science du mouvement des figures (*).

(*) *Mémoire sur la réalité de l'espace et le mouvement absolu*. (ANN. DE LA SOC. SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, t. XVIII, 1894, 2e partie, p. 308.)

D'après cette définition, la mécanique est essentiellement une science physique, une science expérimentale. Par une contradiction étrange, lorsqu'on en vient à l'exécution quelques lignes plus bas, elle est présentée comme une science entièrement déductive construite « par des considérations purement mathématiques » à l'aide seulement des concepts d'espace, de temps et de matière. Kirchhoff justifie cette proposition par le fait que ces trois concepts sont nécessaires et suffisants pour concevoir le mouvement. Mais avoir le concept ou la définition du mouvement et en connaître les lois sont deux choses bien différentes. Que dirait-on d'un zoologiste qui voudrait constituer sa science *à priori* en partant de la notion d'animal?

Cette contradiction se retrouve partout dans la suite. Tantôt les formules du mouvement sont posées *à priori*; mais cette synthèse est impuissante par insuffisance des données; elle ne peut conduire qu'à des formules de cinématique donnant des mouvements qui sont géométriquement possibles, sans fournir aucun motif d'admettre qu'ils se produiront réellement dans la nature de préférence à d'autres également possibles; tantôt elles sont données comme résultant par voie d'analyse de l'observation des mouvements naturels, mais cette analyse est défectueuse parce qu'elle ne peut être faite que d'une manière approchée, sans qu'on ait le moyen de déterminer le degré d'approximation, ni de prouver que les éléments négligés ne sont pas essentiels.

Des exemples du premier cas se présentent dans la deuxième leçon où l'on donne les équations du mouvement d'un point ou d'un système de points assujettis à des liaisons; des exemples du second, dans la première leçon, où sont analysés la chute des graves et le mouvement des planètes.

L'analyse et la synthèse se présentent tout autrement dans la mécanique traditionnelle. Les fondateurs de la science ont commencé par l'analyse des mouvements naturels; cette analyse, bien ou mal faite, les a conduits à formuler un certain nombre de notions et de principes fondamentaux dont le caractère n'a peut-être pas été assez exactement apprécié, mais qu'il convient,

ainsi que M. Vicaire l'a fait remarquer (*), de considérer comme les éléments d'une hypothèse analogue à celles qui se présentent dans toutes les branches de la physique. Alors intervient la synthèse : on développe mathématiquement les conséquences de l'hypothèse et ce développement constitue la mécanique rationnelle. Les résultats de ce développement, comparés avec les faits dans les cas accessibles à l'expérience, permettront d'apprécier si l'analyse initiale a été bonne ou mauvaise. Tous les problèmes mis à l'étude roulent sur des données hypothétiques plus ou moins voisines de celles qui se rencontrent dans les cas naturels correspondants; les solutions ne sont qu'approximatives, mais on constate qu'elles sont de plus en plus approchées à mesure que les données serrent de plus près les conditions naturelles. La théorie faisait prévoir les écarts; elle fournit progressivement le moyen de les faire disparaître.

Kirchhoff a voulu, en outre, bannir de la mécanique la notion des forces considérées comme causes du mouvement, parce que, dit-il, les notions de cause et de tendance manquent de clarté. Les forces, pour lui, ne sont plus que des grandeurs auxiliaires, des expressions mathématiques destinées à faciliter la traduction des formules en langage ordinaire. Il est obligé cependant de recourir à la considération de systèmes de forces combinées ensemble suivant la règle du polygone et il reconnaît qu'il lui est impossible de donner de ces forces une définition complète.

La considération des causes a l'avantage incontestable de donner cette définition, d'expliquer pourquoi les divers mouvements sont dus à des systèmes de forces plus ou moins complexes, de montrer comment on peut trouver les expressions des forces élémentaires et enfin de justifier la règle du polygone.

Kirchhoff démontre par son propre exemple l'impossibilité de s'en passer; quand il veut étudier une question qui ne soit pas un problème de fantaisie, il procède exactement comme tout le

(*) ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, t. XVIII, 1894, 2e partie, p. 307, et t. XX, 1896, 1re partie, p. 10.

monde : il analyse séparément les diverses causes en jeu et en combinè les effets suivant la règle du polygone. Voir, par exemple, la 8e leçon, consacrée à la mesure de la pesanteur par le pendule.

Au surplus, si l'idée de cause n'est pas dépourvue d'obscurité, celles d'espace, de temps et de matière ne le sont pas davantage. La force-cause n'est nullement un concept abstrait et mathématique; nous en acquérons la notion très nette par la sensation de l'effort musculaire et nous la généralisons tout naturellement. En mécanique, elle n'est pas seulement une grandeur auxiliaire; elle est très souvent une donnée, comme nous venons de le dire dans le cas du pendule; elle est très souvent aussi un résultat. Dans les problèmes de statique, c'est presque toujours elle qui est la véritable inconnue.

Faute d'y avoir recours, Kirchhoff est réduit à ne traiter que des cas susceptibles d'une expression mathématique très simple. Une fois ou deux, il fait allusion au frottement, mais il n'établit les formules générales de la mécanique, y compris le principe de d'Alembert, que pour les mouvements sans résistances, c'est-à-dire pour des cas purement théoriques; même pour ces cas, il n'indique la véritable marche à suivre pour traiter les problèmes que lorsqu'il oublie son système. Un disciple qui l'aurait parfaitement compris, mais qui n'aurait pas appris la mécanique ailleurs, serait incapable de résoudre le moindre problème.

En somme, les innovations que Kirchhoff a voulu introduire dans la manière d'exposer la mécanique constituent une tentative entièrement manquée.

La communication de M. Vicaire donne lieu à une longue discussion sur l'enseignement de la mécanique à laquelle prennent part MM. Pasquier, Ch.-J. de la Vallée Poussin, Ferron, Dutordoir et Mansion.

Jeudi, 16 avril 1896. — M. Ferron fait une communication *Sur l'équilibre instantané des poutres principales dans les ponts métalliques.*

Cette communication donne lieu aussi à une discussion à laquelle prennent part MM. Vicaire, Dutordoir et Ch.-J. de la Vallée Poussin.

Il est ensuite donné lecture d'une note de M. C. Le Paige *Sur les notations algébriques avant Descartes*. Elle sera publiée dans les *Annales*, 2e partie.

M. de la Vallée Poussin continue l'analyse du mémoire dont il a parlé à la section deux jours auparavant. Il a considérablement étendu ses recherches depuis la présentation du mémoire sur lequel M. Jordan a fait rapport. Il présente à la section la suite de ce mémoire et se propose de réunir toute son étude sous le titre : *Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers*. Cette étude se compose de trois parties. Le premier mémoire en forme la première, qui a pour objet la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et les nombres premiers en général. Les deux parties nouvelles se rapportent respectivement aux nombres premiers représentables par une forme linéaire et à ceux qui sont représentables par une forme quadratique donnée.

M. de la Vallée Poussin expose brièvement la méthode suivie et les résultats obtenus dans ce nouveau travail.

La méthode est une extension toute naturelle de celle qui a été suivie dans la première partie. Le résultat principal relatif à la théorie des nombres premiers est le suivant :

Si l'on désigne par q_N les nombres premiers de la forme linéaire primitive $Mx + N$, le rapport

$$\frac{1}{t}\sum_{q_N<t} lq_N$$

a pour limite $\frac{1}{\varphi(M)}$ quand t tend vers l'infini.

Si l'on désigne par q_f les nombres premiers de la forme quadratique proprement primitive de déterminant négatif $(-\Delta)$

$$f = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

le rapport

$$\frac{1}{t}\sum_{q_f<t} lq_f$$

a pour limite $\frac{1}{2h}$, quand t tend vers l'infini, si f est une forme ambiguë, et $\frac{1}{h}$ dans le cas contraire. On désigne par h le nombre des formes proprement primitives du déterminant $(-\Delta)$.

La méthode ne s'étend qu'incomplètement au cas des déterminants positifs.

MM. C. Jordan et Mansion sont nommés commissaires pour examiner la suite du mémoire de M. de la Vallée Poussin.

M. Mansion donne ensuite un aperçu de l'enseignement mathématique à l'Université bénédictine de Salzbourg en 1770, d'après les *Praelectiones Mathematicae* du P. D. Beck. Il reviendra ultérieurement sur ce sujet, dans une autre session.

MM. De Tilly et Pasquier sont nommés commissaires pour examiner un travail de M. Ferron intitulé : *Mémoire exposant un point de doctrine nouveau relatif à la théorie générale d'un système de corps.*

Deuxième section.

—

Mercredi, 15 avril 1896. — La section procède d'abord à l'élection de son Bureau pour l'année 1896-1897. Sont élus :

Président : MM. ÉDOUARD BRANLY.
Vice-Présidents : G. VAN DER MENSBRUGGHE et H. DE PRETER.
Secrétaire : l'abbé COUPÉ.

M. G. Van der Mensbrugghe fait ensuite la communication suivante :

Principes généraux d'une nouvelle théorie capillaire, par G. VAN DER MENSBRUGGHE.

Le domaine de la capillarité comprend l'ensemble de tous les phénomènes physiques produits par les forces moléculaires

exercées soit entre les molécules d'un même liquide, soit entre deux liquides différents, soit enfin entre un solide et un liquide.

Avant de formuler des hypothèses sur la nature des liquides, nous allons examiner brièvement celles que les résultats de l'observation empêchent de mettre en avant.

Et d'abord nous ne pouvons pas, à l'exemple de Laplace, regarder les liquides comme incompressibles; car l'expérience prouve que leur compressibilité n'est pas nulle, et que, de plus, ils jouissent d'une élasticité parfaite. Il suit de là que la théorie capillaire de Laplace exclut *à priori* l'élasticité des liquides comme cause possible des phénomènes qu'il s'agit d'expliquer.

En second lieu, les liquides peuvent-ils être considérés, d'après Laplace et Gauss, comme ayant un volume constant et une constitution uniforme partout? Je ne le pense pas, car, dans ces conditions, on négligerait l'effet de l'évaporation; en outre, la densité d'un liquide passerait brusquement à celle de la vapeur qui s'en sépare constamment pour se répandre dans le milieu ambiant. D'ailleurs, si une masse liquide soumise exclusivement à ses forces moléculaires propres avait la même densité dans toutes ses parties, où serait alors le siège des forces figuratrices qui président à la réalisation de certaines formes d'équilibre, siège que ni Laplace ni Gauss n'ont pu assigner nettement?

C'est pour échapper à de pareilles objections que Poisson et plusieurs analystes après lui ont admis, dans les tranches superficielles d'un liquide, une variation de densité à partir de la tranche libre jusqu'à une profondeur égale au rayon d'activité de l'attraction moléculaire; malgré cette restriction, les résultats auxquels on est parvenu ainsi sont tout à fait analogues à ceux de Laplace.

Enfin et surtout, est-il permis de supposer *en équilibre dans toutes ses parties* une masse liquide soumise à ses seules forces intérieures, ou sollicitée en outre par des forces extérieures telles que la pesanteur? Je n'hésite pas à déclarer que cette hypothèse est inadmissible, attendu qu'elle est contraire au fait indéniable de l'évaporation.

Comme les théories classiques de la capillarité reposent toutes

sur cette supposition contredite par l'expérience, je crois utile de proposer une doctrine nouvelle qui ne s'appuie que sur les propriétés fondamentales des liquides, et qui conduit à des résultats rigoureusement conformes à l'observation.

Les propriétés essentielles des liquides que j'invoquerai spécialement sont la compressibilité, l'élasticité et l'attraction moléculaire. En vertu des deux premières, on le sait, toute pression exercée sur une masse liquide se propage aussitôt et également à toutes ses parties, et dès que la pression cesse d'agir, l'excès de force élastique développé fait reprendre au liquide son volume primitif.

Quant à l'attraction moléculaire, elle s'exerce entre les molécules d'un liquide quelconque, jusqu'à une distance très petite, r, qu'on appelle le rayon d'activité de la force en question.

Après ce court préambule, examinons rapidement les trois genres principaux de phénomènes capillaires. Dans la note actuelle, je parlerai des phénomènes du premier genre.

I. *Phénomènes capillaires dus aux seules forces moléculaires d'un liquide.* — Conformément à ce que nous venons de dire, considérons un liquide comme un corps peu compressible, mais éminemment élastique; d'après cela, pour savoir si un liquide supposé de même densité partout peut être en équilibre, nous aurons à rechercher si le degré de compression des diverses parties est le même dans chacune d'elles et, par conséquent, s'il en est de même de la force élastique qui s'y trouve développée. Si cette dernière a partout la même valeur, l'équilibre aura lieu ; dans le cas contraire, l'équilibre sera impossible.

Soit donc une masse liquide sans pesanteur et de même densité partout. Pour un point a de la surface libre (fig. 1, α), construisons la sphère d'attraction moléculaire ; comme la moitié de cette sphère est extérieure au liquide, nous n'aurons à parler que des molécules de l'autre hémisphère ; soit m une de ces molécules ; elle attirera a avec une force ab, mais elle sera attirée par a avec une force égale et contraire mn ; quel sera l'effet de ces deux forces? Elles vont tendre évidemment à augmenter le degré de rapprochement des molécules comprises entre a et m ; un effet

du même genre est produit par l'ensemble de toutes les molécules de l'hémisphère liquide; nous pouvons donc conclure que, dans le liquide autour de la molécule *a*, il se développera un certain degré de cohésion, et que pour empêcher le rapprochement indéfini des molécules autour de *a*, il faudra une force élastique que j'appelle *f*.

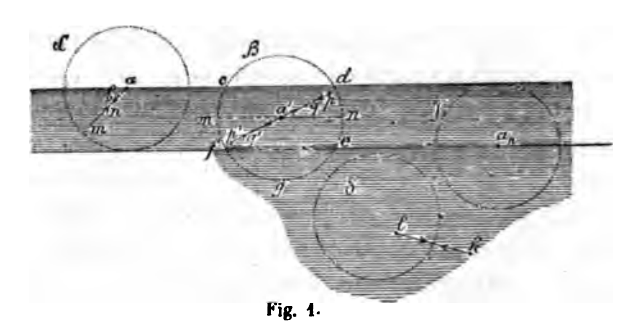


Fig. 1.

Soit actuellement un point *a'* situé dans la couche superficielle d'épaisseur *r* (fig. 1, β), et dans la sphère d'attraction relative à *a'*, considérons les deux segments égaux *cdmn*, *mnef*; prenons un point quelconque *p* du premier, et sur le prolongement de *pa'*, choisissons le point *p'* tel que $p'a' = pa'$. *p* et *p'* attireront *a'* avec des forces égales et opposées; mais réciproquement *a'* attirera *p* et *p'* avec des forces égales *pq*, *p'q'* et de sens contraires; par l'effet de ces quatre forces, *a'* restera immobile, mais les forces de sens contraires *pq*, *p'q'* tendront à augmenter le degré de cohésion moléculaire autour de *a'*; il en sera de même de tous les couples de points tels que *p*, *p'* que l'on peut choisir dans les deux segments égaux *cn*, *em*; quant au segment inférieur *egf*, chacune des molécules dont il est composé tend également à accroître la concentration des molécules autour de *a'*; conséquemment, pour empêcher un plus grand rapprochement en *a'*, il faudra une force élastique *f'* plus grande que *f*.

Pour des molécules *a''*, *a'''*, ... situées encore un peu plus loin de la surface libre que *a'*, on trouverait des forces élastiques *f''*, *f'''*, ... de plus en plus grandes, jusqu'à ce que, pour un point a_n situé à une profondeur précisément égale à *r*, on arri-

verait à une force élastique F supérieure à chacune des précédentes, et due à l'action des molécules distribuées dans une sphère entière de rayon *r* (fig. 1, γ). Pour un point quelconque pris au sein de la masse, on trouverait évidemment la même force élastique F; car il est à remarquer qu'une molécule quelconque *k* (fig 1, δ), prise extérieurement à la sphère de rayon *r*, ne peut en rien changer l'état de cohésion intérieure; en effet, si *k* attire une particule *l* de cette sphère, réciproquement *l* attire *k* avec une force précisément égale et capable de contrebalancer l'effet de la première force, grâce à la parfaite élasticité du liquide.

Il suit de là que la masse liquide supposée de densité uniforme comprendrait deux portions bien distinctes : l'une intérieure, où la force élastique F développée par les attractions moléculaires serait la même partout; l'autre, la couche superficielle d'épaisseur égale à *r* et dont les diverses tranches, à partir de l'intérieur, auraient des forces élastiques décroissantes F, ... *f''*, *f'*, *f*, *f* se rapportant à la tranche libre. Et quel sera l'effet de la prépondérance de la force élastique de la masse intérieure sur celles de la couche superficielle? C'est que la force élastique la plus grande F se communiquera à toutes les molécules de cette couche, et les écartera entre elles d'autant plus fortement qu'elles sont plus près de la surface libre. A l'appui de cette conclusion, je puis citer les faits que j'ai décrits récemment et qui montrent bien la transmission de la force élastique d'une masse à une série d'autres masses soumises d'abord à des forces élastiques moindres (*).

Je puis donc énoncer le principe général suivant :

A. *Dans une masse liquide homogène et soumise ou non à la pesanteur* (**), *la force élastique correspondant au degré de*

(*) Voir à ce sujet ma note ayant pour titre: *Quelques expériences propres à faire comprendre la constitution des liquides.* ANN. DE LA SOC. SCIENT. DE BRUX., 1895, session d'octobre, et 1896, session de janvier.

(**) Les forces moléculaires étant incomparablement plus intenses que la pesanteur, celle-ci peut être regardée comme n'influant pas sur la rigueur des raisonnements précédents.

cohésion à l'intérieur est plus grande que celle d'une tranche quelconque de la couche superficielle d'épaisseur égale au rayon d'activité de l'attraction moléculaire. L'équilibre est donc possible au sein de la masse, jamais dans la couche superficielle.

Conséquences. I. Le travail développé par l'excès de la force élastique intérieure F sur celles qui règnent dans les diverses tranches de la couche superficielle produit nécessairement des écarts entre les molécules de celle-ci, écarts qui sont le plus marqués pour la tranche libre.

II. Dans le sens tangentiel, ces écarts donnent naissance à une série de forces de tension élémentaires dans la couche superficielle d'épaisseur $r = 1^{mm}/_{20000}$ environ ; leur somme constitue la tension superficielle constatée par des expériences innombrables.

Les raisonnements qui précèdent s'appliquent aussi bien à une surface courbe qu'à une surface plane, pourvu que, et c'est le cas le plus fréquent dans les expériences de capillarité, le rayon d'activité r soit incomparablement plus petit que les rayons de courbure principaux de la surface liquide.

Si la surface liquide est courbe, la tension uniforme T qui y règne donne lieu, d'après un théorème de statique bien connu, à une pression normale $P = \pm T \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$, le signe + se rapportant à une surface convexe et le signe — à une surface concave. C'est la formule de Thomas Young ; il l'a obtenue en supposant démontrée l'existence de la tension superficielle.

Si l'on appelle énergie *potentielle* le travail nécessaire pour augmenter la couche superficielle d'un carré construit sur l'unité de longueur, on conçoit aussitôt que la surface limite d'une masse liquide aura une énergie potentielle d'autant plus grande qu'elle est plus étendue. D'après cela, malgré l'impossibilité d'un équilibre absolu dans toutes les parties, le liquide soumis à ses seules forces moléculaires pourra affecter une figure d'équilibre dès que l'énergie potentielle sera réduite au minimum compatible avec les conditions de l'expérience. C'est ce qui nous explique la réalisation des bulles de savon, par exemple, qui, malgré le renouvellement des molécules des couches superficielles, conservent sensiblement la même forme pendant toute leur durée.

III. Si nous examinons l'effet des écarts moléculaires dans le sens normal à la surface, nous pourrons conclure que, pour les liquides peu visqueux, les réactions dues à l'élasticité devront repousser les molécules extrêmes en dehors de la sphère d'attraction des particules plus profondes et causer ainsi le départ continu d'une infinité de molécules liquides : c'est le phénomène si connu de l'évaporation. On a constaté que, dans les conditions ordinaires, la couche superficielle de l'eau se renouvelle entièrement en 4 à 5 secondes, et celle de l'éther sulfurique en $^1/_{10}$ de seconde. Par suite du renouvellement en question, toutes les particules d'un liquide quelconque doivent être soumises à des mouvements vibratoires permanents; en outre, au travail dépensé pendant l'évaporation correspond une perte de chaleur que l'observation a constatée depuis.

IV. Si la courbure de la surface terminale du liquide est comparable à celle de la sphère d'attraction sensible, il y a lieu de distinguer le cas des surfaces concaves et celui des surfaces convexes.

Si la surface liquide est concave et à rayon de courbure extrêmement petit (fig. 2), le mode de démonstration employé plus haut montre immédiatement que la sphère d'attraction ayant pour centre un point de la couche superficielle renfermera plus de liquide que dans le cas d'une surface plane; il s'ensuit que le degré de cohésion près de chacun de ces points sera plus grand que dans le cas d'une surface plane; la différence entre la force élastique intérieure et celles des différentes tranches de la couche superficielle sera donc aussi moindre que pour une surface à courbure relativement faible; donc aussi la tension et l'évaporation développées seront moindres. Ainsi se trouve expliqué bien simplement le fait indiqué dès 1871 par lord Kelvin, qu'une surface liquide concave de forte courbure condense plus facilement la vapeur qu'une surface plane.

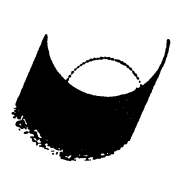


Fig. 2.

V. Si la surface terminale est convexe et à courbure extrêmement forte (fig. 3), la différence entre la cohésion intérieure et la cohésion de chaque tranche de la couche superficielle est

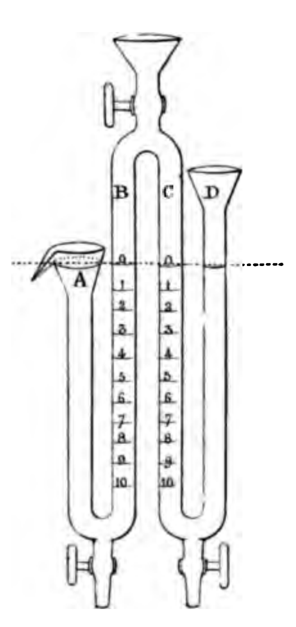
notablement plus marquée que pour une surface plane; voilà pourquoi la tension doit être plus forte également, et l'évaporation doit être extrêmement rapide. C'est ce qui explique le changement constant dans la forme des nuages, et la disparition si prompte des brouillards provenant de la condensation de la vapeur sortant des chaudières et se répandant dans l'atmosphère.



Fig. 3.

VI. Si le travail consistant à renouveler toujours la couche superficielle n'est pas égal tout autour de la masse liquide, celle-ci devra se mouvoir de côté et d'autre avec d'autant plus de rapidité qu'elle est plus petite : c'est ce qu'on observe notamment dans les expériences sur l'état sphéroïdal; cet état n'est nullement une manière d'être spéciale de la matière; il ne constitue qu'un cas particulier, très remarquable à la vérité, des phénomènes capillaires.

M. Maurice Lefebvre décrit ensuite un *nouvel appareil pour déterminer les densités des liquides* (voir la figure ci-contre). En voici l'usage :



Tous les robinets étant fermés, on verse de l'eau en A jusqu'à ce qu'elle atteigne en B le zéro de l'échelle.

On verse ensuite le liquide à étudier dans la branche B jusqu'à ce que son niveau dans ce tube reste stationnaire à la hauteur du zéro de l'échelle. Pendant cette seconde opération, le niveau de l'eau a évidemment baissé en B, et une partie de l'eau s'est perdue par le bec en déversoir de l'entonnoir A, — ce bec étant d'ailleurs situé juste à la hauteur du zéro de l'échelle.

Supposons le niveau de l'eau dans B fixé au 6 de l'échelle, et celui de l'autre liquide dans C fixé au 4. (La graduation est arbitraire, mais nous la faisons en centimètres et millimètres.)

La surface de l'eau dans le tube B supporte une pression égale au poids d'une colonne cylindrique de l'autre liquide ayant pour base la section du tube et pour hauteur 4 centimètres. De même, la surface du liquide étudié dans le tube C supporte une pression égale au poids d'une colonne d'eau de 6 centimètres de hauteur. Ces pressions sont égales, puisque les liquides sont en équilibre. Les poids des colonnes indiquées sont donc égaux. Ces colonnes cylindriques ont même base (section du tube); leurs volumes sont donc proportionnels à leurs hauteurs. Soient ces volumes : V pour la colonne d'eau et V' pour l'autre.

Soient D = densité de l'eau et D' = densité du liquide étudié.

On a :

$$D = \frac{P}{V}, \quad D' = \frac{P}{V'};$$

$$\frac{D'}{D} = \frac{V}{V'} = \frac{6}{4};$$

Et comme D = 1 :

$$D' = \frac{6}{4} = 1.5.$$

Le robinet entre B et C est utile quand il s'agit d'un liquide dont la densité est très éloignée de celle de l'eau. Dans ce cas, après avoir introduit l'eau pour commencer, comme il a été dit, on introduit une portion de l'autre liquide en D en maintenant le robinet ouvert, et on referme celui-ci pour achever de remplir D. De cette façon on peut obtenir que l'écart entre les niveaux en B et en C ne dépasse pas les limites de l'échelle.

L'entonnoir à robinet sert d'ailleurs à laver l'appareil.

Il va sans dire que les deux robinets inférieurs servent à vider l'appareil, et que celui entre C et D sert particulièrement à recueillir le liquide en expérimentation (*).

(*) Cet appareil est construit sur les indications de M. Lefebvre par la maison Drosten, rue du Marais, 49, à Bruxelles.

Le Secrétaire donne ensuite lecture d'une note du R. P. Leray, de Paris, *sur quelques phénomènes d'induction électrostatique*.

Le R. P. Thirion, S. J., décrit les curieuses expériences qu'il a faites au moyen des rayons X, et spécialement celles qui se rapportent à la recherche de diverses falsifications, par exemple celle du safran frelaté par le sulfate de baryum.

Le R. P. Van Geersdaele, S. J., expose le procédé qu'il a suivi pour construire des écrans phosphorescents aux rayons X :

Obtenir un bon écran est chose difficile. Voici la méthode qui nous a le mieux réussi.

La matière employée est le fluorure d'uranyle ammoniacal décrit par M. Van Melckebeke (*). Pour former ce produit, on mélange 1 partie de fluorure d'ammonium en solution saturée avec 2 parties de nitrate d'uranyle également en solution saturée. Il se dépose un précipité jaune verdâtre formé de cristaux microscopiques. On filtre dans le vide; on lave avec très peu d'eau, afin de débarrasser le produit du nitrate d'ammonium ; on redissout et l'on fait cristalliser, ce qui peut se faire assez rapidement vu la grande différence de solubilité de ce fluorure à chaud et à froid. On obtient ainsi une substance suffisamment pure, qui possède une fluorescence très marquée, un peu moins vive pourtant que celle du platinocyanure de baryum.

Il s'agit maintenant de l'étendre en une couche uniforme. Le procédé suivant est très simple et permet d'y arriver sans trop de difficulté. Nous broyons les cristaux en poudre fine, et en secouant un petit tamis nous distribuons la substance le plus uniformément possible sur un papier bristol; nous recommençons deux ou trois fois s'il le faut. Pour fixer la poussière fluorescente, nous nous servons successivement de gomme arabique très diluée et de collodion à 1 ou 2 °/₀. A cette fin, sur l'écran ainsi préparé, nous faisons tomber la partie la plus fine du jet

---

(*) ANNALES DE PHARMACIE. Louvain, mars 1896.

d'un pulvérisateur renfermant la gomme arabique; sans cette précaution, la matière se ramasse en certains endroits, en d'autres au contraire elle disparait. Mais la substance n'adhère pas suffisamment au papier après ce traitement; c'est pourquoi nous couvrons alors d'une couche très mince de collodion, en nous servant encore du pulvérisateur, mais cette fois en plaçant le bec du pulvérisateur tout près du papier, de façon à ne pas laisser au collodion le temps de s'évaporer. Il faut remarquer aussi qu'on doit conserver tout le temps la pression du pulvérisateur, sans quoi le collodion en obstrue l'ouverture. Il ne reste plus alors qu'à laisser sécher l'écran. On peut couvrir la substance fluorescente d'un cadre de verre pour la mieux protéger. Par ce procédé, on prépare facilement un écran en deux ou trois heures au plus. Un écran de 3 décimètres carrés de surface et de 0,4 millimètres d'épaisseur revient à fr. 2.50 environ. Un écran de même dimension au platinocyanure coûterait 120 francs.

M. L Henry, professeur à l'Université de Louvain, et M. l'abbé Raclot, directeur de l'Observatoire de Langres, ayant été empêchés d'assister à la réunion de la section, on renvoie à une prochaine session les communications qu'ils avaient annoncées, le premier, *sur l'intensité du caractère fonctionnel des composants simples ou composés dans les séries homologues*; le second, *sur la température du plateau de Langres et les inversions qui s'y produisent.*

Enfin, le R. P. Lucas montre quelques-unes des belles photographies qu'il a obtenues au moyen des rayons X.

Troisième section.

—

Mardi, 14 avril 1896. — La section décide de maintenir au concours la question proposée.

Il est donné lecture du rapport suivant de M. de la Vallée Poussin sur les mémoires présentés par M. le Chan. de Dorlodot à la session de janvier 1896 :

Rapport de M. de la Vallée Poussin.

Nommé commissaire à propos des deux communications faites à la séance du 30 janvier dernier par M. le Chanoine de Dorlodot, j'ai demandé séance tenante l'impression de ces travaux géologiques dans les *Annales* de la Société scientifique. Je me suis appuyé d'abord sur l'importance des éclaircissements que nous donnait l'auteur touchant l'origine d'un fait capital de la tectonique de nos terrains primaires. J'ai ajouté que depuis un certain temps déjà j'étais mis au courant des recherches en question, grâce à l'obligeance de M. de Dorlodot. A ma demande, la section a voté l'impression, réservant jusqu'à la prochaine session sa décision quant au nombre et à l'échelle des planches qui doivent être annexées aux mémoires.

Après en avoir conféré avec M. de Dorlodot, j'ai l'honneur de proposer à mes confrères la publication de deux planches qui seront des réductions des diagrammes que mon savant collègue a mis sous les yeux de la section. La première planche est une coupe théorique prise dans la région de Charleroi et représentant les relations des terrains paléozoïques durant la phase qui a précédé immédiatement la production des grands cheminements horizontaux. Dans cet essai de restitution, l'auteur fait abstraction de deux éléments qui échappent fatalement à l'appréciation, à savoir : d'abord les résultats de la dénudation opérée pendant la durée des phénomènes de redressement et de plissement; en second lieu, les proportions d'allongement et de rétrécissement transversal déterminés par le fait du laminage, *dans des couches actuellement entièrement disparues.* L'échelle adoptée serait le *cent soixante millième*, et les étages, l'échelle l'exige, seraient indiqués par des couleurs.

La deuxième coupe, applicable à la même région, dressée à la même échelle et comportant les mêmes teintes que la première, représenterait l'allure des terrains après la formation des grandes failles. On y tient compte, dans une certaine mesure, des actions dénudatrices et du laminage déterminé par le plissement, parce

que l'on se rapproche davantage de l'état de choses actuel. Les deux coupes proposées comporteront, l'une 12 centimètres de hauteur sur 24 de largeur; l'autre, 10 de hauteur sur 30 de largeur environ.

Dans le but de faciliter aux lecteurs des *Annales* l'intelligence de son œuvre stratigraphique, M. de Dorlodot met à la disposition de la Société *six cents* exemplaires de chacune des trois planches qu'il a publiées dans les *Annales de la Société géologique de Belgique*. L'insertion de ces planches dans nos publications n'entraînera donc aucun frais pour notre Société. La première de ces planches indique, à l'échelle du 40 000ᵉ, la carte géologique du sous-sol primaire entre Loverval et Floreffe; la deuxième, l'allure très probable des failles en divers points de la même région, l'échelle adoptée ici étant le 20 000ᵉ; la troisième est une coupe verticale théorique, au 40 000ᵉ, des terrains primaires à l'est de Charleroi. Elle répond à l'état de nos connaissances : c'est ce tracé qui a servi de base aux deux profils représentant les choses antérieures, et dont j'ai l'honneur de proposer l'impression à mes confrères.

J'ai conseillé à l'auteur d'ajouter à son travail la reproduction de ces plis couchés et étirés dont les Alpes de Suisse fournissent de mémorables exemples. Cette reproduction, qui serait faite en noir et qui serait peu coûteuse, aurait le grand avantage d'appuyer fortement l'interprétation de M. de Dordolot auprès de ceux qui sont peu familiarisés avec la tectonique des Alpes. Dans le cas où l'auteur agréerait mon conseil, j'appuie la publication de ce troisième diagramme auprès de mes honorables collègues.

La signification géogénique des *troncs-debout* du houiller fait l'objet d'une communication du R. P. G. Schmitz, S. J.

La portée géogénique des troncs-debout.

On rencontre assez fréquemment, dans les travaux d'exploitation du terrain houiller de Belgique, des troncs d'arbre pétri-

fiés occupant la station verticale par rapport au sens de la stratification.

Les besoins mêmes des travaux miniers amènent le géologue à faire pareille trouvaille au voisinage des veines et tout particulièrement au toit des lits charbonneux. Les cylindres de pierre reproduisent souvent à leur surface les moindres formes de l'écorce du végétal ; l'évasement progressif de la base montre nettement de quel côté se trouvaient les racines.

Voilà ce que nous appelons des *troncs-debout*.

Cette désignation fait donc abstraction des mouvements survenus après le dépôt des sédiments houillers. Il importe peu que la veine se présente en dressant (droit) ou en plateure (plat), pour rechercher la signification géogénique des fossiles dont nous parlons. L'important, c'est de voir si le végétal pétrifié possède des caractères qui imposent de conclure à sa situation *in loco natali*.

A première vue, nous le voulons bien, le fait suggère des idées plutôt favorables à la formation sur place. Ces troncs-debout sont souvent de belles dimensions, ils occupent la station verticale par rapport aux sédiments, l'évasement de leur base indique à l'évidence le voisinage des racines, la proximité des lits de houille semble les montrer comme des témoins irrécusables de la végétation qui autrefois les entourait et qui s'est effondrée à leur pied pour donner le combustible.

Voyons si ces conditions de gisement ne peuvent se justifier que par la théorie de la formation sur place.

Et d'abord, *la station verticale implique-t-elle nécessairement* que les troncs n'ont pas quitté la place où ils ont végété ? Les lois seules de la gravité peuvent expliquer le fait. En effet, comme les végétaux sont plus massifs à la base et que le poids peut encore être augmenté de ce côté par la présence de racines, il est naturel qu'un courant d'eau les dépose droits sur leur base dès que diverses causes n'ont pas contribué à les mettre à plat. La situation même du centre de gravité impose cette solution. D'autre part, si l'on compare le nombre des tiges à plat avec celui des tiges verticales, on reconnait que ces dernières sont en *infime* minorité.

Nous sommes porté à croire que la plupart des troncs-debout sont des végétaux qui, pour des causes variées, — au nombre desquelles nous plaçons un charriage moins long, — ont été moins macérés et qui partant ont mieux conservé leur structure et leur forme.

Il n'est pas superflu d'ajouter que la base des troncs-debout s'épanouit assez souvent dans une couche plus ou moins épaisse et fort riche en troncs-à-plat. Pour nous, ces troncs pourraient appartenir au même apport. Les uns, moins résistants ou plus attaqués, sont arrivés aplatis et horizontaux; la base des autres, mieux conservée, est venue droite et s'est placée ainsi au milieu des premiers, étalés comme sédiment.

La situation naturelle dans laquelle nous trouvons les troncs-debout peut donc fort bien avoir son explication dans l'hypothèse de la formation par transport.

Mais comment expliquer que l'on rencontre *presque exclusivement la base des arbres*, base nettement accusée par la presence de l'évasement radiculaire?

Sans admettre que ce fait soit exclusif, nous savons qu'il est ordinaire. Et qui plus est, nous croyons qu'il doit en être ainsi, tout juste dans l'hypothèse d'un transport.

Qu'est-ce qui a dû le mieux résister dans le charriage de plantes, surtout de plantes aussi peu consistantes que l'étaient celles de l'âge houiller? Était-ce la ramure, d'ailleurs peu importante, ou la partie qui y confinait? ou n'était-ce pas précisément la base même des arbres qui avaient atteint un plus grand développement?

Il serait même curieux, si la majorité des troncs-debout étaient réellement *in loco natali*, que jamais on ne leur ait vu de branches *adhérentes*, et qu'il n'y ait que très *rarement des racines*, ou mieux des radicelles, qui semblent partir des troncs, même les plus gros.

Il ne faut donc pas nécessairement en venir à la formation sur place pour justifier la prédominance des parties basilaires parmi les troncs-debout. Le faudra-t-il pour une autre condition de gisement, nous voulons dire *la proximité des troncs-debout par rapport aux lits charbonneux?*

Disons d'abord que la régularité de ce phénomène pourrait bien n'être qu'apparente. Autre part, nous avons dit déjà en vertu de quelles considérations nous croyons que les troncs-debout ne sont guère moins fréquents au-dessous (mur) des veines qu'ils ne le sont au-dessus (toit). Nous avons constaté la présence de troncs-debout au milieu des roches stériles, et nous pensons que si les exigences des travaux conduisaient à faire souvent des voies-de-niveau dans ces sédiments, on y constaterait tout aussi bien les phénomènes que nous observons actuellement à l'approche des lits de houille.

Chose remarquable : parmi tous ces troncs, auxquels on en appelle pour établir la formation sur place, *aucun*, à notre connaissance, *ne prouve ce qu'il serait cependant le plus important de prouver :* la formation sur place de la veine elle-même, du lit charbonneux.

Tous ces troncs, ceux du mur aussi bien que ceux du toit, sont arasés nettement à l'approche des veines. Jamais la souche du mur n'accuse une prolongation jusqu'au toit et jamais la souche du toit n'accuse une prolongation jusqu'au mur.

Bien plus, nous pouvons dire que la *quasi* totalité des veines est séparée du toit et surtout du mur rocheux par une couche d'un schiste fort fin, variable en dimensions, passant graduellement au charbon et contenant surtout des fossiles frustes accusant plutôt un transport. C'est le faux-mur ou le faux-toit du mineur.

Or, la continuité et la régularité de cette formation établit un départ tel entre les sédiments rocheux et le sédiment végétal, qu'il serait bien difficile de croire à la pénétration d'une plante, voire même d'un arbre, jusque dans la veine.

Qu'avons-nous voulu montrer? Que tous les troncs-debout doivent être attribués à la formation par transport? Nullement. Et nous tenons à insister sur ce point.

Étant donné que nous recourrons pour la géogénie de l'horizon houiller aux deux théories, nous croyons qu'il y a des troncs-debout qui sont *in loco natali* et d'autres qui sont venus dans leur gisement actuel grâce à un transport.

Ce que nous ne croyons pas et ce que nous avons voulu attaquer dans la présente communication, c'est l'opinion de ceux qui attribuent les troncs-debout exclusivement à l'un ou l'autre mode de formation.

Il s'ensuit que, *sans un examen minutieux*, la seule présence de troncs-debout ne peut appuyer, à notre avis, ni la formation sur place, ni la formation par transport.

Le R. P. Bolsius, S. J., entretient la section de la manière dont il prépare à la main des diapositives « holographes » pour projections à faire en classe ou dans des conférences, et en montre quelques spécimens.

Le même P. Bolsius dépose un mémoire : *Sur le canal néphridien dans les* Glossiphonides *et « l'entonnoir » néphridien dans les* Herpobdellides, qui sera soumis à l'examen de deux commissaires, le R. P. Hahn, S. J., et M. le D[r] H. Matagne. En voici le résumé :

La continuité des *organes ciliés* (L'ENTONNOIR des auteurs) avec les néphridies chez les Hirudinées étant encore un point en litige, l'auteur a voulu prouver par des figures de sections sériées complètes que dans beaucoup d'endroits cette continuité est MATÉRIELLEMENT IMPOSSIBLE, vu que ces deux formations, « entonnoir » et néphridies, sont très éloignées l'une de l'autre dans des sections d'Hirudinées fixées et enrobées *en entier*, dans lesquelles par conséquent les positions réciproques des parties n'ont pas été dérangées. Il a représenté trois séries de sections d'une *Herpobdellide*, ÉPUISANT chaque fois toute la FORMATION CILIÉE, qui dans ces préparations n'approche pas du tout des tronçons de néphridies contenus dans les mêmes préparations ; cette formation ne peut donc pas être en relation et EN CONTINUITÉ PAR CANAUX OUVERTS avec la néphridie. Si parfois un endroit semble être favorable aux idées de nos antagonistes, c'est qu'ils ont pris une image illusoire pour une réalité objective. En examinant les sections précédentes et suivantes, l'illusion devient souvent manifeste, comme un exemple le prouve clairement.

Un autre détail pareillement combattu dans les néphridies des

Glossiphonides (Clepsinides), c'est la liaison des cellules consécutives par *plus d'une* commissure (TYPIQUEMENT par *trois*). Afin de parer l'objection, répétée continuellement par ses adversaires, que l'auteur ne travaille que sur des sections, en négligeant les dissociations si démonstratives pour ce point, les figures cette fois ne sont faites que d'après des préparations dissociées suivant les méthodes indiquées par ces adversaires eux-mêmes, et avec des précautions spéciales. Ces préparations confirment d'une manière éclatante tout ce que l'auteur avait avancé précédemment sur l'existence de ces *commissures multiples*, en se basant pour lors sur des séries de sections ET *sur des dissociations*, ainsi que le dit formellement le texte de plusieurs mémoires, quoique toutes les figures fussent en réalité empruntées à des coupes microtomiques.

A la fin de la séance, M. L. De Lantsheere présente quelques considérations sur l'usage juif de déchausser celui qui renonçait à un droit, et compare cet usage avec les formules juridiques des contrats babyloniens.

Mercredi 15 avril 1896. — M. Fern. Meunier présente à la section trois travaux : 1° *Chasses diptérologiques aux environs de Bruxelles*, I : *Anthomyinae, Schoenomyinae, Muscinae;* — 2° *Sur de prétendues empreintes d'Arachnides du corallien de la Bavière;* — 3° *Quelques réflexions au sujet du nouveau système de classification des insectes* « muscides » *de M. Girschner.* — La section renvoie ces travaux à l'examen des RR. PP. Bolsius et Dierckx et de M. l'abbé Alph. Meunier.

Le même membre montre à la section une partie de la collection d'insectes fossiles du Musée Teyler à Haarlem. Quelques types sont d'une netteté remarquable.

M. le Mis de Trazegnies a vu fonctionner à Paris une « couveuse d'enfants » perfectionnée. Le chauffage se fait par l'alcool ou le pétrole. L'aérage et la température se règlent avec la plus grande facilité et sans aucun inconvénient. Les résultats obtenus au moyen de cet instrument sont vraiment étonnants.

M. Kurth expose ses vues sur l'état actuel et l'avenir des études toponymiques.

Jeudi 16 avril 1896. — La section procède au renouvellement de son Bureau. Sont nommés pour l'année 1896-1897 :

Président :	M. le Chan. DE DORLODOT.
1er Vice-Président :	R. P. BOLSIUS, S. J.
2e »	M. A. DE LAPPARENT.
Secrétaire :	M. le Capit. VAN ORTROY.

Le R. P. Van den Gheyn, S. J., expose l'état actuel de la question si controversée du *site d'Ophir*, la contrée mystérieuse d'où les flottes de Salomon rapportaient l'or, l'ivoire, les singes, les paons et le bois de santal.

Jusqu'en ces derniers temps, la solution généralement admise était celle qui place Ophir dans l'Inde. Cette opinion s'appuyait surtout sur un argument philologique qu'on croyait indiscutable : les noms par lesquels la Bible désigne les singes, l'ivoire, les paons et le bois de santal sont étrangers aux langues sémitiques et ne trouvent d'explication satisfaisante que dans les idiomes hindous, le sanscrit et le tamoul.

Les progrès de la philologie égyptienne ont ébranlé l'argument principal de la thèse qui retrouve Ophir dans l'Inde. En effet, le nom hébreu *qôf* du singe a pu dériver également de l'égyptien *ḳaf*; de même pour le mot *habbim*, qui désigne l'ivoire, il semble plus naturel de songer à l'égyptien *āb*, *ābu*, qu'au sanscrit *ibha*. De plus, c'est en Égypte seulement que le nom de l'ivoire paraît indigène, là aussi qu'il apparaît comme primitif. Dès la plus haute antiquité, l'Égypte fait le commerce de l'ivoire; il y arrivait des régions du Haut-Nil, et la ville d'Éléphantine, en hiéroglyphique Abu, semble indiquer soit la limite du pays des éléphants, soit le grand marché d'ivoire de l'Égypte. Il s'en faut donc que, dans l'antiquité, l'éléphant asiatique ait fourni le monopole du trafic de l'ivoire. Les traditions égyptiennes, dès les temps les plus reculés, attestent que le premier ivoire qui fut répandu par le monde provient de l'éléphant d'Afrique, des pays de Koush et de Pount.

Quant aux termes *tukkiyim* et *almugim*, que l'on croit désigner les paons et le bois de santal, il n'est pas certain, pour ce qui concerne le premier mot, qu'il faille y voir un dérivé du tamoul *çikhi*. Plus risqué encore semble être le rapprochement d'*almugim*, *algumim* avec le sanscrit *valgu*.

Le R. P. Van den Gheyn examine ensuite la théorie à laquelle les découvertes récentes en Afrique australe ont donné un regain de vogue, et qui place Ophir dans le Mashonaland. Il discute les principaux arguments que l'on fait valoir, et montre qu'aucun d'eux ne doit emporter la conviction. Sa conclusion est que l'on ne peut arriver à aucun résultat certain pour fixer le site d'Ophir, les données bibliques étant trop vagues à cet égard.

La session se termine par la lecture d'une communication que M. J.-H. Fabre a envoyée de Sérignan sur la *Nidification du Scarabée sacré*. Cette note sera publiée prochainement dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES ; nous nous contenterons d'en donner ici un court résumé.

Le Scarabée sacré, célèbre par les honneurs que lui accordait l'antique Égypte et par son industrie de rouleur de pilules, n'est pas encore mieux connu dans ses mœurs qu'il ne l'était du temps des Pharaons. Le volumineux amas globulaire, qu'il roule à reculons à travers champs, ne contient jamais d'œuf ainsi que l'admettait la croyance générale.

Ce n'est pas un berceau, mais un butin, que l'insecte va consommer au loin dans la paix d'une retraite temporaire. Sa forme sphérique n'est pas le résultat mécanique du roulement sur le sol. Au chantier même d'extraction, avant tout déplacement de la pièce, le Scarabée pétrit la matière et la façonne exactement en globe, qui se prêtera au charroi mieux que toute autre forme. La configuration sphérique précède le roulement au lieu d'en être la conséquence.

Vers la fin du printemps, quand vient l'heure d'établir sa famille, l'insecte creuse un terrier de peu de profondeur, une paire de décimètres au plus. C'est une vaste crypte, un véritable atelier de modelage où la mère aura ses mouvements libres

autour de la pièce élaborée. Là sont introduits les matériaux, tantôt sous forme de pilule, véhiculée de plus ou moins loin, tantôt par brassées, par blocs informes cueillis à proximité.

Riche d'un amas suffisant, l'insecte l'inspecte, l'émiette, l'épluche pour en éliminer tout corps dur ou tout intrus qui pourrait prélever sa part des victuailles. Le monceau épars est alors de nouveau pétri en sphère parfaite par la pression des pattes qui, patiemment, polissent, retouchent, perfectionnent. A peu près ainsi se travaille, sous le pouce du modeleur, le bloc d'argile immobile.

En un point du globe obtenu, un godet est excavé, toujours par pression; et dans ce godet un œuf est pondu. Puis les bords de la cavité sont étirés et rapprochés en un mamelon ellipsoïde, en un col qu'achève de clore au sommet un petit tampon feutré, perméable à l'air.

Ainsi s'obtient la *chambre d'éclosion*, où la prospérité du germe exige l'accès facile de l'air ainsi que des tièdes effluves du sol. Le pore supérieur, à bouchon perméable, laisse pénétrer l'air; la mince paroi de la loge laisse arriver la chaleur solaire, la grande couveuse, que modère le plafond du terrier.

L'ouvrage final a donc la forme d'une poire, non grossière et par à peu près, mais d'une exquise perfection. Le col est creux et contient l'œuf; la partie renflée en globe est l'amas alimentaire que la larve consommera en s'y creusant une loge. Un moment viendra où la panse de la poire sera vide; il n'en restera que l'écorce, formant solide coffret pour la métamorphose.

Abstraction faite du col de la poire, favorable à la respiration et à l'incubation de l'œuf, à quoi bon la forme sphérique de l'amas de vivres, configuration presque mathématique à laquelle l'insecte donne des soins méticuleux?

Le plus grave péril de la larve est la dessiccation prématurée des vivres. Elle consomme sa miche pendant les chaleurs caniculaires, alors que la terre se cuit comme brique à une profondeur bien plus grande que celle du terrier. Si les provisions durcissent avant l'heure, le ver périt, rebuté par un pain trop rassis.

La mère conjure ce danger. Elle sait, avant notre physique, que l'évaporation est proportionnelle à la surface évaporante; elle sait, avant notre géométrie, que de toutes les formes la sphère est celle qui enclôt le plus de matière sous la moindre enveloppe. Elle pétrit donc le pain de ses fils en boule qui, diminuant l'évaporation par sa moindre surface, contient néanmoins, avec sa plus grande capacité, la ration nécessaire à la prospérité du ver.

A part quelques détails relatifs à la chambre d'éclosion, la même configuration ronde des vivres destinés à la larve se retrouve dans l'industrie d'une foule d'autres bousiers de toute région, bien divers de structure et de taille, comme en font foi les cinq espèces que l'auteur a pu étudier : le Scarabée sacré, le Scarabée à large cou, le Copris espagnol du midi de la France; le Phanée splendide et le Mégathope intermédiaire des pampas de l'Amérique du Sud.

La boîte à conserves de moindre surface et de plus grand volume est donc superbe inspiration instinctive non déterminée par l'outillage dont l'insecte dispose.

Quatrième section.

—

Séance du 16 avril 1896. — Le Secrétaire lit, au nom de MM. De Buck et De Moor, un travail inscrit à l'ordre du jour et ayant pour titre : *Troubles trophiques graves du membre inférieur consécutifs à un traumatisme.*

Un homme âgé d'environ 40 ans reçoit un coup de pied à la région postérieure de la cuisse droite. Il en éprouve immédiatement une vive douleur. Un gonflement considérable se déclare rapidement, mais lui permet cependant de continuer son travail pendant neuf mois. Alors il est forcé de se rendre à l'hôpital où la déformation du genou, en fuseau, fait croire à l'existence d'un néoplasme malin. Ce genou est d'ailleurs le siège d'une mobilité anormale qui permet de mettre la jambe à

un tel degré d'extension qu'elle forme avec la cuisse un angle obtus ouvert en avant (*genu recurvatum*).

De nombreux ganglions existent dans les aines, surtout du côté malade. Mais toute douleur a disparu. L'impotence fonctionnelle seule décide le blessé à recourir à l'intervention du chirurgien. La désarticulation de la cuisse est décidée, et au cours de son exécution on constate une fracture intra-capsulaire à bouts libres sans tendance à la régénération; le périoste s'arrêtait d'ailleurs à une certaine distance des surfaces libres. L'articulation du genou était très altérée, mais ne présentait aucune trace de tumeur.

Les suites de l'opération furent d'ailleurs excellentes. L'examen microscopique révéla une altération profonde des fibres musculaires, du cartilage articulaire, du tissu osseux; mais la moelle osseuse ne parut point altérée. Malheureusement le nerf sciatique, dont la lésion n'était pas soupçonnée au moment de l'opération, ne fut pas soumis à l'examen microscopique. Mais les symptômes observés au point de vue trophique, semblables à ceux que l'on rencontre dans le tabes et la syringomyélie, permettent de croire très rationnellement à la lésion des fibres nerveuses propagée jusqu'aux centres nerveux eux-mêmes. Car ils sont inexplicables par l'existence d'une lésion simplement périphérique.

Le travail de MM. De Buck et De Moor, dont nous donnons ici un résumé pâle et incomplet, paraîtra en entier dans les *Annales de la Société scientifique*, II[e] partie.

M. le D[r] Faidherbe, de Roubaix, développe ce sujet : *A propos de la fièvre ganglionnaire : Est-elle une entité morbide?* Il range ses observations, base de sa conclusion, en trois séries, d'après leur ordre de constatation. Il rapporte ainsi l'histoire détaillée de quinze malades et conclut en admettant que la fièvre ganglionnaire n'est pas une entité morbide, mais la manifestation lymphatique d'une infection microbienne due au streptocoque et d'origine diverse, et en tout cas non absolument déterminée. Si certains auteurs la rattachent à la scarlatine, d'autres

la rapportent à l'influenza, d'autres enfin à des toxines qui ont pris naissance dans certaines fermentations intestinales.

A M. Faidherbe succède M. Goris, qui nous relate deux cas de thyroïdectomie pratiqués l'un chez un jeune homme de 23 ans, l'autre chez une jeune fille de 27 ans. Il expose en détail la technique opératoire et recommande spécialement de commencer l'énucléation par en bas et de respecter les veines médianes à cause de leur embouchure directe dans le tronc trachéo-céphalique, et de la possibilité de l'entrée de l'air dans cette grosse veine. Le goitre de la jeune fille avait une étiologie nette, traumatique. Il se montra immédiatement après une chute sur le dossier d'une chaise et qui porta directement sur le cou. Ce goitre s'enfonçait dans le médiastin et y pénétrait sur une longueur égale à la largeur de trois travers de doigt.

Les deux opérations furent suivies d'un excellent résultat.

En terminant, M. Goris recommande d'opérer de bonne heure, car souvent le goitreux présente des complications cardiaques auxquelles il succombe.

M. le Dr De Lantsheere présente un jeune garçon atteint d'iritis tuberculeuse. Une petite grappe de nodules tuberculeux se voit manifestement dans la chambre antérieure. Y a-t-il lieu d'intervenir par une opération? L'an dernier, M. De Lantsheere a vu un cas de cette nature s'améliorer. C'est ce qui l'engage à se tenir dans l'expectative, d'autant plus que son petit malade est atteint d'une lésion suspecte du sommet des poumons, lésion qui s'aggraverait probablement à la suite de l'énucléation de l'œil.

M. le Dr Huyberechts rapporte de nombreux cas intéressants qu'il a rencontrés dans sa pratique tant médicale que chirurgicale. Et d'abord huit cas d'angine couenneuse présentant les uns le bacille de Löffler seul, les autres, le bacille associé au streptocoque. Les injections de sérum lui ont paru agir avec beaucoup d'efficacité dans les cas de la première catégorie. Puis un cas

d'érysipèle avantageusement traité par le sérum de Marmorek et dont la marche fut beaucoup plus rapide que celle d'un autre cas d'érysipèle traité sans injection de sérum.

Il relate ensuite l'histoire d'une malade qui présentait un exsudat dans le cul-de-sac rétro-utérin. Notre collègue la traita d'abord par le repos et les injections chaudes rectales et vaginales.

Cependant un spécialiste conseilla l'opération immédiate de l'hystérectomie. M. Huyberechts, sollicité vivement de pratiquer cette opération, voulut temporiser. Les règles survinrent, et après leur cessation toute trace d'exsudat disparut. Aussi notre confrère recommande-t il de ne pas se presser de pratiquer l'hystérectomie même quand l'indication en semble rationnelle.

Il mentionne encore une ovariotomie pratiquée dans un cas de kyste simple, mais dans laquelle la malade succomba à l'hémophilie.

Enfin, il montre un volumineux sequestre du fémur qu'il enleva avec succès.

L'ordre du jour appelle le renouvellement du Bureau. Sont élus :

Président : M. le Dr BORGINON.
Vice-Présidents : MM. les professeurs DEBAISIEUX, de Louvain, et HEYMANS, de Gand.
Secrétaire : M. le Dr ACH. DUMONT.

Cinquième section.

Jeudi, 16 avril 1896. — La cinquième section s'est réunie à 9 1/2 h. sous la présidence de M. le comte van der Straten-Ponthoz. A l'ordre du jour figurait une causerie de M. Léon t'Serstevens *sur l'assurance ouvrière agricole.* M. t'Serstevens examine d'abord la situation actuelle de l'assurance ouvrière agricole en Belgique. Les compagnies qui pratiquent cette assu-

rance ont des conditions beaucoup trop onéreuses. Dans des cas fort nombreux, la police permet d'éluder toute responsabilité. Des fédérations d'agriculteurs pourraient présenter des conditions beaucoup meilleures. Il faudrait des groupements d'au moins 1000 hectares.

Cette intéressante conférence a été suivie d'une longue discussion, à laquelle ont pris part MM. Lagasse, van der Straten et Alb. Joly.

La section maintient le Bureau sortant, sauf que M. Alb. Joly est nommé secrétaire en remplacement de M. Arm. Julin, qui a demandé d'être déchargé de ces fonctions.

ASSEMBLÉES GÉNÉRALES.

I

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU MARDI 14 AVRIL 1896.

La séance est présidée par M. le chanoine Delvigne, délégué de la *Société bibliographique* de Paris.

M. P. Mansion, secrétaire général de la Société, donne lecture du rapport sur les travaux de la Société dont voici le résumé.

Publications. — I. Pendant l'année 1895-1896, la Société a publié les volumes XVIII et XIX de ses *Annales*. Voici comment se répartissent entre les cinq sections les matières contenues dans ces deux volumes :

	XVIII 1893-1894 — Pages.	XIX 1894-1895 — Pages.	TOTAL. — Pages.
I. Sciences mathématiques . .	218	60	278
II. — physiques . . .	52	92	144
III. — naturelles . . .	106	162	268
IV. — médicales. . . .	29	27	56
V. — sociales et agricoles	11	6	17
Divers (séances générales). . .	54	26	80
	470	373	843

Dans le volume de 1894, les mathématiques occupent une place exagérée, par suite d'une circonstance fortuite. Les *Annales* de cette année contiennent deux mémoires posthumes du regretté Gilbert dont il était impossible de retarder davantage la publication et qui n'occupent pas moins de 104 pages. Si l'on fait abstraction de ces deux mémoires, on peut dire que la marche des trois premières sections a été normale. La quatrième semble

avoir un peu fléchi et la cinquième n'est pas encore arrivée à retrouver sa prospérité des premières années de la Société.

II. Depuis avril 1893, ont paru quatre livraisons de la *Revue des questions scientifiques*, dont nous donnons le sommaire. Les sciences médicales n'y sont pas représentées autant que les années précédentes. En revanche, on y trouve plusieurs articles sur les confins de la physiologie et de la psychologie qui peuvent intéresser un grand nombre de lecteurs.

J. Thirion, S. J., L'Annuaire du Bureau des longitudes. — *P. Mansion*, Les Recherches de M. De Tilly en Métagéométrie. — *F. Goossens*, S. J., L'Argon. — *J. Thirion*, S. J., La Pluie en Belgique. — *Fr. De Bert*, S. J., Observations météorologiques au Congo. — *G. Van der Mensbrugghe*, Quelques exploits d'une particule d'air. — *E. Ferron*, Sur quelques questions d'une grande importance pratique. — *A. de Lapparent*, La Géomorphogénie. — *F. Van Ortroy*, Le Katanga : orographie, hydrographie, climat. — *A. de Lapparent*, Essai de géomorphogénie descriptive. — V. d. B., L'Exposition collective de l'enseignement agricole à l'exposition d'Anvers. — *A. Dewèvre*, Le Caoutchouc. — Les Caoutchoucs africains. — Les Caoutchoucs de l'État Indépendant du Congo. — *J. Van Geersdaele*, S. J., Le Froid, son influence sur les phénomènes physiques, chimiques et physiologiques. — *M. Lefebvre*, Morsures et piqûres venimeuses. — *M[is] de Nadaillac*, Les Mound-builders, une monographie. — *Mgr C. de Harlez*, Les Populations du sud de la Chine. — *Fr. Dierckx*, S. J., Les Ignorances de nos savants. — *G. Hahn*, S. J., Huxley. — *G. Hahn*, Les Théories psychiques de M. Soury. — *D[r] Surbled*, L'Origine des rêves. — *Ch. Lagasse-de Locht et A. Julin*, De la méthode scientifique en économie politique. — *D[r] Surbled*, L'Intelligence et les lobes frontaux du cerveau. — *A. Proost*, L'Éducation de la femme selon la science. — *V. Van Tricht*, S. J., L'Exposition universelle d'Anvers. — *Divers :* Analyse des travaux du troisième congrès scientifique international des catholiques. — Comptes rendus de quarante-deux ouvrages, et Revue des recueils périodiques relatifs à l'astronomie, la physique, la chimie, la géologie, la géographie, la

botanique, la zoologie, la physiologie, l'anthropologie, l'agriculture, la sylviculture, l'hygiène, les sciences industrielles et les sciences sociales.

Sessions. — Comme d'ordinaire, les sessions d'avril 1895 et de janvier 1896 se sont tenues à Bruxelles; mais la Société scientifique s'est transportée à Tournai pour sa session d'octobre 1895. L'assemblée générale, comme celle des sections, a eu lieu au collège Notre-Dame, sous la présidence d'honneur de S. Gr. Mgr Du Roussaux, évêque de Tournai, et sous la présidence effective de M. Vicaire, président de la Société, qui n'avait pas hésité à venir du fond du Jura pour assister à la réunion de Tournai. Il y avait dans l'assemblée un grand nombre de notabilités, parmi lesquelles nous devons citer M. R. du Sart, gouverneur du Hainaut, venu exprès de Mons pour nous donner un témoignage de sympathie, puis un assez grand nombre de professeurs des Facultés des sciences et de médecine de l'Université catholique de Lille. Après une savante conférence de notre confrère M. l'abbé M. Lefebvre, Mgr Du Roussaux a adressé à la Société de précieuses paroles d'encouragement.

Nous remercions encore ici, après notre président qui l'a fait le jour même, tous ceux qui ont contribué au succès de la session de la Société scientifique à Tournai : Mgr Du Roussaux, M. le Gouverneur de la province, les RR. PP. Jésuites qui nous ont donné l'hospitalité, les professeurs de Lille et enfin M. Lentz, directeur de l'établissement des aliénés de Tournai, qui a fait à la section de médecine les honneurs de l'établissement qu'il dirige d'une manière si distinguée. La section de médecine a eu à Tournai une réunion particulièrement féconde, grâce aux savantes communications faites par MM. les professeurs de la Faculté catholique de médecine de Lille.

État actuel de la Société. — Le nombre des membres de la Société inscrits en tête du tome XIX de la Société est de 396; mais depuis l'impression de cette liste, nous avons admis 7 nouveaux membres, ce qui en porte le nombre à 403. L'an dernier, à la même époque, la Société comptait 408 membres, mais depuis lors, la mort nous en a enlevé huit, de manière que

les admissions nouvelles compensent à peu près exactement les démissions trop nombreuses de l'année écoulée.

Parmi les membres que nous avons perdus, nous en signalerons deux, M. René Moretus, le grand et généreux bienfaiteur de toutes les œuvres catholiques, puis Louis Pasteur, au nom duquel il est inutile de rien ajouter, parce qu'il n'en est pas de plus grand dans les annales de la science du XIX[e] siècle.

Après nos deuils, nous pouvons faire connaître quelques distinctions obtenues par divers de nos membres. Le prix de Charles Grand (grande médaille d'argent) a été accordé au Frère Alexis-M. Gochet, pour ses travaux relatifs à l'enseignement géographique. M. Bouqué, professeur à l'Université de Gand, a été nommé membre titulaire de l'Académie de médecine de Belgique. M. Humbert a succédé à M. Bertrand dans l'une des chaires d'analyse mathématique les plus enviées, celle de l'École polytechnique de Paris (*).

Informations diverses. — Sur la proposition de M. Cuylits, président de la section de médecine, le Conseil de la Société a invité à ses séances les présidents des diverses sections. Grâce à cette collaboration, le Conseil a pu tenir compte, dans une plus juste mesure, des vœux de chacune des sections. Ainsi, il a décidé d'avoir désormais, autant que possible, aux assemblées générales, deux conférences au lieu d'une seule. L'une de ces conférences peut porter sur un sujet d'actualité mis à l'étude par l'une ou l'autre section, tandis que l'autre a une tendance plus vulgarisatrice et s'adresse davantage à la Société tout entière. On revient ainsi d'ailleurs aux premières traditions de la Société.

Sur la proposition d'un autre membre du Conseil, il y aura aussi, à partir de cette année; si vos suffrages ratifient nos propositions, un certain roulement parmi ceux qui en font habituellement partie : les anciens veulent absolument faire place à de plus jeunes, sauf à revenir, dans deux ou trois ans, rapporter au

(*) Par suite d'un malentendu, l'an dernier, nous avons oublié de dire dans notre rapport imprimé que le R. P. De Smedt, bollandiste, avait été nommé Correspondant de l'Institut de France.

Conseil le précieux appoint de leur expérience, quand d'autres auront désiré pour eux-mêmes pareille éclipse momentanée.

Enfin, toute la charge du secrétariat et de l'administration de la Société a reposé pendant l'année écoulée sur le R. P. George et sur M. Goedseels. Je vous propose, Messieurs, de leur témoigner aujourd'hui toute la reconnaissance que nous leur devons, car ils ne manqueront pas, comme les autres années, de faire disparaître de ce rapport imprimé, au dernier moment, tout le bien que j'aurai dit aujourd'hui sur leur compte.

Le R. P. Schmitz, S. J., fait une conférence sur l'*Age de la houille.*

Le conférencier expose ses idées théoriques sur la formation houillère des bassins fluvio-marins anglo-westphaliens.

Dans une première partie, il décrit les conditions physiques où se trouvèrent les continents de l'âge carboniférien. Il ne rencontre pas un fait qui semble imposer de croire à la formation sur place. Partisan de la *formation par transport* des sédiments houillers, comme de tout sédiment, il ne voit pas pourquoi l'on refuserait cette origine à un sédiment purement végétal. Certains faits, et en particulier les galets de la houille et la structure stratifiée des veines, paraissent même ne donner que de faibles probabilités à la formation par tourbage.

Il ne suffit pas en sciences de développer des idées ingénieuses, il faut les baser sur les faits. Aussi le conférencier donne-t-il une seconde partie à sa conférence. Dans cette partie, il discute les phénomènes observés qui doivent étayer certaines conceptions théoriques, celles surtout qui sont les plus personnelles à l'auteur.

Remarquons que le P. Schmitz reste toujours favorable, dans certaines mesures, aux deux théories qui prétendent vouloir trop exclusivement, à son avis, expliquer la géogénie des horizons houillers. Seulement, au point actuel de ses études, il ne voit pas encore comment allier dans la réalité les périodes passagères de formation sur place avec la formation par transport à qui revient la plus grande part.

Cette conférence a été publiée dans la *Revue des questions scientifiques*, livraison d'avril 1896.

M. J. de la Vallée Poussin fait une communication sur *l'expédition antarctique belge projetée par M. le lieutenant de Gerlache :*

Il donne d'abord un rapide exposé de l'état actuel des connaissances géographiques sur la zone australe. Il signale les deux faits capitaux qui caractérisent cette zone : d'abord l'existence, au delà de l'extrémité méridionale des trois grandes masses continentales de l'Australie, de l'Afrique et de l'Amérique, d'un vaste océan qui fait, sur une largeur de plus de 1100 kilomètres, le tour entier du globe; ensuite la présence, au sud de cet océan, au delà du cercle polaire, d'un grand nombre de terres éparses et, dans les intervalles qui les séparent, d'une barrière de glace, haute de 40 à 50 mètres, qui arrête les navigateurs dans leur marche vers le pôle. Ces terres éparses d'une part, cette barrière de glace d'autre part, aperçue en une foule de points, et dont certains navigateurs, tels que James Ross, ont parcouru le front sur des centaines de kilomètres sans y découvrir une seule ouverture, font supposer avec beaucoup de vraisemblance qu'il existe dans la zone polaire, sinon un véritable continent, tout au moins de vastes étendues émergées.

Après avoir rappelé quel climat rigoureux règne dans ces parages et les difficultés de toute nature qui font de la navigation dans les mers australes la plus pénible et la plus périlleuse de toutes les navigations, M. de la Vallée Poussin parle de l'organisation de l'expédition projetée par M. de Gerlache, des savants qui s'y associent, des principales questions scientifiques sur lesquelles ils feront porter leurs recherches, enfin, de l'itinéraire qu'ils comptent essayer de suivre.

L'expédition partirait d'Europe au mois de septembre, de façon à s'engager, vers le 15 novembre, dans la région antarctique au sud du *Cap Horn* et à l'est de la *Terre de Graham*, dans la mer découverte jadis par *Weddell*, et percer vers le sud le plus loin possible.

Après un hivernage à Melbourne et dans le Pacifique, elle s'engagerait de nouveau à l'automne de 1897 dans les mers polaires, mais cette fois dans la direction de la *Terre Victoria*, dans la région parcourue par *J. Ross*.

Cette communication a paru dans la *Revue des questions scientifiques*, avril 1896.

SÉANCE DU SOIR.

Le R. P. Lucas, S. J., a fait, à 7 heures du soir, une conférence, avec expériences et projections, sur *Les Rayons X*. Elle a été publiée dans la *Revue des questions scientifiques*, livraison d'avril 1896. En voici un aperçu :

Après deux mots d'introduction, le conférencier entre au cœur de son sujet, en montrant à son auditoire un tube de Crookes en activité. Il donne quelques détails sur la construction de cet appareil, le degré de vide qui y est requis, l'entrée ou anode et la sortie ou cathode ménagées au courant, la luminescence vert-pomme de la paroi du tube, renseignements qui font connaître aux moins initiés le mode ordinaire de production des rayons X. Ces rayons sont un effet qui, sous l'action de la décharge électrique dans une atmosphère très raréfiée, prend naissance sur la paroi aux points frappés par le jet émané de la cathode.

Reprenant point par point cette première définition, le conférencier montre, dans une série d'expériences et de projections, diverses apparences de la décharge électrique *à l'air libre*. De superbes photographies diapositives, dues à l'habileté du R. P. Van Tricht, font voir une étincelle unique enveloppée de sa gaine de filaments lumineux, des étincelles multiples, des étincelles divisées par l'introduction de corps conducteurs dans le champ. Viennent ensuite les figures de Rosetti, pôle positif et pôle négatif : clichés d'une délicatesse extrême (*).

(*) La partie optique des démonstrations expérimentales avait été confiée aux RR. PP. Thirion et Van Tricht, S. J.

Il passe à la décharge *dans une atmosphère raréfiée.* Un tube de Geissler non fermé est relié à la machine pneumatique. La décharge d'abord ne peut pas franchir la distance entre les pôles. L'air étant raréfié, bientôt jaillit un filament lumineux qui, s'élargissant peu à peu, remplit enfin tout le tube. Un grand tube de Geissler d'une magnifique luminosité montre les *stratifications* de la lumière. Puis après avoir vu la fluorescéine s'illuminer sous l'influence de la décharge, on arrive aux *tubes de Crookes.* Le conférencier fait brièvement la part des savants qui ont étudié la décharge électrique à travers les milieux très raréfiés : Goldstein, Hittorf, Spottiswoode, Crookes, etc.

Une série d'expériences met en évidence les *principales propriétés du rayonnement cathodique* dans les tubes de Crookes. C'est d'abord la direction normale à la cathode prise par les rayons, la luminescence qu'ils éveillent à leurs points de rencontre avec la paroi du tube (cathode en demi-cylindre); puis l'impossibilité où sont les rayons cathodiques de dévier spontanément de la ligne droite (tube en V); leur déviation par l'aimant (tube à écran luminescent).

Deux mots alors sur la théorie du bombardement moléculaire et la rude opposition qu'elle a rencontrée, surtout en Allemagne; puis les remarquables expériences de Hertz et de Lenard; les rayons cathodiques traversant un septum opaque d'aluminium dans le tube, sortant même du tube et observés par Lenard dans l'atmosphère au moyen des écrans luminescents et des plaques photographiques; les écrans illuminés par le rayonnement cathodique *au delà d'une paroi absolument opaque à la lumière,* les plaques photographiques impressionnées *dans une boîte d'aluminium parfaitement close.* Ce sont précisément les moyens d'observation de Röntgen et *presque* sa découverte.

Cette découverte et les grandes lignes du mémoire de l'illustre professeur de Wurtzbourg nous sont exposés :

Le tube de Crookes, enveloppé d'un papier noir qui ne laisse passer aucun rayon perceptible à l'œil, l'écran au platinocyanure de baryum, les plaques impressionnées dans leur châssis fermé.

Le R. P. Schaffers, S. J., professeur de mathématiques au Collège N.-D. de la Paix, qui, pendant toute la séance, s'est très habilement acquitté de son rôle modeste de préparateur, procède alors à la cathodographie d'une pièce de cuivre ajourée, un coq d'horloger, renfermé dans la pochette intérieure d'un double porte-monnaie : il donne une minute et demie de pose, et s'éloigne pour développer et fixer la plaque.

Pendant ce temps, défilent sous les yeux des auditeurs une longue série de clichés obtenus au moyen des rayons X et matérialisant en quelque sorte leurs principales propriétés.

Trois verres colorés plans d'égale épaisseur, rouge, vert et bleu : le bleu est très opaque. Dix lamelles de métaux divers d'égale épaisseur : la transparence remarquable de l'aluminium saute aux yeux. Un bouchon de liège entouré d'un fil métallique, percé d'épingles et renfermant quelques grains de plomb. Deux crayons. Une chaine de montre dans un écrin. Une étoile de cuivre dans une boite en aluminium. Ces clichés ont été obtenus par le R. P. Thirion. Deux autres : 1° une paire de lunettes dans leur étui, une bourse renfermant des pièces de monnaie et une clef de montre; 2° une broche dans son écrin, ont été obligeamment prêtés par M. J. De Nobele. Voilà pour la *transparence* des diverses substances à l'égard des rayons X.

Des tubes à essai renfermant respectivement de l'eau, du sulfure de carbone, du baume de Canada, où plongent des baguettes de verre, montrent que ces diverses substances *ne réfractent pas* sensiblement les rayons X.

La question des *centres d'émission des rayons Röntgen* et de *l'efficacité actinique relative des diverses régions d'un même tube* est exposée au moyen de deux clichés à compartiments. On y voit clairement l'utilité du *diaphragme* au point de vue de la netteté des images, combien peu de lumière il sacrifie, et l'insignifiance pour ne pas dire la nullité du prétendu rayonnement anodique.

Le cliché exécuté tout à l'heure est projeté à ce moment. Les moindres ouvertures de la pièce ajourée apparaissent aux yeux de tous. La vigueur et la netteté irréprochable de cette image provoquent d'unanimes applaudissements.

Viennent alors les applications anatomiques et chirurgicales des nouveaux rayons. On nous présente les squelettes de divers petits animaux cathodographiés à travers les chairs : chauve-souris, lézard, triton, orvet, poisson, et la classique grenouille. L'étoile de mer a fourni un magnifique cliché d'un détail infini. Suivent une main d'enfant de 10 ans, et une admirable main d'adulte dont le cliché a été développé par M. Renoirte de Charleroi.

Très remarquable est la main d'un enfant de 4 ans atteinte d'une carie du second métacarpien : l'os malade est gonflé et opaque. Huit jours après l'opération, nouvelle cathodographie de la même main à travers le bandage. Le périoste devrait être transparent; il se montre opaque; pourquoi? L'antisepsie a été faite au moyen de l'iodoforme. Or cette substance, en raison de l'iode qui entre dans sa composition, absorbe énergiquement les rayons X. De là, pour les chirurgiens qui voudront suivre la régénération des os au moyen de la cathodographie, la nécessité de recourir aux antiseptiques ne renfermant que C, H, O, et Az, à l'exclusion de toute autre substance de poids atomique élevé. Comme exemple, on nous montre les images cathodographiques du sublimé corrosif, de l'iodoforme, du dermatol, du permanganate de potasse (antiseptiques opaques); de l'acide phénique, de l'acide borique, du tannin, de la naphtaline, du naphtol α, du thymol et du salol (antiseptiques transparents).

La série de projections se termine par l'image röntgénienne d'un bras, cassé il y a trois mois : les points de soudure du radius et du cubitus se montrent avec toute la netteté désirable.

Le conférencier résume les applications chirurgicales possibles dès aujourd'hui et celles que l'on entrevoit pour un avenir prochain, les perfectionnements déjà apportés dans les modes de production des rayons X et dans le rendement des tubes.

Il expose brièvement les théories actuellement en présence : simple induction électrique, vibrations longitudinales, ou vibrations transversales de l'éther.

« Dieu, dit le R. P. Lucas pour terminer, semble poser aux savants de nos jours la question qu'autrefois il fit à Job : « Dis-

moi, connais-tu toutes choses? Sais-tu quelles sont les voies de la lumière et où vraiment habitent les ténèbres? » Et plus d'une fois, jetant un regard en arrière sur leurs théories, hâtives les unes, les autres péniblement élaborées, le savant doit répondre : « J'ai parlé à la légère! » Devra-t-il dire aussi avec Job : « Je mettrai ma main sur ma bouche (pour m'imposer silence à moi-même) »? Si sa science l'a rempli d'une vaine et superbe complaisance en lui-même et lui a fait oublier Dieu, le grand sage et le grand maître, oh! oui, que le savant se mette la main sur la bouche et rétracte ces écarts insensés. *Vani sunt homines in quibus non subest scientia Dei.* Mais après cet aveu plein d'une humilité qui l'exalte au lieu de l'abaisser, puisqu'elle est la vérité, qu'il se retourne encore vers ce monde que Dieu a livré à ses recherches, qu'à l'œuvre il sache reconnaître l'artisan, admirer les perfections du Maître de l'univers, et dans la beauté et la magnificence de la créature adorer le Créateur.

» Voilà son rôle! Combien, hélas! l'oublient. Vous, Messieurs et chers Confrères, vous ne l'oubliez pas, et ce sera votre meilleur titre de gloire! »

D'unanimes applaudissements accueillent la fin de cette magnifique conférence.

M. l'abbé Coupé montre ensuite, en projections, d'admirables photographies américaines de fleurs où l'on obtient, avec du blanc et du noir seulement, l'illusion de la couleur en même temps qu'un relief extraordinaire.

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU 15 AVRIL 1896.

L'assemblée générale est présidée par M. Vicaire, inspecteur général des mines, président de la Société.

M. le chanoine Delvigne, délégué de la Société bibliographique de Paris, donne lecture du rapport suivant sur les travaux de cette Société pendant l'année écoulée :

Messieurs,

Un usage auquel nous sommes heureux de nous conformer nous oblige à vous faire un rapport, quelque succinct qu'il puisse être, touchant les travaux de la Société bibliographique de Paris.

Après tout ce qui vous a été dit, depuis trois ans, sur cette association fondée en 1868, nous serons bref aujourd'hui.

La *Revue des questions historiques,* recueil trimestriel, paraît toujours avec une régularité exemplaire. Le numéro d'avril, expédié aux abonnés avant-hier soir, renferme des travaux fort intéressants : une *Étude sur la France géographique et militaire sous Philippe de Valois,* — c'est pour nous la grande époque de Jacques Van Artevelde, — et un travail d'après la correspondance inédite de Napoléon sur la guerre d'Espagne de 1807 à 1813. Je n'ai besoin que de dire combien cette lutte héroïque de la Péninsule a encore à gagner en éclaircissements. Marbot n'a pas tout dit, ni tout su.

Qu'apporter à l'éloge que l'on doit décerner au *Polybiblion?* Cette revue bibliographique est une des meilleures sources d'informations qu'on puisse avoir. Comptes rendus de livres parus, simple annonce avec indication de prix dans la partie *technique,* faits divers; c'est complet.

Enfin, la Société a son bulletin mensuel, son assemblée générale fixée au mois de mai. Elle a depuis quelques années tenu des congrès régionaux à Rouen, au Mans, à Montpellier, à Besançon. Nous ne parlerons que pour mémoire des congrès de 1878 et 1888. J'ai quelque regret à le proclamer : nous connaissons trop peu en Belgique ces travaux si pleins de ressources, si riches en documents parfois indispensables, qui plus répandus auraient épargné plus d'une méprise aux chercheurs.

Cette dernière réflexion nous amène à vous parler de la *Société d'histoire contemporaine.* Cette association, à nombre restreint de 250 membres, jusqu'à présent du moins, publie annuellement quelques volumes de mémoires relatifs aux temps postérieurs à 1789. Le prix de la souscription annuelle est de

vingt-cinq francs. Si l'on objectait, à tort selon nous, que les deux tomes de M. le marquis de Beaucourt, président jubilaire de la Société, sur *La captivité et les derniers moments de Louis XVI*, concernent plus spécialement l'histoire de France, nous répondrions que l'*Invasion austro-prussienne* (1792-1794) a eu la Belgique pour théâtre. En ce moment même, on nous annonce en distribution un volume de M. Victor Pierre sur la déportation des prêtres à l'époque du Directoire. Il est suffisamment connu que notre clergé belge a constitué la grande partie des victimes envoyées à Ré, à Oléron, à Cayenne. C'est la Terreur blanche succédant à la Terreur de 1793.

Appelons de tous nos vœux le jour où la Société bibliographique, bien comprise dans son but et ses moyens d'action, verra augmenter le chiffre de ses adhérents en Belgique.

M. le Dr J.-F. Heymans, professeur à l'Université de Gand, fait une conférence sur *Le Cœur*, dont le résumé sera publié dans la *Revue des questions scientifiques*. En voici un aperçu :

Le cœur est considéré par les hommes de tous les temps et de toutes les latitudes comme le siège de la sensibilité morale et même de la volonté, et pourtant cet organe ne fait pas partie du système nerveux. Quelle est la raison physiologique de cette transposition fonctionnelle? C'est que l'existence du cœur et son influence se révèlent en nous à chaque instant et jusque dans le moindre de nos actes.

La cellule nerveuse, comme tous les autres éléments de l'organisme, est le siège de processus chimiques; le cœur, en se contractant, amène à toutes les cellules les substances nutritives nécessaires à l'assimilation et emmène les produits nuisibles de la désassimilation; en outre, la circulation permet au sang de se purifier et de se régénérer.

Tout trouble fonctionnel du cœur entraine des troubles nutritifs et dès lors fonctionnels dans tous les organes, spécialement dans le système nerveux. Réciproquement, l'état d'être du système nerveux agit sur le fonctionnement du cœur.

Le système vasculaire coronaire possède une innervation pro-

pre; dès lors, la circulation et la contraction du myocarde se trouvent sous l'influence vaso-dilatatrice et vaso-constrictive d'un centre vaso-moteur central.

La fibre musculaire du cœur n'est pas automatique; l'excitation lui est amenée par la fibre nerveuse motrice qui est elle-même en rapport avec les cellules ganglionnaires intracardiaques. Celles-ci non plus ne sont pas autonomes. D'après l'auteur, la contraction cardiaque excite le système nerveux sensitif intracardiaque de l'endocarde et des valvules; cette excitation centripète est réfléchie dans les centres intracardiaques en excitation motrice. Le cœur se contracte parce qu'il s'est contracté, de même qu'on respire parce qu'on a respiré.

Les centres intracardiaques sont des relais intercalés sur le trajet des nerfs inhibitifs et accélérateurs du cœur; ces nerfs extracardiaques prennent leur origine dans des centres bulbaires dont la réceptivité et le pouvoir d'émission sont régis par les conditions nutritives et l'état d'activité de tout le système cérébro-spinal, mais spécialement des centres psychiques. Le cœur bat à l'unisson avec l'état d'excitation du système nerveux.

Nous avons conscience, au moins vaguement, des modifications cardiaques comme des modifications psychiques; nous associons ces dernières au phénomène sensible de l'activité cardiaque, et celle-ci devient ainsi l'expression de nos différents états d'être.

Le R. P. Hahn, S. J., demande certains éclaircissements au conférencier, qui complète sur quelques points sa conférence, en entrant dans des détails techniques que nous ne pouvons résumer.

Le R. P. Van Tricht, S. J., fait ensuite une conférence sur *l'année scientifique et religieuse.*

Le P. Van Tricht expose, dans ses grandes lignes, le bilan scientifique de l'année au point de vue de la science chrétienne.

On a affirmé, dit-il, qu'il existe une lutte incessante entre la Science et la Foi. La *Société scientifique* a assumé la mission de

montrer que la foi combat non pas contre la vraie science, mais avec elle.

Il y a longtemps que nous devrions être réduits en poudre, s'il fallait en croire nos adversaires. Et nous nous portons bien, et nous prenons toujours de nouvelles forces.

Il y a quelque trente ans, devant le phénomène d'un savant croyant, il y avait dans le gros public un véritable ébahissement. Nous n'en sommes plus là.

De l'année qui vient de s'écouler, trois grands faits émergent au point de vue qui nous occupe tout particulièrement, de la science chrétienne :

1° L'article de M. Brunetière dans la *Revue des Deux Mondes* relatif à la « banqueroute de la science » et les réponses auxquelles cet article a donné lieu;

2° Le discours de lord Salisbury à Oxford sur la science et la foi;

3° La mort de l'illustre Pasteur avec la croix en main.

Admis en présence du chef suprême de l'Église, M. Brunetière a ressenti une impression profonde, toute nouvelle pour lui, d'où est sorti l'article que, de retour à Paris, il a publié le 1er janvier dans la *Revue des Deux Mondes.*

Cet article, qui éclata comme une bombe sur la tête des savants incroyants, se résume dans ces quelques mots : *Pas plus que de pain, l'homme ne peut se passer de foi.*

Il faut reconnaître cependant qu'en parlant de la « banqueroute de la science », M. Brunetière a été un peu trop loin. Car la science ne fait pas de vaines promesses ; ce sont les savants — savants charlatans — qui en font. Il y en a, et beaucoup, qui sont hantés par la haine du dogme. C'est à la religion qu'ils en veulent. Ce ne sont plus des savants, alors, ce sont des sectaires.

Qu'elle est noble et grande, au contraire, l'attitude du savant qui joint aux données de l'expérience humaine les lumières surnaturelles de la foi! Après avoir traversé le domaine de la matière, il entre dans le domaine de l'esprit. Ce domaine-ci, il l'étudie aussi, mais avec de nouveaux instruments, laissant là ses cornues et ses éprouvettes. Plus loin encore, il se trouve devant

l'inconnaissable; il s'incline, et se repose en Dieu et dans sa foi. Quel calme! que de splendeur! On dirait un beau temple. Il sait d'où il vient, où il va; il sait ce qu'il doit faire. Ce n'est pas la science humaine qui lui a enseigné cela. Ce n'est pas à elle non plus qu'il l'a demandé. Aussi ne lui a-t-elle pas fait faillite.

L'article de M. Brunetière fit un tapage énorme et souleva de vives protestations. La première en date est celle de M. Charles Richet, de la *Revue rose.*

M. Richet, au fond, ne répondit pas grand'chose. La science, dit-il, n'a pas fait les promesses qu'on lui attribue. Les savants doivent être très modestes. Nous ne savons le tout de rien. Ceux qui sont les plus savants connaissent le mieux l'étendue de leur ignorance.

Voilà une poignée de bons aveux. Mais M. Richet s'égara vers la fin.

Selon lui, la science est la source de tous les progrès réalisés depuis l'origine de la race humaine. La science établit les bases de la morale en montrant comment celle-ci est fondée sur les poussées instinctives de l'homme. La base de la morale est donc l'instinct perfectionné par la méthode scientifique et développé par l'évolution progressive.

Pauvre thèse! Quelle est donc la morale qui peut être basée sur l'instinct? Où l'instinct pousse-t-il l'homme? A un égoïsme effréné. Il lui dit : Jouis, sois fort, soit habile; marche sur les autres, s'il le faut, mais triomphe. Alors que le christianisme dit à l'homme : Soit juste. Le savant chrétien sait d'où il vient, où il va, ce qu'il doit faire. Ce n'est pas par la science qu'il le sait. Elle lui a donné tout ce qu'elle pouvait lui donner, et il n'a jamais songé à lui demander quoi que ce fût sur ses destinées.

La déclaration de M. Brunetière, outre la réponse de M. Richet, provoqua encore le fameux dîner de Saint-Mandé où, au dessert, entre la poire et le fromage, on devisa science et religion. M. Poincaré parla avec correction et dignité. Puis M. Berthelot, dans un discours grandiloquent, toucha à une foule de choses, mais ne démontra nullement que la science incrédule n'avait pas fait banqueroute à l'humanité. Puis MM. Perrier et

Richet, encore cette fois les plus sérieux, parlèrent à leur tour; puis M. Brisson, et enfin M. Zola, qui se borna à constater que si la foi en arrivait à triompher dans la direction de l'humanité, comme elle avait triomphé jadis, on mettrait ses livres à l'index et on le mettrait, lui, Zola, en prison!

Vers le même temps parut la traduction en langue française d'un discours que lord Salisbury avait prononcé un an auparavant et qui répondait d'avance au discours de M. Berthelot. L'illustre homme d'État y proclame sans détour cette thèse que les limites de la science humaine sont bien étroites encore sur les questions d'origine et de destinée. Ils sont rares aujourd'hui, dit-il, les hommes de pensée qui croient que les idées religieuses sont dans la dépendance des sciences physiques, et que l'analyse des résidus qui se trouvent au fond des creusets des savants peut donner une indication quelconque sur les destinées humaines. On nous dit que si la théorie de la sélection naturelle n'est pas suffisante pour expliquer la marche progressive de l'humanité, il faudra recourir à cette extrémité d'admettre qu'un pouvoir supérieur règle l'ordre et la marche de l'univers. — Eh! bien, s'écrit lord Salisbury, nous autres, à Oxford, nous ne nous effrayons pas de cette extrémité.

Nous avons la morale naturelle, dit le P. Van Tricht, nous l'étudions avec soin, mais nous sentons bien qu'elle n'est pas de force à nous diriger.

Du grand débat scientifique dont je viens de parler, il ressort qu'*il nous faut Dieu*. La science ne saurait remplacer Dieu dans le gouvernement de la volonté humaine.

La jeunesse de notre temps a un penchant théorique vers la morale chrétienne; elle admire le Sermon sur la montagne, mais elle repousse le dogme.

La réponse à son incroyance, c'est Pasteur, à qui M. Berthelot lui-même a rendu un hommage ému et sincère dont tous les termes sont admirables. M. Berthelot a rappelé qu'en 1860, en réfutant contre Pouchet la théorie de la génération spontanée sous laquelle on prétendait écraser la donnée d'un Dieu créateur, *Pasteur finit par enclouer tous les canons de son adversaire.*

Le discours d'entrée de Pasteur à l'Académie fut une vaillante profession de foi spiritualiste.

Répondant un jour à un de ses élèves, qui lui exprimait son étonnement de le voir croyant, Pasteur dit : Mon enfant, c'est parce que j'ai beaucoup étudié que j'ai la foi d'un paysan breton : si j'avais étudié plus encore, j'aurais la foi d'une paysanne bretonne.

Et sur le cercueil de Pasteur, à qui la terre entière a rendu hommage, brillait l'image du Christ sauveur. Et, de ses lèvres mourantes, il avait baisé la Croix.

En quoi la foi de Pasteur a-t-elle gêné ses recherches?

L'éloquent orateur termine par un tableau où il montre comme dans un aréopage illustre tous les grands esprits qui ont exercé sur l'humanité une impression durable et salutaire. Toute cette élite de l'humanité a cru en Dieu.

Continuons donc à marcher devant nous dans le chemin de la science unie à la foi; elle nous mènera à la vérité, car elle aboutit au Christ.

Vers la fin de l'année dernière, l'Institut de France célébrait son jubilé. Ses membres croyants — et d'autres aussi — assistèrent en grand nombre à une messe célébrée pour les membres défunts par trois membres de l'Institut. Et, après la messe, Mgr Perraud, de l'Académie française, a donné la bénédiction papale, et devant cette bénédiction du Vicaire de Jésus-Christ la science fidèle a courbé son front glorieux.

L'année a donc été bonne pour la science chrétienne, et elle peut chanter un *Te Deum* pour célébrer sa victoire.

Le R. P. Van Tricht s'est rassis au milieu de chaleureux applaudissements. M. le Dr Guermonprez, professeur à l'Université catholique de Lille, et M. le Président l'ont remercié pour l'hommage mérité et éloquent qu'il avait rendu à un des plus illustres fils de la France, Pasteur.

La conférence du R. P. Van Tricht a paru dans la *Revue des questions scientifiques*, avril 1896.

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU JEUDI 16 AVRIL 1896.

La séance est présidée par M. Vicaire, inspecteur général des mines, président de la Société.

Il est donné lecture du rapport du R. P. George et de M. Lagasse, commissaires chargés d'examiner les comptes du Trésorier pendant l'année 1895.

Recettes et dépenses de la Société scientifique pendant l'année 1895.

Revue des questions scientifiques.

Recettes.		Dépenses.	
Produit des abonnements . . fr.	9275 30	Impression, expédition, C^{on} . fr.	5810 83
Subside de la Société	2349 78	Collaboration	4743 00
		Administration et divers . . .	1071 25
	11625 08		11625 08

Séances, Annales et Bulletin.

Cotisations . . . . fr.	4996 80	Impression, expédition . . . fr.	3597 40
Subside de la Société	672 85	Indemnités aux secrétaires des sections, administration, divers	1781 25
		Location des locaux	291 00
	5669 65		5669 65

Société.

Produit des coupons du portefeuille. . . . . fr.	3897 15	Subside à la *Revue* . . . . fr.	2349 78
Intérêts des comptes courants .	41 45	— aux *Annales* . . .	672 85
Boni sur une action remboursée.	5 45	— pour recherches scient.	500 00
		Droits de garde	95 35
		Excédent passé au capital. . .	326 07
	3944 05		3944 05

Ces comptes sont approuvés par l'Assemblée. On peut les résumer comme il suit :

Recettes . . . . fr.	18 216 15
Dépenses	17 890 08
Boni . . fr.	326 07

M. le Secrétaire général a fait ressortir, à propos de ce faible boni, la nécessité pour tous les membres de recruter de nouveaux adhérents et de nouveaux abonnés à la *Revue*, sans quoi la Société pourrait être forcée d'entamer son capital et de supprimer tout subside pour recherches scientifiques.

Le R. P. Hahn, S. J., fait ensuite une conférence sur *L'Électricité et la Vie*. Voici un aperçu de cette conférence, qui a été publiée dans la *Revue des questions scientifiques*, avril 1896.

Tout progrès nouveau des sciences physiques et chimiques a servi à éclairer quelqu'un des phénomènes vitaux, mais chaque fois aussi quelque savant a conçu l'espérance ambitieuse d'avoir enfin arraché à la vie son secret. A peine Galilée avait-il fondé la mécanique sur de nouvelles bases, que Descartes transformait les animaux en de simples machines à ressorts et à leviers. Depuis Lavoisier, ils sont devenus des moteurs chimiques, des machines à feu dont l'énergie est due à la combustion.

Vains efforts! Les êtres vivants sont certainement soumis aux lois générales de la matière brute, en ce sens qu'ils ne peuvent créer ni un atome de matière ni une particule d'énergie, mais le cycle parcouru par la matière et l'énergie dans l'intérieur du corps vivant est essentiellement différent de celui des corps inanimés.

L'électricité, qui a jeté de si vives clartés sur tant de choses, qui nous fait même pénétrer actuellement dans l'invisible, ne répandrait-elle pas non plus un peu de lumière sur le fond ténébreux de la vie?

L'électricité sans doute a un grand nombre de points de contact avec la vie. Les animaux peuvent même remplir le rôle des trois facteurs qui interviennent dans une installation électrique.

Une installation électrique est en tous points semblable à une installation hydraulique. Dans celle-ci, on trouve un réservoir d'eau fournissant la pression, une canalisation offrant toujours une certaine résistance, une machine actionnée par le courant. De même l'installation électrique comprend son réservoir d'élec-

tricité donnant aussi la pression électrique, sa canalisation consistant en fils conducteurs, une machine mise en branle par le flux circulant dans les fils.

L'organisme est d'abord un conducteur, mais un très mauvais conducteur. D'après les expériences de Charpentier, la résistance qu'opposent quelques millimètres de nerf équivaut à celle de 1000 kilomètres de fil télégraphique. Chose curieuse, le nerf vivant oppose une résistance double de celle du nerf mort; mais cela ne semble pas être un désavantage pour l'être vivant, car ce résultat peut bien s'interpréter en ce sens que le nerf absorbe à son profit une partie de l'énergie du courant.

L'organisme peut être aussi actionné par l'électricité, comme l'est une machine. De là les contractions musculaires et les impressions sensitives déterminées par l'électricité. Cependant, comme le montrent les belles expériences de d'Arsonval, quand il s'agit de courants alternatifs se renversant très souvent, c'est-à-dire un million de fois au moins par seconde, une intensité capable de tuer un homme avec une moindre fréquence n'occasionne ni douleur ni contraction musculaire. L'électricité dynamique participe alors des propriétés de l'électricité statique, et on a suggéré l'idée qu'elle glisse simplement sur la peau sans pénétrer dans l'intérieur de l'organisme.

Enfin l'organisme sert de réservoir d'électricité, témoins les poissons électriques, la torpille entre autres, dont le courant peut faire briller d'un vif éclat jusqu'à trois lampes à incandescence.

Mais c'est là un fait exceptionnel, car chez les animaux ordinaires la quantité d'électricité observable est excessivement faible et peut même être attribuée à l'opération chirurgicale nécessaire pour mettre à nu le nerf. Aussi semble-t-il étrange qu'on ait pu vouloir expliquer tous les phénomènes vitaux par l'électricité. Cependant, dès 1848, Du Bois-Reymond crut avoir démontré cette théorie. Dans un accès d'enthousiasme, il s'est même écrié « qu'il avait réalisé le rêve séculaire des physiciens et des physiologistes en prouvant l'identité de l'influx électrique et de l'influx nerveux ». Son enthousiasme baissa depuis, car en 1866 il nie cette identité, mû surtout par la différence de vitesse de

propagation des deux courants, le courant électrique s'élançant avec une vitesse comparable à celle de la lumière, tandis que le courant nerveux marche péniblement avec la vitesse de nos trains actuels.

M. Solvay ne s'est pas laissé décourager par l'exemple de son prédécesseur. Il a repris, en 1887, l'idée du professeur de Berlin. Même enthousiasme au début, car il ne craignait pas de dire alors que la théorie avait « l'absolue certitude » que peut fournir la science de la nature, et que ses adversaires en étaient réduits à « imaginer » des « hypothèses extraphysiques et abstraites », impossibles à soutenir « si on veut rester sérieux ».

En 1893, dans le discours distribué au banquet d'inauguration de son Institut, la réflexion l'a fait changer de ton, et il avoue devoir être très content si l'on veut bien admettre « l'électricité comme *se prêtant* à une solution *satisfaisante* du problème, à laquelle il *paraît désirable* de s'arrêter, *tout au moins jusqu'à ce que* l'avenir nous ait révélé l'existence d'un nouveau mode de transformation, si tant est qu'il en existe ».

C'est qu'il était fort difficile d'expliquer les 270 000 kilogrammètres fournis par un ouvrier en un jour en recourant à la pile animale supposée, qui ne donnerait qu'un demi-milligramme-millimètre par seconde.

M. Solvay renonce même à assimiler les filets nerveux à des fils télégraphiques. La pile supposée serait en effet très singulière, car, par une anomalie qui intriguerait fort tous les électriciens, les fils conducteurs, au lieu d'être en dehors de l'instrument, seraient immergés dans la pile elle-même, et si même dans ces conditions étonnantes on obtenait de l'électricité, elle choisirait, contre son habitude, les voies les plus résistantes pour s'écouler.

Il est ensuite donné lecture du résultat des élections pour le Bureau et le Conseil.

Sur la proposition de M. Mansion, des remerciements sont votés à M. le Président sortant, et la session est déclarée close.

LISTE DES OUVRAGES

OFFERTS A LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES,

du 1er décembre 1895 au 1er décembre 1896.

Bilan géographique de l'année 1895, par F. Alexis M. G. — Anvers, 1896.

Cambridge geographical Series. Ethnology in two parts : I. Fundamental Ethnical Problems ; II. The Primary Ethnical Groups, by A. H. Keane, F. R. G. S. — Cambridge, 1896.

La théorie atomique et la théorie dualistique, par E. Lenoble.— Paris, 1896.

Cours de physique de l'École polytechnique, par M.-J. Jamin. Premier supplément, par M. Bouty. — Paris, 1896.

Essai de paléontologie philosophique, par Albert Gaudry. — Paris, 1896.

Rocas hipogénicas de la Isla de Cuba y roca eruptiva de Fortuña (provincia de Murcia), par D. Ramón Adán de Yarza, del Boletin de la Comisión del Mapa geológico de Espagna. — Madrid, 1896.

Table de triangulaires de 1 à 100 000, suivie d'une table de réciproques des nombres à 5 chiffres, de 1 à 100 000, et d'une table de sinus et de tangentes naturels variant de 30'' à 30'', de 0° à 90°, avec texte explicatif, par A. Arnaudeau. — Paris, 1896.

Dents de rhinocéros. Discussion sur la terrasse de Villefranche, par MM. d'Ault du Mesnil, G. de Mortillet, d'Acy et Fardy. Extrait des *Bulletins de la Société d'Anthropologie de Paris*, tome VII, IVe série. — Paris, 1896.

Étude historique sur les huit derniers mois de la vie publique de Notre-Seigneur (J.-L.-A. Azilers). Extrait des *Études ecclésiastiques*. — Paris, 1895.

Cours d'astronomie à l'usage des étudiants des Facultés des sciences, par B. Baillaud. Première partie. — Paris, 1893. Deuxième partie. — Paris, 1896.

La conversion d'Augustin Thierry, à propos du centenaire de sa naissance, par le P. H. Chérot, S.-J. Extrait des *Études religieuses*, octobre et novembre 1895. — Paris, 1895.

Quelques observations sur les muscles peauciers du crâne et de la face dans les races humaines, par Théophile Chudzonski. — Paris, 1896.

Le climat de Rio de Janeiro, par L. Cruls. D'après les observations météorologiques faites pendant la période de 1815 à 1890. — Rio de Janeiro, 1892.

Méthode graphique pour la détermination des heures approchées des éclipses du soleil et des occultations, par L. Cruls. — Rio de Janeiro, 1894.

Determinâçao das posiçôes geographicas de Rodeio, Entre-Rios, Juiz de Fóra, Joào Gomes e Barbacena, publicada par L. Cruls. — Rio de Janeiro, 1894.

Adéno-fibrome du sein; extirpation de la glande; guérison, par M.-V. Desbonnets.

Sur la forme des calschistes de Tournai, Tournaisien *d*, par G. Dewalque. Extrait des *Annales de la Société géologique de Belgique*. — Liége, 1896.

Sur l'âge des fossiles trouvés à Bouffioux, par G. Dewalque. — Liége, 1896.

Recherches physiologiques et anatomiques sur *Drosophyllum lusitanicum*, par A. Dewèvre. Extrait des *Annales des sciences naturelles*, 7e série. — Paris.

El Hombre-Mono y los precursores de Adán ante la ciencia y la teología, por Fr. Dierckx, S. J., opusculo traducto del francés, por José Fuster Tomás. — Madrid, 1895.

Le Soleil et le firmament tournent, mais la terre ne tourne pas (J. d'Estienne). Extrait de la *Revue du monde catholique*, décembre 1895.

Étude statistique et critique sur le mouvement de la population de Roubaix (1469-1744-1893), par le Dr Alex. Faidherbe. Ouvrage couronné par l'Académie des sciences. — Roubaix, 1896.

Détermination analytique d'une formule nouvelle de la dispersion de la lumière dans les milieux homogènes isotropes, considérée jusqu'ici comme une formule empirique, par Eug. Ferron. Extrait des *Publications de l'Institut grand-ducal de Luxembourg*. Luxembourg, 1894.

Essai d'une théorie mathématique sur les fractures terrestres et les diaclases artificielles, par Eug. Ferron. *Ibid.* — Luxembourg, 1892.

Mémoire analytique sur les divers systèmes suivis pour établir les équations fondamentales de la théorie de la lumière, par Eug. Ferron. *Ibid.* — Luxembourg, 1888.

Nouveau système d'exposition du principe des vitesses virtuelles en mécanique, par Eug. Ferron. *Ibid.* — Luxembourg, 1882.

Théorie nouvelle sur le mouvement de roulement des cylindres solides sur les surfaces planes et son application aux bicycles, par Eug. Ferron. *Ibid.* — Luxembourg, 1893.

Explorations scientifiques des cavernes de la vallée de la Méhaigne, par Jul. Fraipont et F. Tihon. — Bruxelles, 1896.

Du sulfate de duboisine dans le traitement de la paralysie agitante, par le professeur X. Francotte. — Bruxelles, 1896.

Le réflexe radio-bicipital, par le Dr X. Francotte. — Gand, 1896.

Pseudo-paralysie générale alcoolique à symptomatologie incomplète, mégalomanie alcoolique, par le Dr X. Francotte. — Gand, 1895.

De la symptomatologie et du diagnostic de la paralysie générale. Rapport présenté à la Société de médecine mentale, par le Dr X. Francotte. — Gand, 1895.

Démonstration d'un cas d'hétérotopie de substance médullaire, par le Dr X. Francotte — Gand, 1896.

Ein demonstratives Experiment, die Nierenpathologie betr. von Dr. X. Francotte. *Abdrück aus dem Centralblatt für allgemeine Pathologie und pathologische Anatomie.*

Immunisation against Serpent's Venom and the Treatment of snake-bite with antivenene, by Prof. Fraser, 1896.

Physique, chimie, mécanique, météorologie. Doctrine fondamentale et nouvelle de la transformation des forces, par Henri Frédéric. — Bruxelles-Paris.

Démonstration de l'axiome XI d'Euclide, par Michel Frolow. — Paris, 1895.

Una responsabilidad de nuestros cafés, par el Dr Antonio de Gordon y de Acosta. — Manila, 1896.

Discurso leido el dia 19 de mayo de 1896 en la sesion solemne commemorativa de la fundacion de la Real Academia de Ciencias Medicas, Fisicas y Naturales de la Habana, por el Presidente Dr Antonio de Gorpon y de Acosta. — Habana, 1896.

Autoplastie de la main, par le Dr Guermonprez. — Lille-Paris, 1895.

Autoplastie du tronc au moyen de deux lambeaux empruntés au bras droit, par F. Guermonprez. Extrait des *Archives provinciales de chirurgie*, déc. 1894. — Paris, 1895.

Éloge du professeur Vannerts, par M. Guermonprez. — Lille, 1893.

Kyste séreux du mésentère, son origine, son traitement par la marsupialisation, par M. Guermonprez. — Lille, 1895.

Résection partielle des deux os de l'avant-bras droit après les traumatismes graves limités aux parties molles, par le Dr Guermonprez. — Lille, 1891.

Du respect de la vie humaine, par le professeur F. Guermonprez. Extrait de la *Science catholique*. — Paris-Lyon, 1892.

Consultation sur un cas d'inaccessibilité au mariage, par le Dr Guermonprez. Extrait du *Journal des sciences médicales de Lille*. — Lille, 1894.

Accidents de la chloroformisation, par le Dr Guermonprez. *Ibid.*

Usage des éponges en chirurgie, par le Dr Guermonprez. *Ibid.*

Les radiations nouvelles. Les rayons X et la photographie à travers les corps opaques, par Ch.-Ed. Guillaume. — Paris, 1896.

Les principes du positivisme contemporain, exposé et critique, par Jean Halleux. — Louvain, 1895.

Les bólidos, par le Dr D. Francisco Iñiguez e Iñiguez. Estudio publicado, por *El Magisterio español*. — Madrid, 1896.

Optique géométrique, septième mémoire. Propriétés polarisatrices des faisceaux de rayons de nature quelconque, par l'abbé Issaly. Extrait des *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, t. I, 5e série.

Le sens intime en psychologie, par Albert Lévy. — Bruxelles, 1896.

Psychologie du caractère, contribution à l'ethnologie, par Albert Lévy. — Bruxelles-Paris, 1896.

Difficultés inhérentes à l'hypothèse nébulaire et à la conception de l'état primitif des planètes sous forme d'anneaux, par le vicomte du Ligondès. Extrait du *Cosmos* du 9 mai 1896. — Paris.

Les applications de l'électrolyse à la métallurgie, par M. U. Le Verrier. — Paris, 1896.

A geographical history of Mammals, by R. Lydekker. — Cambrigde, 1896.

Ostéo-sarcome de la tête de l'humérus propagé à la synoviale; désarticulation scapulo-humérale suivie d'une amputation inter-scapulo-thoracique; shock opératoire; guérison, par J. Masson.

Les *Belostoma* fossiles des Musées de Munich et de Harlem, par Fernand Meunier. Extrait des *Mémoires de la Société zoologique de France* pour l'année 1896. — Paris, 1896.

Note sur les *Carabidae* des schistes de Schernfeld, par Fern. Meunier. Extrait du *Bulletin de la Société zoologique de France* pour l'année 1895.— Paris, 1895.

Un diplomate anglais au début du siècle, par le marquis de Nadaillac. Extrait du *Correspondant*. — Paris, 1895.

Description of an artificial eye intended for the Study of Ophthalmology and the Objective Determination of Ametropia, by Ch.-A. Olivier, M. D. Reprinted from *American Ophthalmological Society Transactions*, 1894.

History of a Case of endurated (Hunterian) chancre of the Eyelid, by Ch.-A. Olivier. A. M., M. D. Reprinted from the *Codex Medicus Philadelphiae*, october 1894. — Philadelphie, 1894.

Estudio del terreno pliocenico de Tarrasa y de sus relaciones con las formaciones contiguas, par D. Domingo Palet y Barba. — Barcelone, 1896.

Epilogo dei ragionamenti tenuti nella Pontificia Academia Tiberina l'anno 1895, letto nella tornata del di 20 gennaio 1896, da Giuseppe Patroni. — Roma, 1896.

Cours de la Faculté des sciences de Paris. Traité d'analyse, par Émile Picard. Tome III. — Paris, 1896.

Observations pluviométriques et thermométriques faites dans le département de la Gironde de juin 1893 à mai 1894. Note de M. G. Roujet. — Bordeaux, 1894.

Leçons de géométrie, par Eugène Rouché et Ch. Comberousse. Première partie, à l'usage des élèves de la classe de quatrième (moderne). — Paris, 1896.

Solutions détaillées des exercices et problèmes énoncés dans les Leçons de géométrie, par Eug. Rouché et Ch. Comberousse. Première partie, à l'usage des élèves de la classe de quatrième (moderne). — Paris, 1896.

Liçòes de chimica. Chimica organica, pelo Dr Francisco José de Souza Gomes. 1° fasciculo. — Coimbra, 1895.

La volition animale, étude de physiologie nerveuse, par le Dr Surbled. Extrait de la *Science catholique*, décembre 1895. — Arras-Paris, 1895.

L'imagination, étude de psycho-physiologie, par le Dr Surbled. Extrait de la *Science catholique*, janvier 1896. — Arras-Paris, 1896.

L'œil et le cerveau, étude de physiologie nerveuse, par le Dr Surbled. Extrait de la *Revue Thomiste*. — Paris, 1896.

La vie à deux, hygiène du mariage, par le Dr Surbled. — Paris, 1896.

Goitre parenchymateux; ablation totale; guérison, par F. Tabier. Publication du *Journal des sciences médicales de Lille*.

Recueil complémentaire d'exercices sur le calcul infinitésimal, par F. Tisserand. Deuxième édition, augmentée de nombreux exercices sur des variables imaginaires, par P. Painlevé. — Paris, 1896.

Examen critique de la carte pluviométrique de la Belgique de M. A. Lancaster, par J. Vincent. Extrait du *Bulletin de la Société belge d'astronomie*. — Bruxelles.

Leçons sur la résolution algébrique des équations, par H. Vogt. — Paris, 1895.

Bible, science et foi, par R.-J. Zahm, C. S. C., traduit de l'anglais par M. l'abbé Flageolet. — Paris.

De l'enseignement scientifique dans les séminaires, par l'abbé N. Boulay. — Paris.

Formation mécanique du système du monde, par le lieutenant-colonel R. du Ligondès. — Paris, 1896.

OEuf et graine, par T. Noff-Ali. — 1896.

Optique géométrique, huitième mémoire. Complément aux propriétés polarisatrices des faisceaux de rayons en général, par l'abbé Issaly. Extrait des *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux*.

La mémoire, étude de psycho-physiologie, par le Dr Surbled. — Arras, 1896.

Prace matematyczno-fizyczne Wydawane w. Warzanré, t. I.-VII. — Varsovie, 1888-1896.

Encyclopédie scientifique des aide-mémoire. Section de l'ingénieur. Lieutenant-colonel Moëssart : La topographie. — A. de Gouilly : Géométrie descriptive; point, ligne droite, plan; géométrie descriptive : sphère, cône et cylindre de révolution. Sections coniques, géométrie descriptive, changements de plans de projection, rotations, trièdres, polyèdres. — H. Boursault : Calcul du temps de pose en photographie. — Seguela : Les tramways. — Julien Lefèvre : La spectroscopie, la spectrométrie, éclairage électrique. — E. Hennebert : Attaque des places, travaux de campagne, communications militaires. — Moisson et Ouvrard : Le nickel. — E. Barillot : Distillation des bois. — Ariès : Chaleur et énergie. — F. Loppé : Accumulateurs électriques.

⁂

Annales de l'Observatoire royal de Belgique. — Bruxelles, 1896.

Annuaire de l'Observatoire royal de Belgique. — Bruxelles, 1896.

Archives de pharmacodynamique, publiées par E. Gley et J.-F. Heymans. — Vol. II, 1er et 2e fascicules. — Gand-Paris, 1895.

Bulletin de l'Académie royale de Belgique. — Bruxelles.

Bulletin de la Société belge de géologie, de paléontologie et d'hydrologie, t. VIII, fasc. 4, t. IX. — Bruxelles, 1896.

Bulletin de la Société belge de microscopie. — Bruxelles, 1896.

Bulletin de la Société centrale forestière. — Bruxelles.

Bulletin de l'Institut international de bibliographie, 1895-1896, 1re année, nos 2 et 3. — Bruxelles.

Ciel et Terre. — Bruxelles, 1896.

Le climat de la Belgique en 1895, par A. Lancaster. — Bruxelles, 1896.

Mémoires de l'Académie royale de médecine de Belgique. — Bruxelles, 1896.

La Revue générale. — Bruxelles, 1896.

Revue de l'Université de Bruxelles. — Bruxelles.

La Revue néo-scolastique. — Louvain.

Annales de la Faculté des sciences de Marseille, t. V, fasc. 4; t. VI, fasc. 1, 2, 3; t. VII. — Paris.

Annales de la philosophie catholique. — Paris, 1896.

Annuaire du Bureau des longitudes pour l'an 1896. — Paris.

Annuaire de l'Observatoire municipal de Montsouris pour l'année 1896.— Paris.

L'Anthropologie. — Paris, 1896.

Le Cosmos. — Paris.

Études religieuses, philosophiques, historiques et littéraires. — Paris.

Journal de l'École polytechnique. — Paris, 1896.

Journal des sciences médicales de Lille. — Lille, 1896.

Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. — Paris-Bordeaux, 1895.

Le mois bibliographique. — Paris-Poitiers.

Polybiblion. — Paris, 1896.

Le Progrès médical. — Paris, 1896.

La Réforme sociale. — Paris, 1896.

Répertoire bibliographique des sciences mathématiques. — Paris, 1895-1896.

Séances de la Société française de physique. — Paris, 1896.

L'Université catholique. — Lyon, 1896.

Publications de l'Institut grand-ducal du Luxembourg (section des sciences naturelles et mathématiques). — Luxembourg, 1896.

The Damien Institute. — Birmingham, 1896.

The Month. — Rochampton, 1896.

The Dublin Review. — Dublin, 1896.

The catholic World. — New-York, 1896.

The american catholic quarterly Review. — Philadelphia, 1896.

Bulletin of the agricultural experiment station of Nebraska. — Lincoln Nebraska, U. S. A.

Proceedings of the California Academy of sciences. — San-Francisco.

Proceedings and Transactions of the Nova section institute of sciences. — Halifax, N. S., 1895.

Bulletin of the geological Institution of the University of Upsala. — Upsala, 1896.

Bijdragen tot de taal-, land- en volkenkunde van Nederlandsch-Indië. — 's Gravenhage, 1896.

Publicationen der v. Kuffners'chen Sternwarte in Wien. — Vienne.

Archivo católico, revista histórico-cientifica y literaria. Año I, vol. I, núm. 1-4. — Barcelona, 1896.

La Semana cátolica de Barcelona. — Barcelone, 1896.

Anales de la Asociación de ingenieros y architectos de México, t. IV, entre gas 10-13 ; t. V. — México, 1895-1896.

Secretaria de fomento, colonización é indústria. — Boletin de l'Instituto geologico de México, num. 3. La geografia fisica y la geólogia de la peninsula de Jucatan. — México, 1896.

Boletin mensual del Observatorio meteorologico de Leon. — México, 1896.

Boletin del Observatorio astronomico nacional de Tacuboujar. — Mexico, 1896.

Annuario publicado pelo Observatorio do Rio de Janeiro. — Rio de Janeiro.

Anales del Museo nacional de Montevideo, publicados bajo la dirección de J. Arechavaleta, IV; V, 18. — Montevideo, 1896.

Observatorio de Manila bajo la dirección de los Padres de la Compañía de Jesus. — Boletín mensuel, 1895. — Manila, 1896.

Atti della reale Academica dei Lincei. — Rome, 1896.

Rivista internazionale di scienze sociali e discipline ausiliarie.— Roma, 1896.

Bolletino della Società romana per gli studi zoologici. Vol. IV, anno IV, n°s 5 et 6. — 1895.

Bulletin della Associazione scientifica di Porto-Maurizio, anno primo. — Porto-Maurizio, 1895.

Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas, publicado pelo Dr F. Gomes Teixeira. — Coimbra, 1895.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

SECONDE PARTIE

MÉMOIRES

DE L'ADMINISTRATION PÉRIODIQUE DE LA DIGITALE AUX CARDIAQUES ET AUX BRIGHTIQUES

PAR

M. le Dr DESPLATS

Professeur des cliniques médicales à la Faculté libre de Lille.

La digitale rend les plus grands services chez les cardiaques atteints d'hyposystolie, que les troubles soient dus à l'hypertension veineuse ou à l'hypotension artérielle.

Son action est d'autant plus prompte que l'administration a été plus précoce et la dose prescrite mieux appropriée.

La vérité de ces propositions est connue de tous les praticiens; aussi les cardiaques, susceptibles de présenter des attaques d'asystolie, sont-ils surveillés avec soin et se tient-on prêt à leur prescrire le précieux agent dès que baissera la tension artérielle ou que se manifesteront des signes de stase.

Cette pratique de tous les maîtres me paraît excellente et je me suis toujours fait un devoir de la suivre. Il me semble, cependant, qu'elle peut être utilement complétée. Dans de nombreux cas que j'ai eu l'occasion de suivre pendant longtemps,

j'ai été amené non plus à combattre l'asystolie déjà établie, mais à la prévenir, et c'est ainsi que, graduellement, je suis arrivé à prescrire, systématiquement, aux cardiaques, dont le myocarde est insuffisant, l'usage continu de la digitale. Des malades qui avaient, jusque-là, de véritables crises d'asystolie et devaient se condamner à un repos prolongé plusieurs fois l'an, ont échappé à cette servitude et pu continuer sans interruption leurs occupations ordinaires. Je pourrais en citer un grand nombre, hommes ou femmes, de toute condition.

La raison d'être de cette pratique est facile à établir, si l'on considère que les effets de l'hyposystolie, avant d'être apparents, se sont produits sur tout le système vasculaire (artériel, veineux, capillaire), et sur tous les viscères, dont les fonctions sont plus ou moins troublées. Il convient donc, si l'on veut éviter tous ces troubles, qui deviennent quelquefois si graves et si persistants, de prévenir l'hyposystolie et de ne pas attendre qu'elle se manifeste par ses effets.

C'est ce qu'on fait en prescrivant périodiquement, à des intervalles plus ou moins rapprochés suivant les cas, la digitale, que l'on doit alors donner et moins longtemps et à moins haute dose, puisqu'il n'y a plus qu'à maintenir et non à rétablir l'équilibre circulatoire. Je donne d'ordinaire la digitale pendant un, deux ou trois jours toutes les semaines ou tous les dix jours, mais on comprend qu'il est des cas où l'administration pourrait être moins fréquente.

Ce n'est pas seulement chez les cardiaques purs que j'ai obtenu de bons effets de l'administration périodique de la digitale. J'en ai obtenu chez les réno-cardiaques ou les cardio-rénaux avec albuminurie permanente. Je ne citerai qu'un exemple particulièrement intéressant parce qu'il m'est fourni par un confrère et qu'il a pu, par conséquent, être mieux étudié. Ce confrère, qui exerce à la campagne, est de très grande taille, emphysémateux, et a 61 ans. Je lui ai donné des soins il y a une douzaine d'années pour une pleurésie qui nécessita plusieurs ponctions. Il y a trois ans, à la suite de grandes fatigues et peut-être d'une attaque d'influenza, il fut pris de stase pulmonaire,

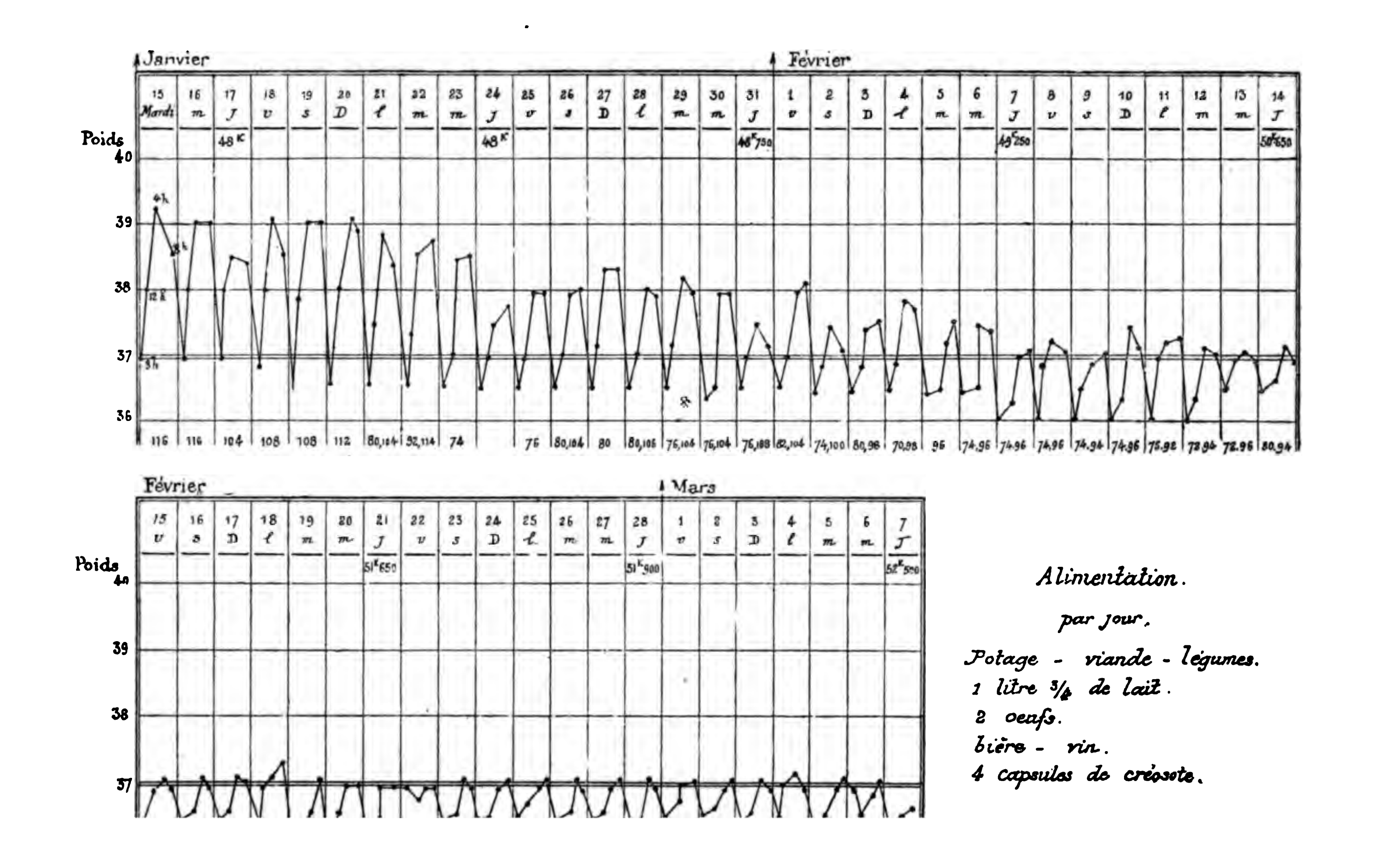
de dyspnée, de cyanose de la face, d'œdème des membres et d'oligurie. Je constatai qu'il avait beaucoup d'albumine dans les urines, et plusieurs fois, pendant les quatre mois que dura sa crise, il eut des signes d'urémie. Lentement, par l'emploi de moyens appropriés, et surtout grâce à la digitale, je le remis sur pied, et il put reprendre ses fonctions de médecin de campagne, qu'il n'a pas interrompues un seul jour depuis trois ans; et cependant ses urines n'ont pas cessé d'être très albumineuses, son poumon est toujours emphysémateux, son cœur dilaté et menacé d'hyposystolie.

A quoi puis-je attribuer un pareil résultat? Au régime dans lequel le lait tient une grande place, et à l'usage de la digitale qu'il n'a pas cessé de prendre, trois fois par semaine, depuis trois ans. Au début, ma prescription lui parut singulière et il hésitait à l'accepter. Depuis qu'il en a constaté les bons effets, on ne pourrait l'y faire renoncer.

Toutes les préparations de digitale peuvent donner de bons effets, mais je donne la préférence à la digitaline, dont les effets sont plus sûrs et l'administration plus facile; et parmi les digitalines diverses, j'ai toujours recours à celle d'Homolle et Quévenne, que je connais, et qui me donne des résultats constants. L'expérience m'a amené à la prescrire à des doses plus élevées que ne le disent les auteurs. Je ne m'arrête ni à 1, ni à 2, ni à 3 granules par jour. Je prescris d'ordinaire 4, 5 et même 6 granules, et depuis que j'ai cette hardiesse, les résultats sont plus prompts et plus constants. Jamais je n'ai constaté d'inconvénients.

Pour me résumer donc, je dirai, en terminant, qu'il y a lieu de donner aux cardiaques, qui ont eu une première attaque d'asystolie, la digitaline d'une manière périodique, et qu'il ne faut pas attendre pour la donner que les accidents se soient reproduits ou même menacent de se reproduire.

———



Alimentation.

par jour.

Potage - viande - légumes.
1 litre 3/4 de lait.
2 oeufs.
bière - vin.
4 capsules de créosote.

TUBERCULOSE

ET

CURE D'AIR A DOMICILE

PAR

M. le Dr Ach. DUMONT.

Je n'ai pas l'intention d'exposer les mille et un détails qui doivent être pris en sérieuse considération dans l'application de la cure d'air au traitement de la tuberculose à domicile. On trouvera dans un excellent petit livre, publié par M. Mœller (*), les indications les plus précises sous ce rapport. Je tiens seulement à vous parler d'un cas où la mise en œuvre de la cure d'air m'a donné un résultat très encourageant. J'ai l'espoir que mon récit vous le fera considérer comme tel et vous engagera peut-être à renouveler cette pratique chez vos clients tuberculeux.

M. X... est issu d'une famille dans laquelle la tuberculose n'a fait aucune victime depuis plusieurs générations. Son père a succombé à une affection gastrique, sa mère est très bien portante. Mais lui-même n'est pas vigoureux. Depuis longtemps il se plaint de troubles digestifs, d'inappétence, mais, à vrai dire, son hygiène laisse énormément à désirer ; il fume beaucoup, prend irrégulièrement son repos, sort par tous les temps et se nourrit d'une façon très inégale. Il ne tousse pas, dit-il; il se fait illusion sur ce point, je l'ai souvent constaté, et il ne fait appel à mes soins que pour combattre des accès de fièvre qui le saisissent

---

(*) *La Cure d'air chez soi.* Société belge de librairie, 1895.

chaque jour dans l'après-midi, entre 2 et 5 heures, et l'accablent beaucoup. Nous sommes à la fin d'octobre 1894. Je le vois deux fois chez lui et je constate que son poumon droit présente dans sa moitié inférieure des râles nombreux. Le sommet droit ne diffère guère du sommet gauche et paraît sain comme lui. Du reste, en ce moment mon intervention doit être de nul effet. Avant de m'appeler, le malade avait décidé de se rendre à Nice. Ses préparatifs de voyage étaient faits et mes deux visites n'étaient pour lui que l'occasion de recevoir des conseils dont il n'allait bientôt plus se souvenir. Il ne me donnait d'ailleurs pas le temps de faire l'analyse de ses crachats. Le voilà donc parti pour Nice, soucieux de se distraire, bien plus que de se soigner... Il arriva ce qu'il était facile de prévoir. Le tuberculeux qui s'éloigne des siens dans l'intention de chercher à la fois le soleil et les fêtes court directement au danger. Et ce danger est inévitable, quand le malade, ignorant la gravité de son état, croit inutile de recourir aux conseils d'un médecin. Aussi le tuberculeux fait-il souvent mieux de rester dans son pays, même si le climat en est sévère, que d'aller sous un ciel plus clément chercher un remède empoisonné par le plaisir.

D'un autre côté, il importe que le médecin, dès qu'il est assuré, par l'examen bactériologique, de la nature tuberculeuse de la maladie, ne donne pas le change au malade. Nous comprenons qu'il agisse ainsi dans une affection incurable, dont l'issue est indépendante de la volonté et de la coopération du patient, le cancer, par exemple. Mais quand la marche et le dénouement d'une maladie sont liés inséparablement à la persévérance et parfois aux héroïques efforts du malade, n'est-ce pas abuser de sa confiance que de le priver des grandes ressources dont il dispose pour se guérir? Or, ces ressources, cette énergie, il ne les mettra en œuvre que s'il a la conviction de la réalité de son mal. C'est cette foi qui va désormais animer toutes ses résolutions.

Enfin, nous sommes tellement convaincu de la nécessité de la direction médicale du traitement, que nous sommes d'avis, quand les ressources et l'état du malade lui permettent de s'éloigner, de l'envoyer dans un sanatorium bien dirigé plutôt que

dans un hôtel où le malade a toute latitude d'échapper, même involontairement, à la surveillance du médecin. Dans la tuberculose, chaque jour apporte son contingent d'indications que le médecin du sanatorium saisira au bond au grand profit du malade.

Voilà donc M. X... revenu. « Docteur, me dit-il, je ne vais pas mieux. Je crois même que mon voyage m'a fait plus de mal que de bien. Je me sens très fatigué, j'ai la fièvre tous les jours. » Et, en effet, le thermomètre me révéla d'emblée 39°,3. Les râles s'étaient accumulés dans le poumon droit, mais le sommet semblait encore indemne.

Je fis prendre la température quatre fois par jour, car il est illusoire, à mon avis, de se croire renseigné sur le degré de fièvre si on se contente de relever la température le matin et le soir. 8 heures du matin, midi, 4 heures et 8 heures du soir, à quelques minutes près, étaient les moments choisis. Je dois ajouter que Mme X... a secondé avec autant de ponctualité que d'intelligence le contrôle du médecin.

Les crachats soumis à l'examen microscopique fourmillaient de bacilles tuberculeux, et du 15 au 24 janvier les températures atteignaient, dans l'après-midi, 39°, sauf quelques dixièmes en plus ou en moins, et le poids du malade resta fixe à 48 kilogrammes. L'alimentation aussi abondante que le comportait l'état des voies digestives compensait donc, mais sans bénéfice, le travail de désassimilation accru par la fièvre. Jusque-là nous laissions au malade la latitude de sortir par le beau temps, une demi-heure, trois quarts d'heure au plus. Nous avions tort. La marche entretient et accroît l'activité fébrile. S'il en fallait une preuve, nous la trouverions immédiatement dans l'influence qu'exerça sur M. X... le repos absolu, aidé de l'aération continue à laquelle nous l'avons soumis, un confrère et moi, à dater du 24 janvier.

A partir de ce moment, et jusqu'au 31 janvier, si j'en excepte deux jours où elle atteignit comme limite supérieure 38°,3, la température ne dépassa pas 38°, et en huit jours le malade avait gagné en poids 750 grammes. Il pesait 48k,750.

Dans les huit jours qui suivirent, la température ne dépassa guère 37°,5 et le poids s'éleva à 49k,250.

Dans le septenaire suivant, la température resta sensiblement à 37° et le poids parvint à *50^{k},650* (voir le diagramme).

Dès lors la limite supérieure de la température resta définitivement à 37° et les pesées donnèrent les chiffres suivants : 51^{k},650 le 21 février, 51^{k},900 le 28 février, 52^{k},500 le 7 mars. Nous avions donc obtenu un bénéfice de 4^{k},500 du 24 janvier au 7 mars, c'est-à-dire en six semaines! Ce résultat nous permit de ne pas regretter la décision que nous avions prise, c'est-à-dire de nous être opposés au départ du malade pour Davos ou Falkenstein. Certes, les sanatoria de ces deux stations m'inspirent la plus grande confiance dans le traitement de la tuberculose. Mais la température fébrile que j'avais constatée régulièrement chez M. X..., nous avait fait craindre les fatigues d'un long voyage. De plus, nous étions au cœur d'un hiver des plus rigoureux et nous redoutions les effets désastreux des refroidissements. Je ne dois pas oublier de mentionner ici le relevé du pouls. Sa marche a été parallèle à celle de la température. De 116 battements au début, le pouls baissa graduellement jusqu'à 80 l'après-midi et resta de bonne heure au-dessous de ce chiffre le matin.

Mais j'ai hâte d'arriver à la cure d'air proprement dite. Convaincu de l'effet favorable qu'elle devait exercer sur l'état de M. X..., nous n'hésitâmes pas à l'y soumettre dans toute sa rigueur, malgré la sévérité exceptionnelle de la saison. Le jour, nous disposions d'une grande chambre largement éclairée et tournée vers l'est. Le soleil y laissait pénétrer jusqu'à midi des rayons sans chaleur. La chambre avait la forme d'un rectangle dont le foyer occupait l'un des petits côtés et le malade le côté opposé. La croisée la plus proche du foyer restait largement ouverte du matin au soir, tandis que M. X..., la tête couverte d'un toque de fourrure, le corps enveloppé dans une chaude pelisse, était étendu sur une chaise longue. Il ne se ressentait pas de la rigueur du froid qui, certains jours, se chiffra par — 17° au dehors, tandis que le thermomètre placé au-dessus de la tête du malade atteignait 6° à peine. Pendant de nombreux jours de février, cette température de 6° ne put être dépassée dans la chambre de M. X..., malgré l'ardeur d'un foyer qui, à

vrai dire, n'était distant que d'environ $2^m,50$ de la fenêtre ouverte.

La nuit, le malade occupait seul, car on ne peut admettre de partager en pareil cas, une chambre située au-dessus de la précédente et d'un cube de 80 mètres environ. La porte de communication entre cette chambre et la chambre voisine, sise également à l'est, restait largement ouverte, et c'est une fenêtre de celle-ci qu'on laissait entre-baillée pendant toute la nuit. La meilleure volonté du monde, en effet, peut être trahie pendant le sommeil par des mouvements inconscients, et le malade être exposé par là à se refroidir. Il serait donc imprudent de permettre à l'air extérieur de pénétrer trop directement jusqu'au tuberculeux.

Plus de six semaines se passèrent dans ces conditions d'un repos absolu et d'aération continue. Il fallait à M. X..., habitué jusque-là à ne point connaître d'entraves, une volonté puissante, une foi vive dans l'efficacité du traitement qu'il suivait, pour vaincre l'impatience si naturelle à son âge (*). Heureusement, comme un écolier qui a bien rempli sa tâche, il attendait avec confiance le bulletin hebdomadaire de ses pesées, et nous avons vu plus haut que tous étaient de nature à soutenir sa persévérance.

Vous le voyez, Messieurs, la température rigoureuse de l'hiver dernier ne nous a fait reculer en rien dans l'application d'une aération continue. Notre unique préoccupation a été d'empêcher M. X... de se refroidir. Car, M. Moeller le dit excellemment, c'est la peau qu'il faut garantir contre le froid et nullement la muqueuse des bronches.

La lutte que nous avons soutenue contre la maladie n'a pas été aussi exempte d'incidents que mon récit pourrait vous le faire croire. L'estomac, qui est souvent un point très faible chez les tuberculeux, s'est montré plusieurs fois intolérant, et à différentes reprises aussi nous avons dû refréner des flux diarrhéiques.

Nous avons fait usage d'un seul médicament, que nous avons prescrit bien plus pour soutenir le moral du malade que pour

(*) Trente ans.

répondre à notre conviction personnelle. Je veux parler de la créosote. Nous la donnions en capsules. Mais à ceux qui croiraient qu'un autre mode d'administration eût été préférable, je répondrai qu'après avoir fait des centaines d'injections hypodermiques d'huile créosotée, je ne me vois pas obligé de revenir à une appréciation plus favorable de l'action de la créosote.

Chose curieuse! Nous avons vu les phénomènes fébriles s'améliorer très rapidement et disparaitre sous l'influence du traitement. Mais les phénomènes stéthoscopiques ne se sont pas modifiés parallèlement. Les deux tiers inférieurs du poumon droit sont restés encombrés de râles muqueux. L'expectoration a cependant diminué. Le vase d'essence de térébenthine, mortel pour le bacille de la tuberculose, recevait chaque jour deux ou trois crachats devenus blancs. L'analyse n'en a pas été faite dans les derniers temps. Elle nous paraissait d'ailleurs ne pas valoir les constatations favorables que nous présentait l'état général. Mais la persistance des phénomènes stéthoscopiques, malgré l'amélioration évidente de l'état général, me suggérait une comparaison banale : quand le feu a cessé de pétiller, il couve encore longtemps sous la cendre, prêt à donner de nouvelles flammes quand certaines influences viendront l'attiser.

La médication ou plutôt le traitement nous avait procuré de si beaux résultats, la volonté de M. X... s'était montrée si puissante qu'il nous inspira confiance et que nous crûmes pouvoir maintenir et accroitre en dehors d'un sanatorium ce que nous avions obtenu sans lui. Le printemps était arrivé et nous en profitâmes pour envoyer le malade passer toute la bonne saison dans la province de Liége, à une altitude de 400 mètres. Cette hauteur nous semblait bien faite pour affermir, pendant les chaleurs de l'été, les bons résultats que nous avait donnés l'hiver. De plus, nous considérions qu'il est plus facile de trouver le calme et l'isolement à la campagne qu'aux bords de la mer où les plaisirs et les relations abondent et compromettent l'influence de l'atmosphère maritime, si bienfaisante pourtant en pareils cas. Six mois se passent. Je perds de vue mon client qui ne me

donne pas de ses nouvelles et qui échappe probablement à tout contrôle médical.

Je viens de le revoir; il ne pèse plus que 48 kilogrammes. Qu'a-t-il donc fait? Il a agi avec une incroyable inconséquence. Il s'est cru guéri, et il a fait fi de toutes nos prescriptions. Il a entrepris de très nombreux voyages en chemin de fer, même au loin. A deux reprises, il s'est promené en bicyclette pendant une heure, et l'on sait combien le cheval d'acier est nuisible aux tuberculeux. Du reste, il s'en est trouvé tellement surmené qu'il lui a été impossible de s'y livrer davantage. Et quand il restait chez lui, c'était pour s'occuper d'études, de recherches, de collections, mais pas pour respirer l'air vif qui baignait sa demeure.

Il a donc perdu en six mois par la chaleur et l'exercice ce qu'il avait gagné en six semaines par le repos et l'aération continue pendant l'hiver. La fièvre ne l'a cependant pas encore ressaisi. Les râles du poumon droit sont rares, mais il me paraît près d'être de nouveau une proie toute préparée pour la tuberculose, s'il n'apporte un prompt changement à son genre de vie.

L'influence favorable du traitement exprimée plus haut en valeur positive s'était donc traduite avec non moins de force dans un sens négatif. D'où je crois légitime de conclure que l'association du repos et de l'aération continue peut être très salutaire à certains tuberculeux, mais que l'emploi isolé de l'un de ces moyens reste sans valeur. Cette conclusion indique suffisamment que je ne considère pas ce traitement comme capable de modifier favorablement tous les cas de tuberculose qui y seront soumis. Le succès constant n'est le propre d'aucun remède. Il y a d'ailleurs une importante distinction à faire. Elle est relative à la période où en est arrivé le tuberculeux. Le succès sera d'autant plus probable que cette période sera moins avancée; tandis qu'il est des plus incertains quand la fièvre est devenue continue, c'est-à-dire quand la tuberculose a fait place à la phtisie.

BACTÉRIOLOGIE DES ANGINES PSEUDO-MEMBRANEUSES

PAR

M. le Dr G. LEMIÈRE
Professeur à la Faculté libre de Lille.

RÉSUMÉ.

L'étude bactériologique des angines pseudo-membraneuses est complexe; elle était hier une question purement scientifique, ne pouvant intéresser le praticien qu'au point de vue du pronostic; elle est devenue aujourd'hui une question d'intérêt pratique, indispensable pour guider dans l'application du traitement.

Le diagnostic clinique de la nature d'une angine pseudo-membraneuse est impossible sans le secours de la bactériologie : telle angine, qui cliniquement est une angine herpétique type, se montre par la bactériologie une angine diphtérique pure, et telle autre qui paraît nettement diphtérique n'est après examen bactériologique qu'une angine à streptococque. On peut dire, en chiffres ronds, que 50 °/o des angines pseudo-membraneuses ne sont pas dues au bacille de Loeffler.

Dans la plupart de ces cas, on rencontre le coccus de Brisou, qui est très fréquent, le staphylococque ou le pneumococque, qui sont plus rares; ce sont là les angines pseudo-membraneuses non diphtériques, légères, bénignes, facilement curables.

A côté de ces microbes, on en rencontre d'autres, en particulier le streptococque, que l'on trouve très fréquemment (vingt-quatre fois sur vingt-quatre cas, d'après Veillon), et qui peut

donner naissance à des angines pseudo-membraneuses très graves. Il est l'agent pathogène presque exclusif des angines pseudo-membraneuses précoces de la scarlatine, tandis que les angines tardives, secondaires à cette maladie, sont ordinairement causées par le bacille de Loeffler. Cette règle souffre cependant quelques exceptions.

A côté de ces microbes classiques pour ainsi dire des angines pseudo-membraneuses, on peut rencontrer des microbes plus rares.

Tessier, puis Troisier et Achalme, ont cité chacun un cas d'angine pseudo-membraneuse due au *Saccharomyces albicans*, c'est-à-dire à la levure qui produit le muguet.

Nous avons eu nous-même l'occasion d'en étudier un cas récemment où l'angine avait pu en imposer pour une diphtérie à deux cliniciens très experts. Deux enfants de la même famille furent pris presque en même temps, ce qui montre que cette angine peut même être contagieuse.

Dans l'exsudat, nous avons trouvé un grand nombre de cellules de levure et quelques microbes. Les cultures sur sérum ont donné naissance après vingt-quatre heures d'étuve exclusivement à la forme levure. Les cultures en série sur divers milieux nous ont montré qu'il s'agissait bien là du *Saccharomyces albicans*.

Vernet, dans sa thèse (Lyon, 1895), a étudié une auto-observation d'angine pseudo-membraneuse non diphtéritique. Les symptômes généraux sont assez peu accentués, mais les fausses membranes persistent plusieurs mois malgré tous les traitements locaux. Cette angine était due à un gros bacille, non encore décrit, qui était pathogène pour les animaux.

Dans deux cas nous avons rencontré aussi des bacilles spéciaux; une fois chez un adulte nous avons trouvé à l'état de pureté un bacille que nous n'avons pas encore suffisamment étudié et que nous décrirons plus en détail à une autre occasion. Ce n'est en tout cas aucun des bacilles signalés jusqu'à présent dans les angines pseudo-membraneuses, et par certains côtés il pourrait dérouter les chercheurs et en imposer à première vue pour le bacille de Loeffler.

Le bacille de la diphtérie aviaire est aujourd'hui considéré comme distinct du bacille de Loeffler; mais cependant, dans certains cas assez rares, les oiseaux peuvent communiquer leur affection à l'homme qui prend une angine pseudo-membraneuse particulière, comme Loir et Duclaux en ont cité un exemple remarquable dans les *Annales de l'Institut Pasteur*.

Enfin, dans les angines pseudo-membraneuses non diphtériques, on peut encore citer certains cas causés par le bacille pseudo-diphtéritique que l'on rencontre le plus souvent à l'état d'association.

Les auteurs sont d'ailleurs à peu près unanimes aujourd'hui pour identifier ce bacille au bacille de Loeffler. Ce serait le bacille de Loeffler à l'état d'atténuation extrême, par suite inoffensif. Mais il faut se mettre en garde, car ce bacille peut très bien regagner sa virulence perdue dans des conditions que nous ne connaissons pas; une de ces conditions paraît être l'association avec d'autres microbes, en particulier avec le streptocoque.

Les autres angines pseudo-membraneuses sont de nature diphtérique et causées par le bacille de Loeffler. On peut décrire trois formes à ce bacille : les formes longue, moyenne et courte. La diphtérie paraît d'autant plus grave que le bacille est plus long et qu'il a plus de tendance à abandonner son mode de groupement particulier en petites séries de bacilles disposés parallèlement les uns aux autres.

La bactériologie nous montre encore que la diphtérie peut être pure ou associée. Le bacille de Loeffler peut être associé au coccus de Brisou, au staphylocoque, au pneumocoque, au colibacille, aux sarcines, au streptocoque. Les associations les plus fréquentes sont celles avec le Brisou et le streptocoque.

La diphtérie associée et surtout la diphtérie avec association streptococcienne est plus grave que la diphtérie pure.

Les recherches expérimentales, en particulier les recherches récentes de Bernheim, nous montrent également que chez les animaux l'infection expérimentale par le Loeffler associé au streptocoque est plus grave. Cette symbiose augmente la virulence du bacille de Loeffler.

Grâce à la sérothérapie antidiphtérique, dont on a trop exagéré les accidents, la mortalité diphtérique est tombée, d'après les statistiques parisiennes et celles de Behring pour Berlin, de 50 à 15 °/₀, et même, quand le traitement est entrepris dans les quarante-huit premières heures, au-dessous de 5 °/₀.

Le diagnostic bactériologique est donc indispensable pour nous fixer sur la nature d'une angine pseudo-membraneuse et pour nous guider dans le traitement. Car, s'il est inutile d'exposer aux accidents postsérothérapiques des enfants qui n'ont pas la diphtérie, il ne faut pas hésiter à traiter par le sérum et à traiter de bonne heure les enfants atteints de diphtérie : ces accidents ne sont qu'éventuels et souvent bénins, tandis que les dangers de l'intoxication diphtérique sont certains et toujours graves.

Les angines qui résistent à ce traitement sont les angines où le bacille de Loeffler est associé au streptocoque, de même que les angines pseudo-membraneuses graves non diphtériques sont également dues au streptocoque.

Si nous possédions un remède spécifique analogue au sérum antidiphtérique pour combattre l'infection streptococcique, nous serions enfin armés pour parer à ces accidents redoutables.

En ce moment Marmorek fait des recherches à l'Institut Pasteur sur la sérothérapie antistreptococcique. Ce remède n'est pas encore trouvé, mais les résultats sont encourageants, et bientôt peut-être pourrons-nous remercier à nouveau ce grand savant, ce mort d'hier tant regretté, le bon Monsieur Pasteur, qui ne cessera pas de soulager l'humanité en inspirant encore ses élèves qui ne demandent qu'à être ses continuateurs.

TRAITEMENT

DES

NODULES DE LUPUS ISOLÉS

PAR LA DILACÉRATION

SUIVIE D'APPLICATIONS DE CHLORURE DE ZINC

PAR

M. le Dr Léon DERVILLE
Professeur suppléant à l'Université catholique de Lille.

Les tubercules de lupus se montrent le plus souvent agglomérés, réunis en plaques de formes et de dimensions variables. Il n'est pas rare cependant de rencontrer des nodules lupiques isolés. Ce sont de véritables points d'attaque de la maladie; tout petits d'abord, ils ne tarderont pas à s'étendre, et il importe de les détruire complètement alors que leur volume ne nécessite qu'une intervention limitée.

Ces tubercules isolés s'observent dans trois circonstances principales :

1° On peut les rencontrer autour des foyers lupiques, à une certaine distance de ces foyers avec lesquels ces nodules erratiques ne tarderont pas à se confondre;

2° On les observe aussi sur les cicatrices d'anciens lupus ; ce sont alors des tubercules de récidive, apparaissant en plein tissu de cicatrice ;

3° Enfin, ils se montrent encore sur les plaques de lupus traitées par les scarifications, et ils représentent alors les derniers vestiges de la maladie, qu'il est indispensable de faire disparaître pour obtenir une guérison durable.

Pour combattre ces productions isolées et très petites de la tuberculose cutanée, les cautérisations avec une pointe fine de thermo- ou de galvano-cautère peuvent rendre les plus grands services, mais on se heurte quelquefois à la résistance des malades qui refusent absolument toute intervention ignée.

Les scarifications et le raclage à la curette tranchante ne sont guère applicables que pour les tubercules isolés du premier groupe. Pour ceux du deuxième et du troisième groupes, entourés de toutes parts de tissu cicatriciel fibreux, dur, résistant, et souvent aussi d'un volume très petit, ces interventions sont moins aisées. Le scarificateur ne peut manœuvrer facilement dans un espace aussi restreint et le raclage est très difficile, puisque la curette ne peut pénétrer jusqu'au fond de la lésion; elle est arrêtée par le tissu fibreux périphérique.

Dans ces cas, je me suis bien trouvé d'une intervention à laquelle je donnerai, si vous le voulez, le nom de dilacération, et que je fais suivre d'une application de chlorure de zinc pur, cristallisé, qui complète la destruction du tissu morbide.

Voici le procédé opératoire. J'introduis dans le milieu du tubercule un scarificateur en forme de fer de lance (le scarificateur de Vidal), assez allongé et assez étroit, et je l'enfonce jusqu'à ce que je le sente arrêté par le tissu cicatriciel qui entoure le nodule lupique. Je lui imprime alors un mouvement de rotation assez rapide; cette manœuvre est facilitée par la forme du manche de l'instrument dont la coupe représente un hexagone. Cette petite intervention est achevée en moins de temps qu'il n'en faut pour la décrire; elle déchire le tissu tuberculeux; elle en enlève même souvent des fragments qu'on retrouve sur l'une ou l'autre face du scarificateur. Cet instrument, employé de cette façon, agit donc non seulement en dilacérant les tissus malades, mais encore en enlevant une partie de ces tissus à la façon de la curette tranchante.

Ce premier acte de l'intervention étant achevé, on introduit dans la petite cavité ainsi creusée un petit cristal de chlorure de zinc, et on le fait pénétrer au moyen de la lame du scarificateur appliquée à plat. On connaît l'action de ce sel sur les tissus

tuberculeux et l'influence curatrice qu'il exerce par ses propriétés sclérogènes. A peine le fragment caustique a-t-il été introduit, l'hémorragie s'arrête et on voit se former au point dilacéré une petite tache noire, entourée d'un cercle blanchâtre, une petite escarre. Celle-ci se dessèche, forme une croûte qui recouvre la lésion et sous laquelle se fait la cicatrisation. Cette croûte tombe ordinairement du dixième au quinzième jour, et ne laisse comme trace qu'une macule rougeâtre.

Cette intervention présente certains avantages et aussi quelques inconvénients.

Commençons par ces derniers. Le chlorure de zinc laisse des cicatrices souvent inégales, irrégulières, saillantes. C'est là un inconvénient de peu d'importance sur les parties couvertes, mais qui peut entrainer, sur la figure notamment, des difformités que nous devons éviter. On pourrait donc se borner à ne l'employer que sur les parties couvertes, et il pourrait encore rendre de grands services. Mais je crois qu'on peut y avoir recours pour la figure, et si la cicatrice est un peu irrégulière, quelques séances de scarification la remettront de niveau.

Un autre inconvénient du chlorure de zinc réside dans l'action sclérogène si utile de ce médicament. Le tissu de sclérose, en se ratatinant, peut amener un rétrécissement des orifices naturels ; aussi, pour les lupus développés au voisinage de la bouche ou du nez, je crois préférable d'avoir recours à d'autres interventions, sauf le cas de plaque lupique très petite.

Quant aux avantages de ce mode de traitement, ce sont les suivants :

1° L'intervention est peu douloureuse. Les malades la supportent très bien. J'ai soigné de cette façon sans choroformisation, sans anesthésie locale, des enfants de 7 à 10 ans, et je n'ai guère éprouvé de leur part de résistance ;

2° Elle n'entrave pas les malades dans leurs occupations. L'opération ne laisse que quelques croûtes sur la figure; il ne faut pas de pansement. Les malades peuvent vaquer entièrement à leurs affaires;

3° Enfin ce mode de traitement agit rapidement. Il n'est

pas rare de voir un petit nodule détruit dès la première intervention et remplacé par un tissu de sclérose qui en se rétractant ne peut avoir que la plus heureuse influence sur les tissus voisins.

Je ne voudrais cependant pas vanter outre mesure l'efficacité de ce traitement. La guérison, après une seule intervention, ne peut être espérée que lorsqu'il s'agit de nodules superficiels et peu étendus. Pour les autres, il est indispensable de les traiter à nouveau, et souvent à *plusieurs reprises*. En général, il faut attendre quinze jours avant de tenter une nouvelle intervention. Au bout de ce laps de temps seulement, les croûtes sont tombées ou se détachent aisément, et on peut pratiquer une nouvelle dilacération et une nouvelle cautérisation.

Je crois donc que cette dilacération suivie de cautérisation, lorsqu'elle est employée avec prudence, dans les cas que j'ai spécifiés au début, peut être de quelque utilité dans la pratique. Elle peut abréger et rendre tolérable la fin d'un traitement quelquefois très long et par là devenu à charge aux malades, et aussi enrayer rapidement la récidive sur place du lupus.

TROUBLES TROPHIQUES GRAVES
DU MEMBRE INFÉRIEUR
CONSÉCUTIFS A UN TRAUMATISME

PAR

les Drs DE BUCK et DE MOOR

Depuis que Charcot a attiré l'attention sur les arthropathies neuro-spinales, on a publié de nombreuses observations relatives aux troubles trophiques articulaires et osseux que peuvent présenter les malades atteints de certaines affections médullaires. C'est surtout dans le tabes et la syringomyélie que des accidents de cette nature ont été signalés; il n'existe pas dans la littérature médicale, à notre connaissance, de relation de troubles trophiques analogues survenus à la suite d'une lésion traumatique d'un nerf. Celle-ci peut cependant donner lieu à des accidents de cet ordre, comme le démontre l'observation suivante qui, à ce point de vue, nous a paru présenter un certain intérêt.

Dominique V. d. S., de Meirelbeke, 41 ans, est amené à l'Institut médico-chirurgical de Gendbrugge le 17 avril 1895. Il est marié et père de deux enfants bien portants. Ses parents sont morts du choléra. Jamais il n'a été malade avant le début de l'affection actuelle. Au mois d'août 1894, à la suite d'un violent traumatisme agissant à la région postérieure de la cuisse droite, il ressentit une vive douleur dans le membre atteint. La jambe gonfla rapidement, mais malgré la gène qu'il éprouvait, il put continuer son travail. Les accidents s'aggravèrent progressivement et le forcèrent à cesser le travail huit jours avant son entrée à l'hôpital.

Au moment de l'entrée, le malade présente une tuméfaction considérable du membre inférieur droit. Celle-ci porte principalement sur le genou, qui affecte une forme en fuseau régulière. Les mensurations, pratiquées comparativement sur le membre malade et sur le membre sain, donnent :

	Membre malade.	Membre sain.
Circonférence du genou	56.5 centim.	36.0 centim.
— au-dessus du genou. . . .	56.0 —	53.5 —
— immédiatement au-dessous du genou	51.0 —	32.0 —
— au-dessous de la tumeur. .	46.0 —	30.5 —
— de la cuisse au-dessous du trochanter	52.5 —	46.0 —

Au palper, la tuméfaction du genou est dure, de consistance osseuse. Le tibia semble hypertrophié sur la plus grande partie de son étendue. Depuis le pied jusqu'en haut de la cuisse, on constate un empâtement dur, dans lequel le doigt a peine à produire une dépression. Il existe un épanchement dans la bourse prérotulienne. Une mobilité anormale existe au niveau de l'articulation du genou : on arrive sans effort à mettre la jambe en hyperextension sur la cuisse, les deux segments formant un angle obtus ouvert en avant (*genu recurvatum*). En outre on constate une mobilité anormale au niveau de l'articulation coxo-fémorale. Dans la région inguinale on trouve de nombreux ganglions ; ceux du côté de la lésion sont surtout volumineux et peuvent être poursuivis jusque dans le bassin.

Le malade n'accuse aucune douleur au niveau du membre malade. C'est par suite de l'indolence des parties atteintes que le malade n'a guère attaché d'importance aux accidents qu'il présente ; en effet, il n'est allé consulter le médecin qu'environ neuf mois après le début de son affection, et cela à cause de l'impotence fonctionnelle qui était survenue.

Rien d'anormal du côté des poumons, du cœur et du foie ; les urines sont également normales.

L'état général du malade est peu satisfaisant : il semble

exister une cachexie assez avancée bien que l'appétit soit resté bon.

L'ensemble des symptômes que nous venons de décrire autorisait le diagnostic de processus néoplasique de nature maligne. M. le professeur Soupart, qui voulut bien examiner notre malade, conclut comme nous à l'existence d'un ostéosarcome ayant déjà envahi la majeure partie du fémur et donné lieu à des métastases ganglionnaires.

Malgré le faible espoir que nous laissait l'étendue du mal, nous résolûmes de faire bénéficier le malade de la seule chance de salut qui lui restât : la désarticulation de la cuisse fut décidée et pratiquée sous chloroforme le 21 mai 1895. A notre grand étonnement, voici ce qu'il nous fut donné d'observer.

Au niveau de la tête fémorale il existait une fracture intracapsulaire à bouts libres, sans tendance à la régénération. Le périoste s'arrêtait à une certaine distance des surfaces libres, lisses et excavées, des deux fragments osseux. Dans l'espace délimité par la double concavité osseuse il y avait un amas de granulations.

L'articulation du genou était fortement altérée. Il n'existait pas trace de tumeur. La cavité articulaire renfermait un exsudat séreux de couleur citrine. Le cartilage articulaire était fortement corrodé par endroits; par contre, en d'autres points, le tissu osseux s'était considérablement hypertrophié. Les tissus de la cuisse furent trouvés fortement infiltrés.

En présence de ces constatations, l'enlèvement des ganglions tuméfiés fut jugée inutile. L'avenir nous donna raison, car peu de temps après l'opération, dont les suites furent excellentes, les ganglions inguinaux avaient repris à peu près leur volume normal.

Dans le but de nous éclairer sur la nature des lésions présentées par notre malade, des fragments de muscle, de cartilage articulaire, et de moelle osseuse furent fixés dans le sublimé et dans la liqueur chromoacétique. Les fragments de cartilage altéré furent décalcifiés auparavant par l'acide chlorhydrique dilué. Au moment de l'opération, nous ne soupçonnions malheureusement pas encore la nature des lésions qu'il nous était

donné d'observer ; c'est ce qui explique pourquoi nous n'avons pas songé en ce moment à fixer également le nerf, dont l'examen histologique nous eût probablement permis de constater les lésions.

L'examen microscopique des coupes nous montra une altération manifeste des muscles et du cartilage articulaire ; quant à la moelle osseuse, elle ne parut pas altérée.

Les fibres musculaires, dissociées par le liquide de l'œdème qui infiltrait le muscle, sont fortement atrophiées en maints endroits; en outre, on remarque en divers points des lésions dégénératives, la fibre perdant sa striation et prenant un aspect granuleux des plus nets.

Le cartilage articulaire présente également des lésions destructives. On voit par places le tissu cartilagineux se résoudre en une masse granuleuse qui renferme encore quelques noyaux fixant mal les matières colorantes. Au voisinage de certains îlots de cartilage en voie de destruction, on peut voir de petits amas de granulations pigmentaires jaunâtres; on y constate aussi l'existence d'un tissu ostéoïde de nouvelle formation dont les cellules fusiformes et étoilées sont anastomosées entre elles. Par endroits les coupes montrent qu'il s'est formé un tissu fibreux jeune, richement vascularisé, dans lequel on rencontre en certains points des épanchements sanguins considérables.

Telles sont les principales altérations que révèle l'examen de nos coupes ; nous nous proposons de les étudier ultérieurement avec plus de détails et d'interpréter les modifications constatées.

L'observation, que nous venons de relater avec quelques détails, montre suffisamment qu'il s'agissait chez notre malade de lésions trophiques graves consistant en arthropathie, fracture spontanée, atrophie musculaire et œdème dur, lésions développées à la suite d'un traumatisme. Celui-ci doit avoir porté sur le nerf sciatique, vu l'endroit où le coup a été reçu. L'arthropathie du genou présente bien tous les caractères que l'on rencontre habituellement dans les lésions articulaires survenant au cours du tabes et de la syringomyélie. Le début brusque, l'indolence,

les caractères particuliers de l'œdème, la destruction du cartilage articulaire et de la synoviale, l'épanchement séreux articulaire, l'atrophie des muscles périarticulaires, la prolifération du tissu osseux, l'absence d'accidents inflammatoires, constituent un ensemble de symptômes caractéristique pour cet ordre d'accidents et se retrouvent chez notre malade. C'est encore à un trouble trophique qu'il faut attribuer la fracture intracapsulaire. Celle-ci n'était certes pas immédiate, comme le démontrent suffisamment la non-interruption du travail et l'absence de douleur à ce niveau. Elle s'est préparée de longue main et ne s'est probablement produite qu'au moment où le malade, devenu impotent, s'est adressé au médecin.

A quelle cause faut-il attribuer les troubles trophiques observés chez notre malade ? On ne saurait raisonnablement contester l'existence d'une relation causale entre le traumatisme du nerf et les accidents survenus à sa suite. Il est probable, bien que nous ne puissions malheureusement pas donner la preuve anatomique du fait, que le traumatisme du sciatique a eu pour conséquence une altération de ses fibres nerveuses. Or, le cylindre-axe formant avec sa terminaison et sa cellule centrale une unité neuronique, il est rationnel d'admettre qu'une lésion portant sur une partie du neurone produit l'altération du neurone dans sa totalité. Une communication toute récente de *Sadowsky* à la Société de Biologie (séance du 28 mars 1896) justifie d'ailleurs pleinement cette manière de voir. Cet expérimentateur a pu constater que la compression mécanique du nerf sciatique produit des altérations dans les cornes postérieures et antérieures (cellules du groupe postéro-latéral). D'ailleurs les faits cliniques confirment également cette interprétation ; car il n'existe aucun exemple d'une lésion du nerf périphérique qui, en l'absence de toute altération médullaire, ait donné lieu à des arthropathies analogues à celles du tabes. Nous n'en voulons comme preuve que le passage suivant, extrait d'une étude magistrale sur les arthropathies (René Verhoogen, *Les Arthropathies neuro-spinales;* in Journal médical de Bruxelles, n° 8, 1896) : « Les névrites périphériques sans lésions médullaires ne sont pas rares. Or, je

ne pense pas que dans un seul cas de ce genre on ait rien observé qui ressemblât aux arthropathies du tabes et de la syringomyélie. Il y existerait bien des arthropathies limitées aux petites articulations, mais on n'y a jamais rien signalé qui soit comparable aux arthropathies des grandes jointures, malgré que l'atrophie musculaire y soit presque constante, et je n'ai pas souvenir d'avoir vu observer l'arthropathie du genou à l'occasion d'une sciatique. »

Quant à la pathogénie de ces troubles trophiques, où les processus d'atrophie et d'hypertrophie peuvent coexister, — comme nous l'avons d'ailleurs constaté chez notre malade, — elle est loin d'être élucidée. On a formulé à ce sujet diverses hypothèses. Pour *Pierre Marie*, la différence observée dans le caractère des lésions trophiques serait due à des conditions mal déterminées, mais qui tiennent à la nature même de l'articulation atteinte. Cette hypothèse ne peut plus être soutenue depuis qu'on a publié des cas où les deux ordres de phénomènes existaient simultanément dans une même articulation. *Marinesco* admet que ces troubles trophiques sont d'ordre réflexe; l'arrêt de fonctionnement des fibres sensitives centripètes détermine en effet un abaissement du taux de la nutrition, d'où l'atrophie; l'hypertrophie ne serait qu'un phénomène de compensation, survenant dans une région voisine par un processus d'hypernutrition. Cette hypothèse ne nous paraît pas davantage admissible, car elle implique la coexistence constante des processus d'atrophie et d'hypertrophie, coexistence qui est loin d'être la règle.

Peut-être les théories modernes du professeur *Winkler*, d'Utrecht, pourraient-elles fournir une explication plus rationnelle de ces faits. *Winkler* admet, en effet, qu'il existe pour la nutrition deux ordres de fibres inégalement représentées dans les divers nerfs : les fibres anaboliques qui favorisent l'assimilation, et les fibres cataboliques qui favorisent la désassimilation. D'autre part, tout traumatisme portant sur un nerf détermine toujours une excitation qui peut être faible, mais qui est toujours très prolongée. L'existence de l'une ou l'autre catégorie de fibres

dans un organe donnerait lieu, à la suite d'une excitation, soit à des processus d'atrophie, soit à des processus d'hypertrophie; suivant la nature des fibres qui s'y trouvent représentées. Si les deux ordres de fibres coexistent dans le nerf, les deux processus existeront côte à côte dans le tissu innervé par ce nerf; si une catégorie de fibres prédomine dans le nerf, les processus qui y correspondent seront également prédominants.

Quant à l'œdème observé chez notre malade, c'était bien l'œdème neuropathique tel qu'il se produit dans la polynévrite, la syringomyélie, les névroses. On n'a pas expliqué jusqu'ici, que nous sachions, le mécanisme intime de sa production. Si la lymphe est un produit de sécrétion, comme le veulent *Heidenhain*, *Hamburger*, l'œdème doit se trouver, comme toutes les autres sécrétions, sous l'influence du système nerveux; est-elle au contraire un produit de filtration (*Cohnheim*, *Starling*), alors il faut admettre une altération de la paroi capillaire. La dureté de l'œdème neuropathique s'accommode mal de l'hypothèse d'une altération atrophique des tissus; elle nous semble plaider plutôt en faveur de l'origine sécrétoire de la lymphe dans ces conditions.

L'hypertrophie ganglionnaire constatée chez notre sujet, et que n'expliquait aucun élément infectieux, nous parait également en rapport avec la suractivité du système lymphatique.

FRAGMENTS
D'UN
COURS D'OPTIQUE

PAR
P. DUHEM
Professeur de physique théorique a la Faculte des sciences de Bordeaux.

TROISIÈME FRAGMENT

L'OPTIQUE DE FRESNEL

CHAPITRE PRÉLIMINAIRE.

Théorie de la réflexion et de la réfraction de la lumière dans le système optique de Young.

Nous avons vu, dans le deuxième fragment de ce cours (*), comment la lumière, selon les idées de Young, se comportait dans un milieu homogène, transparent, isotrope et illimité; nous avons vu également comment elle se comportait à la surface de séparation d'un tel milieu et d'un corps complètement noir; il nous reste à analyser, dans ce système, les lois de la réflexion et de la réfraction de la lumière à la surface de séparation de deux tels milieux; la théorie que nous allons développer sera en contradiction avec les faits, ce qui nous obligera à

(*) *Fragments d'un cours d'optique.* Deuxième fragment (ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, t. XIX, 2e partie, 1895).

abandonner le système optique de Young pour le remplacer par un système plus parfait, celui de Fresnel.

Nous allons, tout d'abord, développer la théorie dans le cas particulier où les deux milieux considérés confinent par une surface plane illimitée et où les ondes incidentes sont planes.

A. *Réflexion et réfraction des ondes planes sur une surface plane.*

Imaginons qu'une source lumineuse constante engendre dans le milieu 1, supposé illimité, des ondes planes, normales à OD (fig. 1) et ayant OD pour direction de propagation. Soit P_1 un

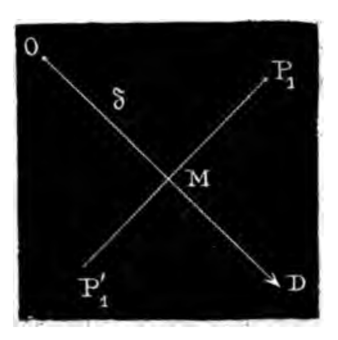


Fig. 1.

point quelconque du milieu. Par le point P_1, menons un plan parallèle aux ondes, soit le plan $P_1MP'_1$. Soit δ le chemin qu'il faut faire pour aller d'un point origine O, arbitrairement choisi, à ce plan, ce chemin étant compté positivement s'il est parcouru dans la direction OD et négativement s'il est parcouru en sens contraire. La fonction d'éclairement $\varphi(P_1, t)$, au point P_1 et à l'instant t, sera de la forme [2e Fragment, Chapitre III, égalité (23)]

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \varphi(P, t) = A_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\delta}{V_1 T} - \alpha_1\right).$$

A_1 et α_1 étant deux constantes, T étant la période de la lumière monochromatique étudiée et V_1 la vitesse de propagation de cette lumière dans le milieu 1.

Imaginons maintenant que le milieu parfaitement transparent 1, au lieu d'être illimité, confine au milieu transparent 2 par une surface plane illimitée S; supposons que la direction OD traverse cette surface plane du milieu 1 vers le milieu 2.

Si la même source de lumière luit dans le milieu 1, elle y engendre un éclairement permanent différent de celui qu'elle engendrerait dans le milieu illimité; au point P_1 du milieu 1, à l'instant t, cet éclairement est représenté non plus par la fonction $\varphi(P_1, t)$, mais par une nouvelle fonction $\varphi_1(P_1, t)$. Cette source engendre en même temps, dans le milieu 2, un certain éclairement; au point P_2 du milieu 2, à l'instant t, cet éclairement est représenté par la fonction $\Phi_2(P_2, t)$.

Posons

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \varphi_1(P_1, t) = \varphi(P_1, t) + \Phi_1(P_1, t).$$

Nous dirons que $\varphi(P_1, t)$ est la fonction d'éclairement de la *lumière incidente*;

Que $\Phi_1(P_1, t)$ est la fonction d'éclairement de la *lumière réfléchie*;

Que $\Phi_2(P_2, t)$ est la fonction d'éclairement de la *lumière réfractée.*

Ces définitions posées, nous ferons l'hypothèse suivante :

Hypothèse I. — *La lumière réfléchie est une lumière monochromatique, de même couleur que la lumière incidente; elle consiste en ondes planes dont la direction de propagation traverse la surface* S *du milieu* 2 *vers le milieu* 1.

La lumière réfractée est une lumière monochromatique, de même couleur que la lumière incidente; elle consiste en ondes planes dont la direction de propagation traverse la surface S *du milieu* 1 *vers le milieu* 2.

Prenons la surface S pour plan des xy. Sur ce plan, choisissons un point O (fig. 2) qui servira à la fois d'origine des coordonnées et de point origine pour la détermination de nos diverses fonctions d'éclairement. Par ce point, menons l'axe Oz normal au plan S et dirigé vers l'intérieur du milieu 1.

Soient : OI la direction de propagation des ondes incidentes (*rayon incident*) ;

OR la direction de propagation des ondes réfléchies (*rayon réfléchi*) ;

Oρ la direction de propagation des ondes réfractées (*rayon réfracté*).

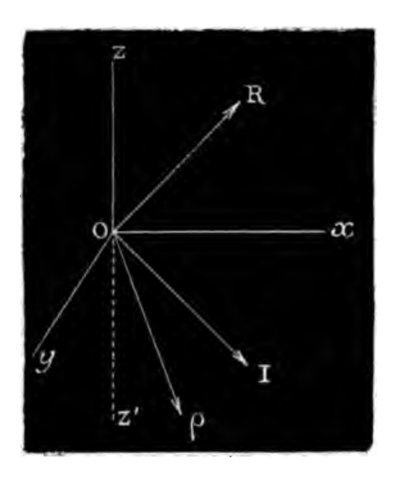


Fig. 2.

Soient l, m, n, les cosinus directeurs de la direction OI,
l', m', n', les cosinus directeurs de la direction OR,
λ, μ, ν, les cosinus directeurs de la direction Oρ.

En vertu de l'hypothèse précédente, on a les inégalités

$$(3) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad n < 0, \quad n' > 0, \quad \nu < 0.$$

La fonction $\varphi(x, y, z, t)$, fonction d'éclairement de la lumière incidente, pourra s'écrire, en vertu de l'égalité (1) et de ces notations,

$$(4) \quad . \; . \; . \; \varphi = A_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{lx + my + nz}{V_1 T} - \alpha_1\right).$$

La fonction Φ_1 sera assurément de la forme

$$(5) \quad . \; . \; . \; \Phi_1 = A'_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{l'x + m'y + n'z}{V_1 T} - \alpha'_1\right),$$

A'_1 et α'_1 étant deux constantes.

Enfin la fonction Φ_2 sera de la forme

$$(6) \quad . \quad . \quad . \quad \Phi_2 = A_2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\lambda x + \mu y + \nu z}{V_2 T} - \alpha_2\right),$$

V_2 étant la vitesse d'une lumière de période T, dans le milieu 2, et A_2, α_2, deux constantes.

Prenons, dans le milieu 1, un point M_1 infiniment voisin de la surface S. La phase de la lumière incidente au point M_1 se déduit de l'équation (4) après qu'on y a fait $z = 0$; cette phase est

$$\psi = \frac{lx + my}{V_1 T} + \alpha_1.$$

La phase de la lumière réfléchie au même point se déduit de l'équation (5), après qu'on y a fait $z = 0$; cette phase est

$$\Psi_1 = \frac{l'x + m'y}{V_1 T} + \alpha'_1.$$

Prenons, dans le milieu 2, un point M_2 infiniment voisin de la surface S. La phase de la lumière réfractée, au point M_2, se déduit de l'équation (6), après qu'on y a fait $z = 0$; cette phase est

$$\Psi_2 = \frac{\lambda x + \mu y}{V_2 T} + \alpha_2.$$

Supposons les points M_1, M_2 infiniment voisins tous deux d'un même point M $(x, y, z = 0)$ de la surface S. La quantité

$$(7) \qquad \Delta_1 = \frac{l'x + m'y}{V_1 T} - \frac{lx + my}{V_1 T} + \alpha'_1 - \alpha_1 = \Psi_1 - \psi,$$

est ce que nous nommerons *la différence de phase introduite par la réflexion au point* M.

La quantité

$$(8) \qquad \Delta_2 = \frac{\lambda x + \mu y}{V_2 T} - \frac{lx + my}{V_2 T} + \alpha_2 - \alpha_1 = \Psi_2 - \psi,$$

est ce que nous nommerons *la différence de phase introduite par la réfraction au point* M.

Ces définitions posées, nous admettrons l'hypothèse suivante :

HYPOTHÈSE II. — *La différence de phase introduite par la réflexion a la même valeur en tous les points de la surface de séparation des milieux 1 et 2.*

La différence de phase introduite par la réfraction a la même valeur en tous les points de la surface de séparation des milieux 1 et 2.

Les deux quantités Δ_1, Δ_2 doivent donc être indépendantes des coordonnées x et y.

En exprimant que Δ_1 est indépendant de x et de y, nous trouvons les égalités

$$(9) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad l = l', \quad m = m'.$$

Nous avons d'ailleurs

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1, \quad l'^2 + m'^2 + n'^2 = 1,$$

en sorte que les égalités (9) nous donnent l'égalité

$$n^2 = n'^2.$$

En vertu des deux premières inégalités (3), cette dernière égalité devient

$$(9^{bis}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad n = -n'.$$

Les égalités (9) et (9bis) expriment la loi suivante :

Le rayon incident, le rayon réfléchi, et la normale à la surface réfléchissante sont dans un même plan ; la normale dirigée vers l'intérieur du milieu 1 est bissectrice extérieure de l'angle des directions de propagation des ondes incidentes et réfléchies.

En vertu des égalités (7), (9) et (9bis), l'égalité (5), qui définit la

fonction d'éclairement de la lumière réfléchie, devient

$$(10) \qquad \Phi_1 = A'_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{lx + my + nz}{V_1 T} - \varkappa_1 - \Delta_1 \right),$$

Δ_1 étant une quantité indépendante de x, y, z, t.

En exprimant que la quantité Δ_2, donnée par l'égalité (8), est indépendante de x et de y, nous trouvons les égalités

$$(11) \quad \ldots\ldots \quad \frac{l}{V_1} = \frac{\lambda}{V_2}, \quad \frac{m}{V_1} = \frac{\mu}{V_2}.$$

Ces égalités (11), jointes à la première et à la troisième égalité (3), nous enseignent que :

Le rayon incident, le rayon réfracté et la normale au point d'incidence sont dans un même plan ; les directions de propagation des ondes incidentes et réfractées sont du même côté de la normale au point d'incidence.

Comme on a

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1,$$
$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1,$$

les égalités (11) donnent la relation

$$(12) \quad \ldots\ldots \quad \frac{n^2 - 1}{V_1^2} = \frac{\nu^2 - 1}{V_2^2}.$$

Soient i l'*angle d'incidence* IOz' et ρ l'*angle de refraction* $\rho Oz'$. Nous aurons évidemment

$$(13) \quad \ldots\ldots \cos i = -n, \quad \cos \rho = -\nu.$$

L'égalité (12) pourra alors s'écrire :

$$\frac{\sin^2 i}{\sin^2 \rho} = \frac{V_1^2}{V_2^2}.$$

Sin i et sin ρ étant d'ailleurs forcément positifs, cette égalité peut s'écrire

$$(14) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{\sin i}{\sin \rho} = N_{12},$$

en posant

$$(15) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad N_{12} = \frac{V_1}{V_2}.$$

Le sinus de l'angle d'incidence est au sinus de l'angle de réfraction dans un rapport qui ne dépend que de la nature des milieux 1 et 2. Ce rapport (indice de réfraction) est le quotient de la vitesse de la lumière dans le milieu 1 par la vitesse de la lumière dans le milieu 2.

La seconde égalité (13), jointe à l'égalité (15), donne

$$(16) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{\nu}{V_2} = -\frac{N_{12} \cos \rho}{V_1}.$$

Moyennant les égalités (8), (11) et (16), l'égalité (6), qui donne la fonction d'éclairement de la lumière réfractée, devient

$$(17) \quad \Phi_2 = A_2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{lx + my - N_{12} \cos \rho . z}{V_1 T} - \alpha_1 - \Delta_2\right),$$

égalité où Δ_2 représente une quantité indépendante de x, y, z, t.

B. *Réflexion totale des ondes planes sur une surface plane.*

Des égalités (14) et (15), on déduit l'égalité

$$\sin \rho = \frac{V_2}{V_1} \sin i.$$

Cette égalité peut devenir absurde ; il faut et il suffit pour cela que la nature des milieux 1 et 2 et l'angle d'incidence i soient tels que le second membre surpasse 1. Cela n'aura jamais lieu si la vitesse V_2 ne surpasse pas la vitesse V_1. Mais, si V_2

est supérieur à V_1, cette condition sera réalisée toutes les fois que l'*angle d'incidence* i *sera supérieur à l'angle limite* L *donné par l'égalité.*

$$(18) \quad \ldots\ldots \quad \sin L = \frac{V_1}{V_2} = N_{12}.$$

Dans ce cas, nos hypothèses, conduisant à un résultat absurde, doivent être modifiées. Nous les remplacerons par les hypothèses suivantes :

Dans le cas où l'angle d'incidence i *est supérieur à l'angle limite* L.

HYPOTHÈSE I^bis^. — *La lumière réfléchie est une lumière monochromatique, de même couleur que la lumière incidente, composée d'ondes planes dont la direction de propagation traverse la surface* S *du milieu* 2 *au milieu* 1.

Il n'y a pas de lumière réfractée.

HYPOTHÈSE IIbis. — *La différence de phase introduite par la réflexion a la même valeur en tous les points de la surface de séparation des milieux* 1 *et* 2.

Les lois de la réflexion restent alors les mêmes que dans le cas de la réflexion partielle.

C. *Retour au cas de la réflexion partielle. — Généralisation de la théorie précédente.*

Revenons au cas de la réflexion partielle.

Posons

$$(19) \quad \ldots\ldots \quad F_1 = \frac{A'_1}{A_1}, \quad F_2 = \frac{A_2}{A_1}.$$

Les fonctions d'éclairement des lumières incidente, réfléchie, réfractée, seront données, en vertu des égalités (4), (10), (17)

et (14), par les égalités

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi &= A_1 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{lx + my + nz}{V_1 T} - \alpha_1\right),\\ \Phi_1 &= F_1 A_1 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{lx + my + nz}{V_1 T} - \alpha_1 - \Delta_1\right),\\ \Phi_2 &= F_2 A_1 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{lx + my - N_{12}\cos\rho . z}{V_1 T} - \alpha_1 - \Delta_2\right),\\ &\frac{\sin i}{\sin \rho} = \frac{V_1}{V_2}. \end{aligned}\right.$$

Les quantités F_1, F_2, Δ_1, Δ_2 sont des quantités indépendantes de x, y, z, t; elles dépendent, d'une manière qui nous est encore inconnue, des données de la question qui sont la nature des milieux 1 et 2, A_1 et i.

Nous ne mentionnons pas la constante α_1, car la valeur de cette quantité dépend uniquement du choix de l'origine du temps; on peut toujours choisir cette dernière de telle sorte que $\alpha_1 = 0$.

Prenons un point M $(x, y, z = 0)$ sur la surface S et deux points M_1, M_2, l'un dans le milieu 1, l'autre dans le milieu 2, tous deux infiniment voisins du point M. Soient $\varphi\ (M_1, t)$, $\Phi_1(M_1, t)$, $\Phi_2(M_2, t)$ les fonctions d'éclairement en ces points, fonction que l'on obtient en faisant $z = 0$ dans les égalités (20).

Nous aurons

$$(21)\quad \ldots\ldots \left\{\begin{aligned} \Phi_1(M_1, t) &= F_1 \varphi(M_1, t - T\Delta_1),\\ \Phi_2(M_2, t) &= F_2 \varphi(M_1, t - T\Delta_2). \end{aligned}\right.$$

Différentions par rapport à z les égalités (20) et, dans les résultats obtenus, faisons $z = 0$; nous trouvons les relations

$$(22)\quad \ldots \left\{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}\Phi_1(M_1, t) &= -F_1 \frac{\partial}{\partial z}\varphi(M_1, t - T\Delta_1),\\ \frac{\partial}{\partial z}\Phi_2(M_2, t) &= -F_2 N_{12}\frac{\cos\rho}{n}\frac{\partial}{\partial z}\varphi(M_1, t - T\Delta_2). \end{aligned}\right.$$

Désignons par N_1 la normale à la surface réfléchissante vers l'intérieur du milieu 1 et par N_2 la normale à la même surface vers l'intérieur du milieu. La première coïncide avec la direction positive, la seconde avec la direction négative de l'axe des z. Si l'on remarque, alors, que $n = -\cos i$, on voit que l'on a

$$(23)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial N_1}\Phi_1(M_1, t) = -F_1 \dfrac{\partial}{\partial N_1}\varphi(M_1, t - T\Delta_1), \\ \dfrac{\partial}{\partial N_2}\Phi_2(M_2, t) = -F_2 N_{12}\dfrac{\cos\rho}{\cos i}\dfrac{\partial}{\partial N_1}\varphi(M_1, t - T\Delta_1), \\ \text{avec} \qquad \dfrac{\sin i}{\sin\rho} = \dfrac{V_1}{V_2} = N_{12}. \end{cases}$$

Nos fonctions Φ_1, Φ_2 vérifient donc les égalités (21) et (23) en tout point de la surface S.

La fonction Φ_1, vérifiant l'équation aux dérivées partielles

$$(24) \quad \ldots \quad V_1^2\left(\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t^2},$$

en tout point du milieu 1, est déterminée, en vertu d'un théorème fondamental de G. Kirchhoff, lorsqu'on connait les valeurs de Φ_1 et de $\frac{\partial\Phi_1}{\partial N_1}$ en tout point de la surface S.

La fonction Φ_2, vérifiant l'équation aux dérivées partielles

$$(25) \quad \ldots \quad V_2^2\left(\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial t^2},$$

en tout point du milieu 2, est déterminée lorsqu'on connait les valeurs de Φ_2 et de $\frac{\partial\Phi_2}{\partial N_2}$ en tout point de la surface S.

Les conditions aux limites (21) et (23), jointes aux équations aux dérivées partielles (24) et (25), équivalent donc aux formules (20) qui donnent l'expression analytique de la fonction Φ_1 en tout point du milieu 1 et de la fonction Φ_2 en tout point du milieu 2.

Mais cette manière nouvelle de définir les fonctions Φ_1, Φ_2 offre l'avantage de pouvoir s'étendre au cas où des ondes de

forme quelconque rencontrent une surface de forme quelconque séparant deux milieux transparents.

Soit S (fig. 3) la surface de séparation des milieux 1 et 2 ; soit M un point de la surface S ; supposons que les rayons de courbure de la surface au voisinage du point M soient des quantités très grandes par rapport aux longueurs d'onde V_1T, V_2T ; sans cette restriction, les hypothèses que nous allons faire pourraient devenir inexactes.

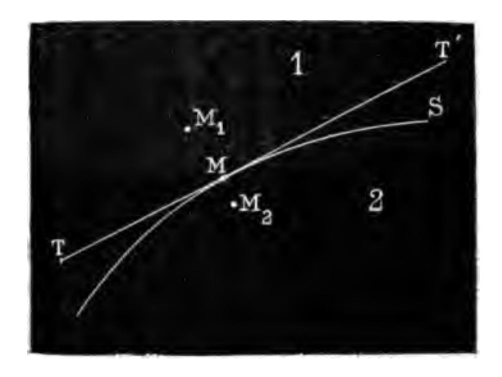


Fig. 3.

Considérons la fonction d'éclairement au point M_1, infiniment voisin du point M et situé dans le milieu 1. Cette fonction se compose, dans le cas le plus général, comme le démontre le théorème fondamental de G. Kirchhoff, d'une somme de termes, en nombre limité ou illimité. Chacun de ces termes représente la fonction d'éclairement qu'engendrerait au point M_1, placé dans le milieu 1 supposé illimité, un point lumineux O, d'éclat constant, convenablement placé.

Par le point M, menons le plan tangent TT' à la surface S.

Deux cas peuvent se présenter :

Ou bien le point O est du même côté que le point M_1 par rapport au plan tangent TT'. On dit alors que le terme considéré représente une lumière incidente au point M, provenant du milieu 1.

Ou bien le point O est du côté opposé au point M_1 par rapport

au plan tangent TT'. On dit alors que le terme considéré représente une lumière émergente au point M, dans le milieu 1.

On définit de même une lumière incidente venant du milieu 2 et une lumière émergente dans le milieu 2.

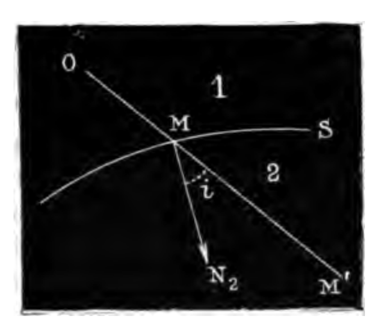


Fig. 4.

Considérons une lumière incidente venant du milieu 1. Soit O le point dont elle est censée provenir (fig. 4). Joignons OM. Cette droite prolongée MM' fait avec la normale N_2 menée à la surface S, par le point M, vers l'intérieur du milieu 2 un angle i que nous nommerons *angle d'incidence*. Nous admettrons qu'à cette lumière *incidente*, dont φ_1 est la fonction d'éclairement, correspond une lumière émergente au point M, vers l'intérieur du milieu 1 (*lumière réfléchie*), lumière dont Φ_1 est la fonction d'éclairement; et une lumière émergente au point M, vers l'intérieur du milieu 2 (*lumière réfractée*), lumière dont Φ_2 est la fonction d'éclairement. Nous supposerons que l'on a

$$\Phi_1(M_1, t) = F_1\varphi_1(M_1, t - T\Delta_1),$$

$$\Phi_2(M_2, t) = F_2\varphi_1(M_2, t - T\Delta_2),$$

$$\frac{\partial}{\partial N_1}\Phi_1(M_1, t) = -F_1\frac{\partial}{\partial N_1}\varphi_1(M_1, t - T\Delta_1),$$

$$\frac{\partial}{\partial N_2}\Phi_2(M_2, t) = -F_2 N_{12}\frac{\cos \rho}{\cos i}\frac{\partial}{\partial N_1}\varphi_1(M_1, t - T\Delta_2),$$

$$\frac{\sin i}{\sin \rho} = N_{12} = \frac{V_1}{V_2}.$$

Nous ferons des hypothèses analogues touchant toute lumière incidente qui vient au point M de l'intérieur du milieu 2.

Ces hypothèses suffisent non seulement à retrouver toutes les lois de la réflexion et de la réfraction telles qu'on les déduirait du principe d'Huygens, mais encore à déterminer avec précision dans quels cas et de quelle manière ces lois sont troublées par les phénomènes de diffraction ; G. Kirchhoff a établi ces points dans ses *Leçons d'optique*.

Il semble donc qu'il ne nous reste plus, pour achever la théorie de la réflexion et de la réfraction à la surface de séparation de deux milieux transparents, qu'à déterminer comment les quantités F_1, F_2, Δ_1, Δ_2 dépendent de la nature des deux milieux, de l'amplitude de la lumière incidente et de l'angle d'incidence. Mais une nouvelle classe de phénomènes, qui nous obligera à reprendre toute la théorie optique, va venir compliquer ce problème en apparence et, en réalité, en fournir la solution.

CHAPITRE PREMIER.

La polarisation de la lumière.

A. Comparaison de la théorie de la réflexion dans le système de Young et de l'expérience.

Considérons un milieu 1 illimité éclairé par des ondes planes donnant une lumière constante ; la fonction d'éclairement de ces ondes sera de la forme :

$$\varphi_1 = A_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{lx + my + nz}{V_1 T} - \alpha_1\right),$$

l, m, n, étant les cosinus directeurs de la normale à l'onde.

L'intensité de la lumière incidente (*) sera

$$J_1 = \frac{A_1^2}{2}.$$

Faisons tomber ces ondes planes sur une surface plane illimitée séparant le milieu 1 d'un second milieu transparent 2. Prenons pour axe des z la normale à cette surface vers l'intérieur du milieu 1. La fonction d'éclairement de la lumière réfléchie sera [Chapitre préliminaire, égalités (20)] :

$$\Phi_1 = F_1 A_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{lx + my - nz}{V_1 T} - \alpha_1 - \Delta_1\right).$$

L'intensité de la lumière réfléchie sera

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad J'_1 = \frac{F_1^2 A_1^2}{2} = F_1^2 J_1.$$

(*) Le facteur $\frac{1}{2}$ a été omis dans toutes les égalités où figure l'intensité J, à partir du Chapitre III, G. de notre deuxieme fragment.

Le facteur F_1 ne peut dépendre que de la nature des milieux 1 et 2, de l'amplitude A_1 (partant de l'intensité J_1) de la lumière incidente, enfin de l'angle d'incidence. Donc, *dans le système optique de Young, lorsque des ondes planes tombent à la surface de séparation plane de deux milieux transparents, l'intensité de la lumière réfléchie ne dépend que de la nature des deux milieux, de l'intensité de la lumière incidente et de l'angle d'incidence.*

Comparons cette loi aux résultats de l'expérience :

Cette loi se montre d'accord avec l'expérience lorsque la lumière incidente employée est la lumière que fournit le soleil ou celle que produit une lampe, un corps incandescent, etc. Au contraire, on la trouve en désaccord avec les faits lorsque les ondes planes incidentes, au lieu de venir directement d'une source de lumière, ont déjà subi des réflexions ou des réfractions.

Prenons des ondes planes ayant subi des réflexions ou des réfractions dont, pour le moment, il nous est inutile de préciser la nature. Soit OI (fig. 5) la direction de propagation de ces ondes (rayon incident). Faisons tomber ces ondes sur une surface plane MM' séparant le milieu transparent 1 (air) du milieu transparent 2 (verre). Soit IR le rayon réfléchi.

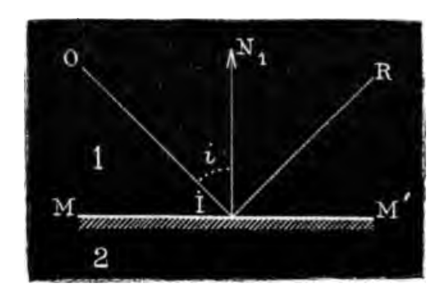


Fig 5.

Faisons tourner la normale N_1 au miroir autour du rayon incident OI pris comme axe ; le rayon réfléchi IR tourne en même temps et décrit un cône ; durant cette rotation :

1° La nature des milieux 1 et 2 ne varie pas;

2° L'intensité de la lumière incidente ne varie pas;

3° L'angle d'incidence ne varie pas.

D'après la théorie exposée au Chapitre préliminaire, l'intensité de la lumière réfléchie ne devrait pas varier; or, en général, cette intensité varie; durant une révolution complète du miroir, elle passe par deux maxima et deux minima; une demi-révolution sépare les deux maxima, une demi-révolution sépare les deux minima; un quart de révolution sépare un maximum d'un minimum.

Cette expérience nous montre clairement que, parmi les hypothèses sur lesquelles repose le système optique que nous nommons *système de Young*, il en est qui doivent être rejetées. Nous allons chercher à construire un système optique qui s'accorde non seulement avec les faits d'expérience dont rendait compte le système de Young, mais encore avec les faits d'expérience qui échappent à ce système. C'est à ce nouveau système que nous donnerons le nom d'*Optique de Fresnel*.

B. *Le plan de polarisation.*

Commençons par répéter l'expérience précédente sous une forme plus systématique.

Des ondes planes, monochromatiques, dont AB est la direction de propagation (fig. 6), tombent sur une première surface plane réfléchissante M_1, dont N_1 est la normale; cette surface sépare l'air d'un milieu transparent, du verre par exemple; l'angle d'incidence i_1 n'est pas pris au hasard; il est tel que le rayon réfléchi BC soit perpendiculaire au rayon réfracté qui se forme dans la substance transparente du miroir M_1; cet angle, qui dépend de la nature de cette substance et de la couleur de la lumière monochromatique employée est ce que nous nommerons l'*angle de polarisation totale*, ou l'*incidence Brewstérienne* (*).

Les ondes planes et réfléchies, dont BC est la direction de

(*) Dans l'exposé de ses recherches d'optique, Brewster, au lieu de donner la valeur de l'angle i_1, donne la valeur du *complément* de cet angle, c'est-à-dire la valeur d l'angle que le rayon AB fait avec la surface M_1.

propagation, tombent à leur tour sur un second miroir de verre M_2; elles tombent sur ce miroir non point sous n'importe quel angle, mais sous l'angle d'incidence Brewstérienne i_2 de la substance qui forme le miroir M_2. Si les deux miroirs M_1, M_2, sont formés de la même substance, $i_2 = i_1$.

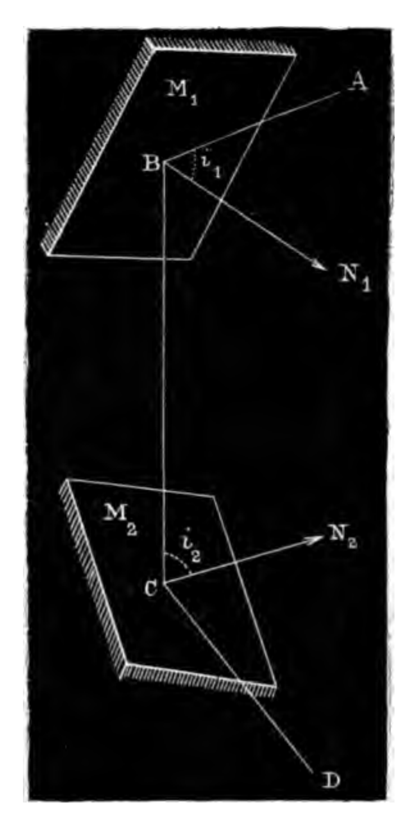


Fig. 6.

Le miroir M_1 étant fixe, ainsi que les ondes incidentes, on fait tourner le miroir M_2 autour d'une direction parallèle au premier rayon réfléchi BC; le second rayon réfléchi CD tourne en même temps autour de BC.

Cette opération laisse invariable :

La lumière qui tombe sur le miroir M_2 ;

La substance qui forme ce miroir ;

L'angle d'incidence i_2.

L'intensité de la lumière réfléchie sur le second miroir suivant le rayon CD subit des variations.

Durant une révolution complète du miroir M_2, son éclat passe par deux maxima et deux minima.

Son éclat est maximum lorsque le plan d'incidence BCD de la lumière sur le miroir M_2 coïncide avec le plan d'incidence ABC de la lumière sur le miroir M_1.

Son éclat est minimum lorsque le plan d'incidence BCD est perpendiculaire au plan d'incidence ABC. Dans ce cas, LE MIROIR M_2 NE RÉFLÉCHIT PLUS AUCUNE LUMIÈRE.

Lorsque les deux plans d'incidence ABC, BCD, font entre eux un angle α, l'intensité de la lumière réfléchie par le miroir M_2 a pour valeur

$$J = \mathfrak{J} \cos^2 \alpha,$$

en désignant par $\mathfrak{J}$ l'intensité de cette lumière dans le cas particulier où les deux plans d'incidence coïncident. (*Loi de Malus.*)

Nous exprimons ces faits en disant que *la lumière réfléchie par le miroir* M_1 *est complètement polarisée et que son plan de polarisation est le plan d'incidence* ABC.

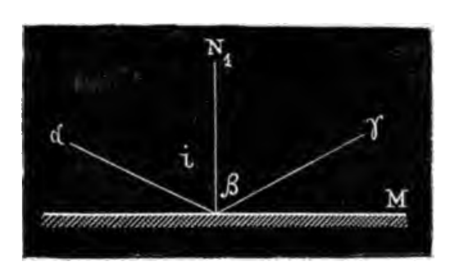


Fig. 7.

Imaginons maintenant que nous ayons une lumière monochromatique fixe, composée d'ondes planes, dont $\alpha\beta$ (fig. 7) est la direction de propagation. Faisons tomber ces ondes sur un

miroir de verre, plan, M. Elles fournissent des ondes planes réfléchies dont $\beta\gamma$ est la direction de propagation. Prenons pour angle d'incidence l'angle de polarisation totale propre au miroir M et à la couleur considérée. Faisons tourner le miroir M autour du rayon $\alpha\beta$. Si, pour une orientation particulière de ce miroir, le rayon $\beta\gamma$ est éteint complètement, les ondes qui ont $\alpha\beta$ pour direction de propagation seront dites *complètement polarisées*; si par $\alpha\beta$ on mène un plan perpendiculaire à la position qu'occupe le plan d'incidence au moment où la lumière réfléchie s'éteint, ce plan sera nommé *plan de polarisation* de la lumière incidente.

Ces définitions ne s'appliquent, jusqu'ici, qu'à une lumière composée d'ondes planes; il est aisé de les étendre à la lumière envoyée par un point lumineux qui brille d'un éclat constant.

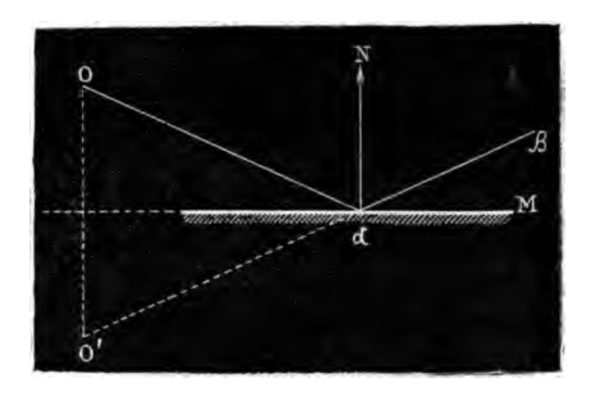


Fig. 8

Soit O ce point lumineux (fig. 8). Recevons sur un miroir de verre, plan, M, la lumière qu'il émet; observons seulement la partie de la lumière réfléchie qui provient de rayons incidents tombant sur le miroir sous une incidence voisine de l'angle de polarisation totale. Soit $O\alpha$ le rayon incident qui fait avec la normale αN l'angle dont il s'agit. Faisons tourner le miroir M autour de cette droite $O\alpha$. Si, pour une orientation donnée du miroir, l'image O' du point O est complètement éclipsée, la lumière émise par le point O dans la direction $O\alpha$ est dite

complètement polarisée. Son plan de polarisation est le plan mené par $O\alpha$ normalement à la position qu'occupe le plan d'incidence au moment où l'image O' disparait.

C. Polariseurs et analyseurs.

Le procédé que nous venons d'employer permet d'étudier les diverses lumières formées d'ondes planes ou sphériques, de reconnaître si elles sont complètement polarisées, et, dans ce cas, de déterminer leur plan de polarisation.

Il nous permet, tout d'abord, d'établir la loi expérimentale suivante :

Lorsqu'un rayon lumineux, dans l'air, est complètement polarisé en un point de son parcours, il est complètement polarisé tout le long de son parcours et son plan de polarisation a partout même orientation.

Cette loi n'a évidemment de sens qu'autant que la notion de rayon lumineux a un sens ; elle tombe d'elle-même dans tous les cas où il se produit des phénomènes de diffraction, *cas qui sont exactement indiqués par l'optique de Young.*

La méthode précédente nous permet d'étudier les divers polarisateurs, pile de glace, tourmaline, rhomboèdre de spath, nicol, etc..., et de préciser les lois de la polarisation qu'ils engendrent. Nous pouvons ensuite, en plaçant chacun de ces appareils sur le trajet d'un rayon polarisé dont le plan de polarisation est connu, observer comment ils se comportent, et, cette observation faite, les employer comme analyseurs.

Ainsi nous pourrons, dans ce qui va suivre, faire appel à l'emploi des polariseurs ou des analyseurs sans aucun cercle vicieux.

D. La vibration lumineuse.

Avant de pousser plus loin l'étude de la lumière polarisée, nous ferons une hypothèse restrictive au sujet de la nature des milieux sur lesquels porteront nos considérations. Cette hypothèse est la suivante :

Considérons un milieu illimité, pris parmi ceux que nous voulons étudier ; dans ce milieu, traçons un plan quelconque ; deux points, deux lignes, deux plans, symétriques par rapport à ce plan ont exactement les mêmes propriétés physiques.

Cette hypothèse entraîne la conséquence suivante :

Le plan de polarisation au point C *d'un rayon complètement polarisé* OC *est indépendant de la position du point* C *sur ce rayon.*

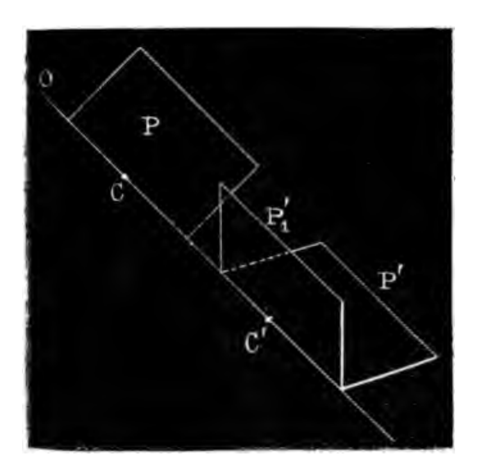


Fig. 9.

Soient, en effet, C, C',... des points successifs pris sur un même rayon complètement polarisé, et imaginons que l'orientation du plan de polarisation du rayon varie d'une manière continue lorsqu'on passe de l'un de ces points aux suivants. Le plan de polarisation au point C est le plan P (fig. 9) ; le plan de polarisation au point C', le plan P'. Par hypothèse, deux plans symétriques l'un de l'autre par rapport au plan P doivent posséder exactement les mêmes propriétés physiques ; si donc le plan P' est plan de polarisation du rayon au point C', il en est de même de son symétrique P'_1 par rapport au plan P ; et comme le rayon n'admet, au point C', qu'un seul plan de polarisation, les deux plans P', P'_1 doivent coïncider ; pour cela, il faut et il suffit ou

bien que le plan P' soit perpendiculaire au plan P, ou bien que le plan P' coïncide avec le plan P; le point C' étant un point quelconque du rayon, la première hypothèse est incompatible avec la supposition que le plan de polarisation varie d'une manière continue d'un point à l'autre du rayon, et la seconde hypothèse est forcément exacte.

Nous avons vu que la proposition que nous venons de démontrer était expérimentalement établie dans le cas de l'air.

Une substance pour laquelle cette proposition est exacte est dite *dénuée de pouvoir rotatoire. Nous n'étudierons donc que les substances transparentes dénuées de pouvoir rotatoire.*

Voyons comment, au sein d'un semblable milieu, nous pourrons représenter une lumière complètement polarisée.

Nous avions admis que, lorsqu'un milieu est éclairé d'une manière constante par des ondes planes, la fonction d'éclairement en un point de ce milieu était de la forme

$$\varphi = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{lx + my + nz}{VT} - \alpha\right),$$

A, α étant deux constantes et l, m, n, les cosinus directeurs de la direction de propagation des ondes planes. L'intensité était donnée par la formule

$$J = \frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} \varphi^2 dt = \frac{A^2}{2}.$$

Rien ne nous empêche de conserver ces hypothèses dans le cas où le milieu est éclairé d'une manière constante par des ondes planes *complètement polarisées*. Il faudra seulement, pour achever de définir ces ondes lumineuses, indiquer la direction de leur plan de polarisation.

Nous avons admis aussi que lorsqu'un point lumineux d'éclat fixe brillait dans un milieu illimité, la fonction d'éclairement était de la forme

$$\varphi = \frac{A}{r} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{VT} - \alpha\right),$$

r étant la distance du point éclairé (x, y, z) à la source de la lumière (x_0, y_0, z_0), A et α étant deux constantes si le point lumineux brille également en toute direction, et des fonctions de $\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z}$, si la source de lumière a un éclat différent dans les diverses directions. L'intensité était donnée par la formule

$$J = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \varphi^2 dt = \frac{A^2}{2r^2}.$$

Rien ne nous empêche de conserver ces hypothèses lorsque le point lumineux émet, dans toutes les directions, de la lumière *complètement polarisée*. Il suffira, pour définir complètement l'éclairement de ce point lumineux, d'indiquer l'orientation du plan de polarisation relatif à chaque rayon.

Imaginons maintenant que plusieurs points lumineux, dont chacun émet, dans chaque direction, de la lumière complètement polarisée, brillent simultanément dans le même milieu. Suivant quelle règle pourrons-nous déterminer l'éclairement produit en un point du milieu par l'ensemble de ces sources, connaissant l'éclairement que chacune d'elles produirait isolément au même point ?

La première idée qui se présente à l'esprit est de conserver la règle dont nous avions fait usage avant l'introduction de la notion de lumière polarisée. Soient $\varphi, \varphi', \varphi''\ldots$, les fonctions d'éclairement que les sources O, O′, O″..., produiraient isolément au point M et à l'instant t. Leur ensemble produit au point M et à l'instant t une fonction d'éclairement

$$\Phi = \varphi + \varphi' + \varphi'' + \cdots.$$

Si chacune de ces sources est d'éclat fixe, l'intensité lumineuse au point M et à l'instant t a pour valeur

$$J = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \Phi^2 dt.$$

Si cette règle était exacte, on voit que l'orientation des plans de polarisation des diverses lumières envoyées au point M par les sources O, O′, O″, ... n'aurait aucune influence sur l'intensité lumineuse en ce point.

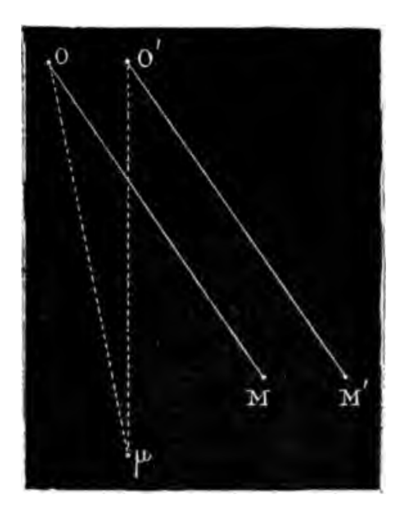


Fig. 10.

En particulier, prenons deux sources O, O′ (fig. 10), telles que la source O′ produise au point M′, à l'instant t, la même fonction d'éclairement que la source O au point M à l'instant t, lorsque les deux segments OM, O′M′ ont même longueur et même direction ; mais supposons que les deux rayons OM, O′M′, propagent de la lumière complètement polarisée dans des plans quelconques. En un point μ du milieu, les deux sources donneraient un éclairement constant, déterminé par un calcul précédemment fait (2ᵉ fragment, Chapitre III, I); cet éclairement serait indépendant des plans de polarisation des deux rayons $O\mu$, $O'\mu$; il ne changerait pas lorsque l'on ferait varier l'un ou l'autre de ces plans de polarisation. Aux points μ qui sont à peu près équidistants des sources O, O′, et à une distance de ces sources grande par rapport à OO′, on apercevrait des franges d'interférence dont l'aspect ne varierait pas lorsque l'on ferait

tourner, autour du rayon $O'\mu$, le plan de polarisation de ce rayon.

Cette expérience a été réalisée par Fresnel et Arago; par un dispositif qui est décrit dans tous les traités, ils ont réalisé deux sources O, O', identiques d'ailleurs, mais envoyant au point μ de la lumière polarisée suivant des plans différents; le plan de polarisation du rayon $O\mu$ était fixe; le plan de polarisation du rayon $O'\mu$ pouvait au contraire tourner autour du rayon; ils ont observé des franges d'interférence dont l'aspect variait avec l'orientation du plan de polarisation du rayon $O'\mu$; la netteté de ces franges était maxima lorsque l'orientation du plan de polarisation du rayon $O'\mu$ différait le moins possible de l'orientation du plan de polarisation du rayon $O\mu$; les franges disparaissaient complètement lorsque les deux plans de polarisation se coupaient à angle droit.

Cette expérience de Fresnel et Arago nous oblige à chercher une nouvelle règle pour la composition des lumières émises simultanément par plusieurs sources.

Au lieu de définir un éclairement complètement polarisé en un point en nous donnant séparément, d'une part, une fonction d'éclairement qui a une grandeur, mais pas de direction et, d'autre part, l'orientation du plan de polarisation, nous allons introduire une *fonction d'éclairement dirigée* dont la direction nous fera connaitre le plan de polarisation.

Traitons séparément le *cas des ondes planes* et le *cas des ondes sphériques.*

1° Le point M (fig. 11) est éclairé par des ondes planes, complètement polarisées dans un certain plan P, et produisant un éclairement constant.

Pour définir l'éclairement au point M, nous supposerons que l'on donne en ce point un *axe* V'MV, c'est-à-dire une droite sur laquelle le point M sert d'origine, sur laquelle il y a un sens de parcours positif MV et un sens de parcours négatif MV'. Nous supposerons qu'*une règle exempte d'ambiguïté*, et qui reste à fixer, nous fasse connaître le plan de polarisation P lorsque nous connaîtrons la droite V'MV et la normale à l'onde MD.

Nous supposerons que sur l'axe V'MV, on porte, à partir du point M et dans le sens MV une longueur $Mv = \varphi$, variable avec t, et donnée par la formule

$$\varphi = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{lx + my + nz}{VT} - \alpha \right),$$

x, y, z, étant les coordonnées du point M;

l, m, n, les cosinus directeurs de la droite MD;

T, une quantité caractérisant la couleur de la lumière monochromatique employée;

V, la vitesse de cette lumière monochromatique dans le milieu considéré;

A et α deux quantités indépendantes d'x, y, z, t.

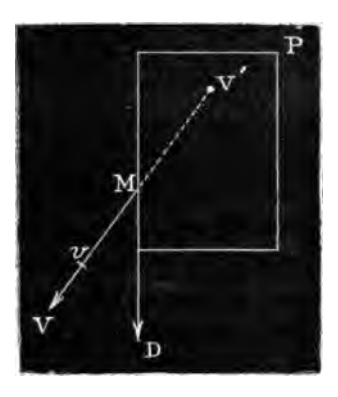


Fig. 11.

Nous admettrons enfin que l'intensité lumineuse est donnée par la formule

$$J = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \varphi^2 dt = \frac{A^2}{2}.$$

Le point figuratif v exécute sur la droite V'MV, autour du point M, un mouvement pendulaire de période T. D'où le nom de VIBRATION LUMINEUSE que nous donnerons au segment de direction fixe, mais de grandeur variable avec t, Mv.

L'EMPLOI DU MOT : VIBRATION LUMINEUSE, N'EST NULLEMENT LIÉ A L'HYPOTHÈSE QUE LA LUMIÈRE CONSISTE EN UN MOUVEMENT VIBRATOIRE DE CERTAINS CORPS.

2° Le milieu est éclairé d'une manière fixe par un point lumineux O (fig. 12) donnant, en chaque point M, de la lumière complètement polarisée dans un plan P.

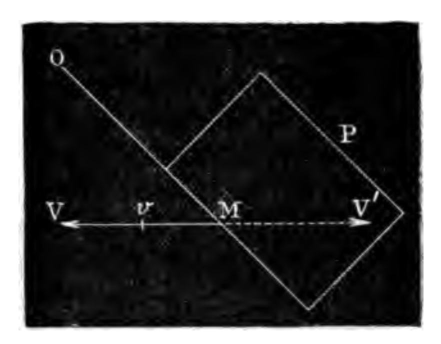


Fig. 12.

Pour définir complètement l'éclairement au point M, nous supposerons que l'on donne en ce point un axe V'MV ayant le point M pour origine et MV pour sens de parcours positif. Nous supposerons qu'*une règle exempte d'ambiguïté* et qui reste à fixer, nous fasse connaître le plan de polarisation P toutes les fois que nous connaîtrons les deux directions OM, MV; cette règle devra d'ailleurs renfermer, comme cas particulier, la règle adoptée dans le cas des ondes planes. Nous supposerons que sur l'axe V'MV, on porte, à partir du point M et dans le sens MV, une longueur $Mv = \varphi$, variable avec t, et donnée par la formule

$$\varphi = \frac{A}{r} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{VT} - \alpha\right).$$

Dans cette formule, r est la distance OM;

A et α sont des quantités indépendantes de x, y, z, t, si le point O éclaire également en toute direction; si le point O n'éclaire pas également en toute direction, les quantités A et α dépendent des cosinus directeurs $\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z}$ du rayon OM.

Nous admettrons enfin que l'intensité est donnée par la formule

$$J = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \varphi^2 dt = \frac{A^2}{2r^2}.$$

Le point figuratif v exécute sur la droite V'MV, un mouvement vibratoire pendulaire, autour du point M ; T est la période de ce mouvement; le segment Mv, de direction fixe, mais de grandeur variable, se nomme la *vibration lumineuse* au point M.

D'après ce que nous venons de dire, lorsqu'un milieu est éclairé d'une manière constante par des ondes planes ou sphériques complètement polarisées, la connaissance de la vibration lumineuse en chaque point fait connaître :

1° La couleur de la lumière, par la période de la vibration ;

2° L'intensité de la lumière, par le demi-carré de l'amplitude ;

3° L'orientation du plan de polarisation par la direction de la vibration.

La connaissance de la vibration entraîne donc la connaissance de toutes les propriétés observables de l'éclairement considéré ; ou plutôt, elle entraînera cette connaissance *lorsqu'on aura fixé la règle, exempte d'ambiguïté, qui doit relier l'orientation du plan de polarisation à la direction de la vibration et à la normale à l'onde.*

Touchant cette règle, l'hypothèse restrictive faite au sujet des milieux que nous étudions nous donne une première indication :

Considérons un milieu éclairé par des ondes planes ou sphériques complètement polarisées. Soient, au point M, MV la direction de vibration (fig. 13) et MN la normale à l'onde. Supposons que la règle en question nous conduise, étant données les deux droites MV, MN, à prendre pour plan de polarisation le plan P qui, par définition, passe par la droite MN. D'après l'hypothèse faite au sujet des milieux que nous étudions, deux plans quelconques, symétriques par rapport au plan NMV, ne se peuvent distinguer physiquement ; si donc le plan P est plan de polarisation au point M, le plan P', symétrique de P par rapport au plan NMV, est aussi plan de polarisation au point M ; pour

que la règle cherchée soit exempte d'ambiguïté, il faut que les deux plans P et P′ coïncident, ce qui entraîne l'une des deux propositions suivantes : ou bien le plan P coïncide avec le plan NMV, ou bien le plan P est perpendiculaire au plan NMV.

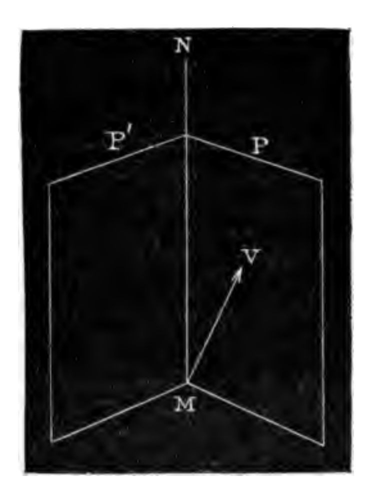


Fig. 13.

Ainsi : *dans les milieux que nous étudions, ou bien la vibration lumineuse est dans le plan de polarisation, ou bien le plan de la normale à l'onde et de la vibration lumineuse est perpendiculaire au plan de polarisation.*

Le choix de la direction de la vibration lumineuse ne serait soumis à aucune autre restriction si l'on se proposait seulement d'étudier l'éclairement d'un milieu illimité par une source unique.

E. *La vibration lumineuse* (suite). — *Interférence de lumières complètement polarisées.*

Mais il n'en est plus de même si l'on admet la règle suivante pour déterminer l'éclairement produit en un point de l'espace par un certain nombre de sources émettant de la lumière complètement polarisée, lorsqu'on connaît l'éclairement produit en ce point par chacune de ces sources prise isolément.

Soient $Mv = \varphi(t)$, $Mv' = \varphi'(t)$, $Mv'' = \varphi''(t)$, ..., *les vibrations qui représenteraient l'éclairement produit au point* M, *à l'instant* t, *par chacune des lumières considérées brillant isolément. Composons entre eux les segments* Mv, Mv', Mv''... *Nous obtenons un segment résultant*

$$MV = \Phi(t),$$

dont la grandeur et la direction varient périodiquement avec le temps t, *la période étant* T. *L'intensité lumineuse au point* M *et à l'instant* t *a pour valeur*

$$(2) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad J = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \Phi^2(t)\,dt.$$

Cette règle donne-t-elle des résultats conformes aux faits d'expérience ? Nous allons voir que cette règle s'accorde avec les faits d'expérience à la condition que l'on adopte un certain mode de correspondance bien déterminé entre le plan de polarisation d'un rayon complètement polarisé et la direction de la vibration.

Développons, tout d'abord, la règle précédente.

Prenons trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz.

Soient $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ les composantes du segment $Mv = \varphi(t)$,
$u'(t)$, $v'(t)$, $w'(t)$ les composantes du segment $Mv' = \varphi'(t)$,

. . . .

Nous aurons

$$(3) \quad . \ . \ . \ . \quad \left\{ \begin{aligned} J = {} & \frac{1}{T}\int_t^{t+T} [u(t) + u'(t) + \cdots]^2 dt \\ & + \frac{1}{T}\int_t^{t+} [v(t) + v'(t) + \cdots]^2 dt \\ & + \frac{1}{T}\int_t^{t+T} [w(t) + w'(t) + \cdots]^2 dt \end{aligned} \right.$$

V. *La vibration lumineuse* (suite). — *Expérience de Fresnel et Arago.*

Comparons la règle précédente aux résultats de l'expérience de Fresnel et Arago.

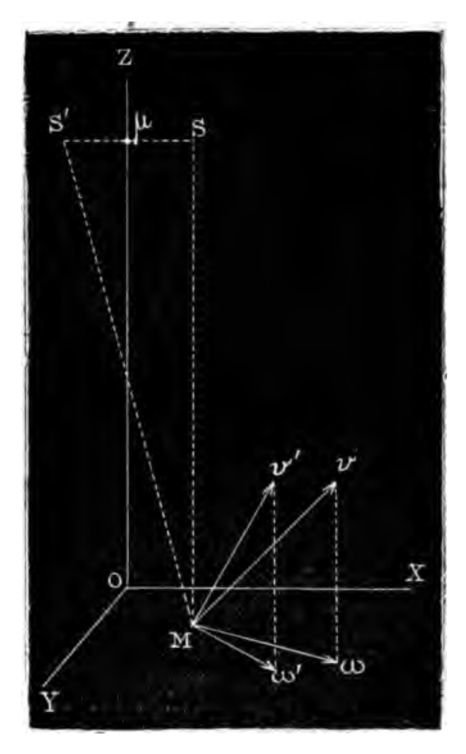


Fig. 14.

Soient S et S' deux sources identiques (fig. 14). Chacune de ces sources produit un éclairement fixe que nous supposerons, au moins entre les limites qui nous intéressent, indépendant de la direction du rayon. Faisons passer l'axe des z par le milieu μ de SS', et menons-le perpendiculairement à SS'. Menons l'axe Ox parallèle à S'S.

Nous supposerons la distance S'S très petite par rapport aux

distances OS, OS′; nous étudierons l'éclairement en un point M du plan des xy très voisin du point O.

La vibration envoyée au point M par la source S est $Mv = \varphi(t)$; ses composantes sont $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$.

La vibration envoyée au point M par la source S′ est $Mv' = \varphi'(t)$; ses composantes sont $u'(t)$, $v'(t)$, $w'(t)$.

Nous avons

$$\varphi(t) = \frac{A}{r} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{VT} - \alpha\right),$$

$$\varphi'(t) = \frac{A}{r'} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r'}{VT} - \alpha\right),$$

en désignant par r, r' les distances SM, S′M et par A et α deux constantes.

r différant très peu de r', on peut remplacer r' par r dans les termes où cette quantité n'est pas divisée par la très petite longueur VT. On pourra donc écrire

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} u(t) &= \frac{A}{r} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{VT} - \alpha\right) \cos(Mv, x), \\ v(t) &= \frac{A}{r} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{VT} - \alpha\right) \cos(Mv, y), \\ w(t) &= \frac{A}{r} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{VT} - \alpha\right) \cos(Mv, z). \end{aligned} \right.$$

$$(4^{bis}) \quad \left\{ \begin{aligned} u'(t) &= \frac{A}{r} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r'}{VT} - \alpha\right) \cos(Mv', x), \\ v'(t) &= \frac{A}{r} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r'}{VT} - \alpha\right) \cos(Mv', y), \\ w'(t) &= \frac{A}{r} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r'}{VT} - \alpha\right) \cos(Mv', z). \end{aligned} \right.$$

Si la vibration Mv est dans le plan de polarisation P du rayon SM, faisant un certain angle θ avec ce rayon SM, la vibration Mv' est dans le plan de polarisation P′ du rayon S′M, faisant

l'angle θ avec la direction S'M. Si la vibration Mv est dans le plan mené par SM normalement au plan de polarisation P et si elle fait un angle θ avec la direction SM, la vibration Mv' est dans le plan mené par S'M normalement au plan de polarisation P', et elle fait un angle θ avec la direction S'M. La règle qui lie la position de la vibration à la position du plan de polarisation doit, en effet, être la même pour le rayon SM et pour le rayon S'M.

De cette remarque, on peut déduire deux conséquences :

1° Les deux vibrations Mv, Mv' font un même angle avec l'intersection des deux plans de polarisation P, P' ;

2° Si l'on projette les deux vibrations Mv, Mv' sur un plan perpendiculaire à l'intersection des deux plans P, P', l'angle des deux projections sera égal à l'angle des deux plans.

Mais les deux plans P, P', passent l'un par la droite SM, l'autre par la droite S'M; comme ces deux droites sont très voisines l'une de l'autre et de la droite Oz, l'intersection des deux plans de polarisation P, P', diffère peu de Oz. Les deux propositions précédentes peuvent donc s'énoncer ainsi :

1° Les deux vibrations Mv, Mv', font sensiblement le même angle avec la ligne Oz :

$$(5) \qquad \cos(Mv, z) = \cos(Mv', z), \quad \sin(Mv, z) = \sin(Mv', z);$$

2° Si l'on projette les vibrations Mv, Mv', suivant Mω, Mω', sur le plan des xy, l'angle ω Mω' est sensiblement égal à l'angle des deux plans de polarisation P, P' :

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \cos(\omega M\omega') &= \cos(M\omega, x)\cos(M\omega', x) + \cos(M\omega, y)\cos(M\omega', y) \\ &= \cos(P, P'). \end{aligned} \right.$$

On a d'ailleurs

$$(7) \; . \; . \; . \left\{ \begin{aligned} \cos(Mv, x) &= \cos(M\omega, x)\sin(Mv, z), \\ \cos(Mv, y) &= \cos(M\omega, y)\sin(Mv, z), \\ \cos(Mv', x) &= \cos(M\omega', x)\sin(Mv', z), \\ \cos(Mv', y) &= \cos(M\omega', y)\sin(Mv', z). \end{aligned} \right.$$

Or, les égalités (3), (4), (4bis) nous donnent, en vertu d'un calcul bien connu :

$$
\begin{aligned}
J = & \frac{A^2}{2r^2}\left[\cos^2(Mv\,,x) + \cos^2(Mv\,,y) + \cos^2(Mv\,,z)\right] \\
+ & \frac{A^2}{2r^2}\left[\cos^2(Mv',x) + \cos^2(Mv',y) + \cos^2(Mv',z)\right] \\
+ & \frac{A^2}{r^2}\left[\cos(Mv,x)\cos(Mv',x) + \cos(Mv,y)\cos(Mv',y)\right. \\
+ & \left.\quad \cos(Mv,z)\cos(Mv',z)\right]\cos\pi\frac{r'-r}{VT}.
\end{aligned}
$$

En vertu des égalités (5), (6) et (7), cette égalité devient

$$
(8) \quad J = \frac{A^2}{r^2}\left\{1 - \left[\sin^2(Mv,z)\cos(P,P') + \cos^2(Mv,z)\right]\cos\pi\frac{r'-r}{VT}\right\}.
$$

Dans le cas particulier où les deux plans de polarisation sont rectangulaires, $\cos(P, P') = O$ et l'égalité précédente se réduit à

$$
(9) \quad \ldots\ldots \quad J = \frac{A^2}{r^2}\left[1 - \cos^2(Mv,z)\cos\pi\frac{r'-r}{VT}\right].
$$

Or, l'expérience de Fresnel et Arago nous apprend que, dans ce cas, les franges d'interférence disparaissent; au voisinage du point O, le champ se montre uniformément éclairé; l'intensité J, donnée par l'égalité (9), doit donc être indépendante de $(r'-r)$, ce qui exige que l'on ait

$$
(10) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \cos(Mv,z) = O.
$$

Si l'on remarque que la ligne Oz diffère très peu en direction de la ligne MS, on voit que l'on peut énoncer la proposition suivante :

La règle d'interférence des lumières polarisées n'est compatible avec l'expérience de Fresnel et Arago que si l'on place la vibration d'une lumière complètement polarisée perpendiculairement au rayon.

D'ailleurs, *il suffit que l'on place ainsi la vibration pour que la théorie de l'interférence des lumières polarisées s'accorde avec l'expérience de Fresnel et Arago*, car on a alors l'égalité (10), qui transforme l'égalité (8) en

$$(11) \quad . \quad . \quad . \quad J = \frac{A^2}{r^2}\left[1 - \cos(P, P')\cos\pi\frac{r' - r}{VT}\right],$$

et cette dernière égalité, discutée, reproduit tous les détails de l'expérience en question.

G. La vibration lumineuse (suite). — Système de Fresnel. — Système de Mac Cullagh et F.-E. Neumann.

Les deux restrictions que nous avons successivement apportées à la position de la vibration d'une lumière complètement polarisée ne nous laissent le choix qu'entre deux positions : ou bien la vibration est perpendiculaire au plan de polarisation, ou bien elle est tracée dans le plan de polarisation perpendiculairement au rayon. Selon que nous adoptons l'une ou l'autre de ces deux règles, nous formulons deux systèmes optiques distincts : le premier est celui de Fresnel, le second est celui de Mac Cullagh et de F.-E. Neumann.

Résumons ici les règles et hypothèses qui constituent ces deux systèmes; toutes ces règles et hypothèses, sauf une, sont communes à ces deux systèmes :

1° *Un éclairement complètement polarisé est caractérisé par un segment* DE DIRECTION FIXE, *mais de grandeur périodiquement variable, que l'on nomme la* VIBRATION.

2° *Que l'éclairement soit formé d'ondes planes ou d'ondes sphériques, la grandeur de la vibration est donnée par la formule*

$$\varphi = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \alpha\right),$$

où A *et* α *sont des quantités indépendantes de* t, *et où la durée* T *caractérise la couleur.*

3° *L'intensité de l'éclairement considéré a pour valeur*

$$J = \frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} \varphi^2 dt = \frac{A^2}{2}.$$

4° *La vibration est tangente à l'onde.*

5° (Système de Fresnel).

La vibration est perpendiculaire au plan de polarisation.

5° (Système de Mac Cullagh et F. Neumann).

La vibration est tracée dans le plan de polarisation.

6° *Plusieurs lumières complètement polarisées tombent simultanément au même point* M ; *chacune d'elles, prise isolément, y engendrerait une vibration; soient* $Mv = \varphi(t)$, $Mv' = \varphi'(t)$, ... *ces vibrations. En les composant géométriquement, nous obtenons un segment* $Mw = \Phi(t)$ *dont la grandeur* ET LA DIRECTION *varient avec le temps. L'intensité lumineuse au point* M *a pour valeur :*

$$J = \frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} \Phi^2(t)dt.$$

Il nous reste à lever une dernière indétermination, à choisir entre le système de Fresnel et le système de Mac Cullagh et F. Neumann, pour obtenir une théorie complètement définie de la lumière complètement polarisée.

II. *La vibration lumineuse* (suite). — *Expérience de O. Wiener.*

Une expérience capable de trancher le différend entre le système de Fresnel, d'une part, et le système de Mac Cullagh et de Neumann, d'autre part, a été imaginée, en 1877, par W. Zenker, et réalisée en 1890, par M. O. Wiener.

L'interprétation de cette expérience repose sur deux lois expérimentales essentielles qui nous seront encore d'un grand usage au chapitre suivant; ces deux lois sont les suivantes :

1° Loi expérimentale. — *Lorsque des ondes planes, polarisées*

complètement dans le plan d'incidence, tombent sur une surface plane séparant deux milieux transparents, la lumière réfléchie et la lumière réfractée se composent toutes deux d'ondes planes; le rayon réfléchi et le rayon réfracté sont dans le plan d'incidence; ILS SONT TOUS DEUX COMPLÈTEMENT POLARISÉS DANS LE PLAN D'INCIDENCE.

2° LOI EXPÉRIMENTALE. — *Lorsque des ondes planes, complètement polarisées dans un plan perpendiculaire au plan d'incidence, tombent sur une surface plane séparant deux milieux transparents, la lumière réfléchie et la lumière réfractée se composent toutes deux d'ondes planes; le rayon réfléchi et le rayon réfracté sont dans le plan d'incidence;* ILS SONT TOUS DEUX COMPLÈTEMENT POLARISÉS DANS DES PLANS PERPENDICULAIRES AU PLAN D'INCIDENCE.

On peut alors répéter textuellement, en premier lieu pour une lumière incidente composée d'ondes planes polarisées dans le plan d'incidence, en second lieu pour une lumière incidente composée d'ondes planes polarisées dans un plan perpendiculaire au plan d'incidence, ce que nous avons dit au chapitre préliminaire pour une lumière quelconque.

Nous obtiendrons ainsi les résultats suivants :

1° *Lumière polarisée dans le plan d'incidence :*

Soit

$$\varphi = A_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{lx + my + nz}{V_1 T} - \alpha_1\right),$$

la grandeur de la vibration incidente; les grandeurs des vibrations réfléchies et réfractées seront

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{l} \Phi_1 = F_1 A_1 \sin 2\pi \left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{lx + my + nz}{V_1 T} - \alpha_1 - \Delta_1\right), \\ \Phi_2 = F_2 A_1 \sin 2\pi \left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{lx + my - N_{12} z \cos \rho}{V_1 T} - \alpha_1 - \Delta_2\right), \\ \qquad \text{avec} \qquad \dfrac{\sin i}{\sin \rho} = \dfrac{V_1}{V_2}, \end{array}\right.$$

F_1, F_2, Δ_1, Δ_2, dépendant de la nature des milieux 1 et 2, de l'amplitude A_1 de la lumière incidente, et de l'angle d'incidence i.

2° *Lumière polarisée perpendiculairement au plan d'incidence.* Soit

$$\varphi = A_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{lx + my + nz}{V_1 T} - \alpha_1\right)$$

la grandeur de la vibration incidente; les grandeurs des vibrations réfléchies et réfractées seront :

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_1 = G_1 A_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{lx + my - nz}{V_1 T} - \alpha_1 - D_1\right), \\ \psi_2 = G_2 A_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{lx + my - N_{12} z \cos \rho}{V_1 T} - \alpha_1 - D_2\right), \\ \text{avec} \qquad \frac{\sin i}{\sin \rho} = \frac{V_1}{V_2}, \end{array} \right.$$

G_1, G_2, D_1, D_2 dépendant de la nature des milieux 1 et 2, de l'amplitude A_1 de la lumière incidente, enfin de l'angle d'incidence i.

Les quatre quantités G_1, G_2, D_1, D_2 *sont respectivement analogues aux quatre quantités* F_1, F_2, Δ_1, Δ_2, *mais rien ne prouve qu'elles leur soient respectivement égales.*

Ces divers résultats seront, au prochain chapitre, le point de départ de la théorie de la réflexion et de la réfraction des ondes planes. Pour le moment, ils vont nous servir à rendre compte des expériences de M. O. Wiener.

M. O. Wiener fait tomber sur la surface de séparation plane de l'air et d'une masse de verre des ondes planes dont l'angle d'incidence est $\frac{\pi}{4}$; ces ondes sont complètement polarisées soit dans le plan d'incidence, soit dans un plan perpendiculaire au plan d'incidence. Il se forme des ondes planes réfléchies; le plan de réflexion est également $\frac{\pi}{4}$. Ces ondes sont polarisées suivant la même loi que les ondes incidentes.

Nous allons étudier l'éclairement produit en un point du champ par l'interférence des ondes incidentes et des ondes réfléchies. Nous suivrons d'abord le système de Fresnel, puis le système de Mac Cullagh et de Neumann.

I. — Le système adopté est le système de Fresnel.

1° *Les ondes incidentes sont polarisées dans le plan d'incidence.*

La vibration incidente φ, en un point (x, y, z) du milieu, est alors perpendiculaire au plan d'incidence ; la lumière réfléchie est polarisée dans le plan d'incidence, en sorte que la vibration réfléchie Φ_1 est, elle aussi, perpendiculaire au plan d'incidence; ces deux vibrations sont dirigées suivant la même droite ; on peut toujours, en augmentant au besoin Δ_1 de $\frac{1}{2}$, les supposer menées dans le même sens.

Si l'on applique alors au calcul de l'intensité résultante la règle énoncée à la fin du paragraphe précédent, on trouve, pour valeur de cette intensité :

$$J = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} (\varphi + \Phi_1)^2\, dt$$

$$= \frac{A_1^2}{T}\int_t^{t+T} \left[\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{lx + my + nz}{V_1 T} - \alpha_1\right)\right.$$

$$\left. + F_1 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{lx + my - nz}{V_1 T} - \alpha_1 - \Delta_1\right)\right]^2 dt.$$

Si l'on observe que

$$n = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

on trouve

$$(14) \quad . \quad . \quad . \; J = \frac{A_1^2}{2}\left[1 + F_1^2 - 2F_1 \cos\pi\left(\frac{\sqrt{2}.z}{V_1 T} + \Delta_1\right)\right].$$

Cette intensité varie périodiquement avec la distance z du point considéré au miroir; le champ présente donc des plans, alternativement clairs et obscurs, parallèles entre eux et à la surface du miroir.

Les plans d'intensité maxima sont donnés par l'équation

$$\cos \pi \left(\frac{\sqrt{2}\,z}{V_1T} + \Delta_1\right) = -1, \quad z = \frac{(2k+1)V_1T - \Delta_1}{\sqrt{2}},$$

k étant un nombre entier positif, nul ou négatif.

Les plans d'intensité minima sont donnés par l'équation

$$\cos \pi \left(\frac{\sqrt{2}\,z}{V_1T} + \Delta_1\right) = 1, \quad z = \frac{2kV_1T - \Delta_1}{\sqrt{2}},$$

k étant un nombre entier positif, nul ou négatif.

Ces résultats sont établis en supposant F_1 positif; il les faut intervertir si F_1 est négatif.

2° *Les ondes incidentes sont polarisées perpendiculairement au plan d'incidence.*

L'onde réfléchie est également polarisée perpendiculairement au plan d'incidence; la vibration incidente et la vibration réfléchie sont donc toutes deux tracées dans le plan d'incidence. Le rayon incident et le rayon réfléchi faisant chacun avec la normale un angle égal à $\frac{\pi}{4}$, ces deux rayons sont rectangulaires entre eux; comme la vibration incidente est perpendiculaire au rayon incident et la vibration réfléchie perpendiculaire au rayon réfléchi, ces deux vibrations sont également rectangulaires. Si nous appliquons au calcul de l'intensité résultante la règle indiquée à la fin du paragraphe précédent, nous trouvons, pour valeur de cette intensité,

$$(15) \quad . \quad . \quad . \quad J = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} (\varphi^2 + \psi_1^2)\,dt = \frac{A_1^2}{2}(1 + G_1^2).$$

Le champ, uniformément éclairé, ne présente aucune frange.

II. — Le système adopté est le système de Mac Cullagh et Neumann.

1° *La lumière incidente est polarisée dans le plan d'incidence.*

On prouve aisément que, dans ce cas, les vibrations incidente et réfléchie sont rectangulaires entre elles. L'intensité en un point du champ a pour valeur

$$(14^{bis}) \quad . \quad . \quad . \quad J = \frac{1}{T}\int_t^{t+T}(\varphi^2 + \varphi_1^2)dt = \frac{A_1^2}{2}(1 + F_1^2).$$

Le champ, uniformément éclairé, ne présente aucune frange.

2° *La lumière incidente est polarisée perpendiculairement au plan d'incidence.*

On prouve aisément que, dans ce cas, les vibrations incidente et réfléchie sont dirigées suivant la même droite. L'intensité en un point du champ a pour valeur

$$(15^{bis}) \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{aligned} J &= \frac{1}{T}\int_t^{t+T}(\varphi + \psi_1)^2 dt \\ &= \frac{A_1^2}{2}\left[1 + G_1^2 - 2G_1 \cos\pi\left(\frac{\sqrt{2}\,z}{V_1 T} + D_1\right)\right]. \end{aligned} \right.$$

Cette intensité varie périodiquement avec la distance z du point considéré à la surface du miroir; le champ présente donc des plans alternativement clairs et obscurs, parallèles entre eux et à la surface du miroir.

Supposons, pour fixer les idées, G_1 positif.

Les plans d'intensité maxima sont donnés par l'équation

$$\cos\pi\left(\frac{\sqrt{2}\,z}{V_1 T} + D_1\right) = -1, \qquad z = \frac{(2k+1)\,V_1 T - D_1}{\sqrt{2}},$$

k étant un nombre entier positif, nul ou négatif.

Les plans d'intensité minima sont donnés par l'équation

$$\cos \pi \left(\frac{\sqrt{2}\, z}{V_1 T} + D_1 \right) = 1, \quad z = \frac{2kV_1T - D_1}{\sqrt{2}},$$

k étant un nombre entier positif, nul ou négatif.

Si G_1 est négatif, les résultats doivent être intervertis.

Les résultats prévus par la théorie sont inverses, selon que l'on adopte le système de Fresnel ou le système de Mac Cullagh et Neumann; pour décider entre ces deux systèmes, il suffit de réaliser les deux dispositions expérimentales que nous venons d'étudier et de constater dans quel cas il se produit des franges parallèles à la surface du miroir.

Ces franges sont très voisines les unes des autres; la distance de deux franges obscures consécutives et de deux franges claires consécutives est égale à $\sqrt{2}\, V_1 T$; pour les distinguer, il faut faire usage d'un artifice. M. O. Wiener s'appuie sur le fait d'expérience suivant :

Une pellicule de collodion photographique, placée dans un champ où l'intensité lumineuse varie d'un point à l'autre, s'attaque davantage aux points où la lumière est plus intense.

Il coupe alors le champ par une pellicule photographique faisant avec la surface du miroir un très petit angle θ, dont l'arête est d'ailleurs parallèle à l'intersection des ondes incidentes et de la surface du miroir. Des plans équidistants, parallèles à la surface du miroir et distants les uns des autres de $\sqrt{2} V_1 T$, traceront sur la pellicule des lignes parallèles, équidistantes, et dont la distance sera $\frac{\sqrt{2}\, V_1 T}{\operatorname{Tang} \theta}$; si l'angle θ est suffisamment petit, cette distance sera appréciable.

Par ce procédé, M. Wiener a prouvé *que le champ était uniformément éclairé lorsque la lumière incidente était polarisée perpendiculairement au plan d'incidence, et qu'il était sillonné de franges lorsque la lumière incidente était polarisée dans le plan d'incidence.*

Le système optique de Mac Cullagh et de Neumann doit donc être rejeté.

La vibration lumineuse d'une lumière complètement polarisée doit être menée normalement au plan de polarisation.

Remarque. — Les expériences de M. O. Wiener sont en contradiction avec l'*ensemble* du système de Mac Cullagh et de Neumann; elles nous apprennent que, parmi les hypothèses sur lesquelles repose ce système, il en est une au moins qui doit être rejetée; elles ne nous indiquent pas laquelle il faut rejeter; si l'on suppose le débat circonscrit entre le système de Fresnel, d'une part, et le système de Mac Cullagh et de F.-E. Neumann, d'autre part, le doute ne peut porter que sur une seule hypothèse, celle qui concerne la position et la vibration par rapport au plan de polarisation; dans ces conditions, les expériences de M. O. Wiener nous enseignent que la vibration est normale au plan de polarisation; mais si le débat n'est pas restreint de la sorte, rien n'empêche, nonobstant les expériences de M. O. Wiener, de laisser la vibration dans le plan de polarisation; il faudra simplement changer quelque autre hypothèse parmi celles qui constituent le système de Mac Cullagh et de F.-E. Neumann, par exemple, la définition de l'intensité lumineuse. M. H. Poincaré a insisté sur ce point.

1. *La polarisation elliptique.*

Nous sommes partis d'hypothèses sur le point lumineux qui éclaire également en toute direction, ou qui éclaire d'une manière différente en différentes directions; mais nous avons constamment admis que ce point lumineux envoyait, en chaque direction, de la lumière complètement polarisée; or, ce que nous venons de dire sur la constitution de la lumière polarisée nous permet de concevoir et d'étudier une classe beaucoup plus générale de points lumineux.

Concevons, en effet, que l'on place infiniment près les uns des autres plusieurs points lumineux tels que ceux que nous venons d'étudier; leur ensemble pourra être regardé comme un point lumineux unique; cherchons quelles sont les propriétés de la lumière émise par un semblable point lumineux.

Soit Σ ce point, formé par la réunion des points lumineux S, S', S'', ... (fig. 15). Au point M, le point lumineux S envoie une lumière complètement polarisée représentée par la vibration

$$Mv = \varphi(t) = \frac{A}{r} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{VT} - \alpha\right),$$

r étant la distance SM ou ΣM; A et α, deux quantités indépendantes de t. Cette vibration est dans le plan Mxy mené par le point M normalement à ΣM.

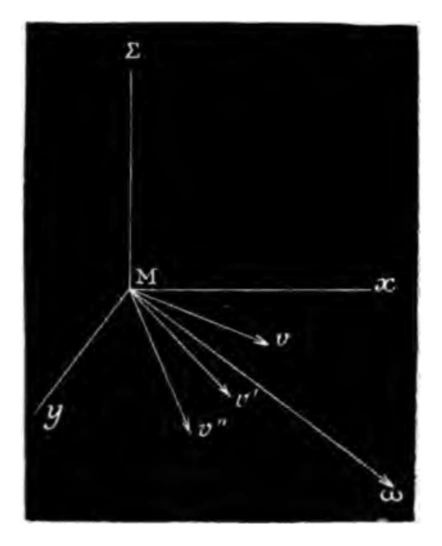


Fig. 15.

Le point S' envoie au point M une lumière complètement polarisée représentée par la vibration

$$Mv' = \varphi'(t) = \frac{A'}{r} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{VT} - \alpha'\right).$$

Cette vibration est tracée dans le plan Mxy.

Soient Mx, My, deux axes rectangulaires choisis arbitrairement

dans ce plan. Soient

$$\theta = \widehat{vMx}, \quad \theta' = \widehat{v'Mx}, \ \ldots$$

$$\eta = \widehat{vMy}, \quad \eta' = \widehat{v'My}, \ \ldots$$

Les vibrations Mv, Mv', ... auront pour composantes, suivant les axes Mx et My :

$$Mv : \begin{cases} u\,(t) = \dfrac{A}{r}\cos\theta\ \sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{r}{VT} - \alpha\right), \\ v\,(t) = \dfrac{A}{r}\cos\eta\ \sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{r}{VT} - \alpha\right), \end{cases}$$

$$Mv' : \begin{cases} u'\,(t) = \dfrac{A'}{r}\cos\theta'\ \sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{r}{VT} - \alpha'\right), \\ v'\,(t) = \dfrac{A'}{r}\cos\eta'\ \sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{r}{VT} - \alpha'\right). \end{cases}$$

. . . .

Soit $M\omega = \Phi(t)$ le segment variable avec t en grandeur *et en direction* que l'on obtient en composant entre eux les segments Mv, Mv', ...; soient $U(t)$, $V(t)$ les composantes de ce segment suivant Mx et My.

Nous aurons

$$U(t) = u(t) + u'(t) + \cdots$$
$$V(t) = v(t) + v'(t) + \cdots.$$

Déterminons, ce qui est toujours possible, les deux quantités $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ et les deux angles a et a' par les égalités

$$A\cos\theta\cos\alpha + A'\cos\theta'\cos\alpha' + \cdots = \mathcal{A}\cos a,$$
$$A\cos\theta\sin\alpha + A'\cos\theta'\sin\alpha' + \cdots = \mathcal{A}\sin a,$$
$$A\cos\eta\cos\alpha + A'\cos\eta'\cos\alpha' + \cdots = \mathcal{A}'\cos a',$$
$$A\cos\eta\sin\alpha + A'\cos\eta'\sin\alpha' + \cdots = \mathcal{A}'\sin a',$$

et nous pourrons écrire :

$$(16) \quad \ldots \quad \begin{cases} U(t) = \dfrac{\mathcal{A}}{r} \sin 2\pi \left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{r}{VT} - a\right), \\[2ex] V(t) = \dfrac{\mathcal{A}'}{r} \sin 2\pi \left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{r}{VT} - a'\right). \end{cases}$$

$U(t)$ représente la vibration que l'on aurait en M, si l'on plaçait en Σ un point lumineux σ d'éclat fixe, éclairant également en toute direction ou inégalement dans les diverses directions, envoyant dans chaque direction de la lumière complètement polarisée de telle sorte que le plan de polarisation correspondant à la direction ΣM soit ΣMy.

$V(t)$ représente la vibration que l'on aurait en M, si l'on plaçait en Σ un point lumineux σ', analogue à σ, mais envoyant suivant ΣM de la lumière polarisée suivant le plan ΣMx.

Or : 1° L'intensité lumineuse engendrée au point M par l'action simultanée des points S, S', ... est donnée par l'expression

$$\frac{1}{T}\int_t^{t+T} \left[u(t) + u'(t) + \cdots\right]^2 dt + \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \left[v(t) + v'(t) + \cdots\right]^2 dt.$$

L'intensité lumineuse qu'engendrerait au point M l'action simultanée des points σ et σ' est donnée par l'expression

$$\frac{1}{T}\int_t^{t+T} U^2(t)\, dt + \frac{1}{T}\int_t^{t+T} V^2(t)\, dt.$$

Ces deux intensités sont identiques.

2° Faisons interférer les lumières émises par les points S, S', ... avec les lumières émises par d'autres points lumineux s, s', ... envoyant en toute direction de la lumière complètement polarisée. Soient Mw, Mw', ... les vibrations envoyées au point M par les sources s, s', ... Nous aurons à composer entre eux les segments Mv, Mv', ... Mw, Mw', ..., ce qui nous donnera un segment résul-

tant $M\Omega = \Psi(t)$ variable avec le temps en grandeur et direction ; l'intensité lumineuse résultante sera, au point M,

$$J = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \Psi^2(t)\, dt.$$

Nous obtiendrons le même segment résultant $M\Omega = \Psi(t)$ et, par conséquent, la même intensité J, en composant avec les segments Mw, Mw', ... les deux segments $U(t)$, $V(t)$.

Les points lumineux s, s', engendrent donc la même lumière soit par interférence avec la lumière émise par les sources S, S',... soit par interférence avec la lumière émise par les deux sources σ, σ'.

Ainsi les sources σ, σ', sont, en toutes circonstances, exactement équivalentes aux sources S, S', ...; d'où le théorème suivant :

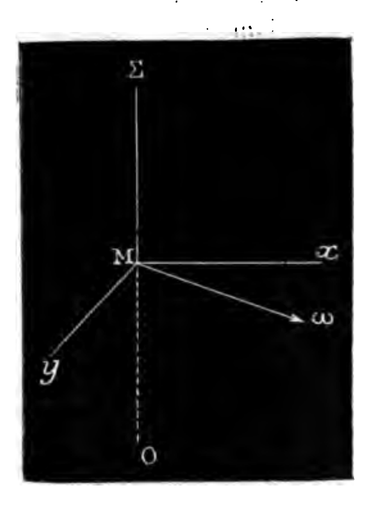


Fig. 16.

Un point lumineux complexe formé par la réunion d'un nombre quelconque de points lumineux d'éclat fixe, envoyant en toute direction de la lumière complètement polarisée, équivaut à deux points lumineux d'éclat fixe, envoyant en chaque direction de la

lumière complètement polarisée, et tels que, pour chaque direction, les deux plans de polarisation correspondant aux deux points lumineux soient deux plans rectangulaires entre eux arbitrairement choisis.

Soit que l'on veuille calculer l'intensité lumineuse au point M, soit que l'on veuille faire interférer la lumière envoyée au point M par le point lumineux complexe Σ, avec la lumière envoyée au même point M par diverses sources de lumière, il est inutile de connaître les deux segments $U(t)$, $V(t)$, qui supposent un choix particulier d'axes Mx, My; il suffit de connaître le segment $\Phi(t)$ dont la définition ne renferme rien d'arbitraire. Étudions donc comment le segment $M\omega = \Phi(t)$ varie en grandeur et en direction avec le temps t.

Supposons que, pour regarder ce segment, nous placions l'œil en un point O (fig. 16) situé au delà du point M dans la direction ΣM. Nous verrons alors les axes Mx, My, comme les représente la figure 17.

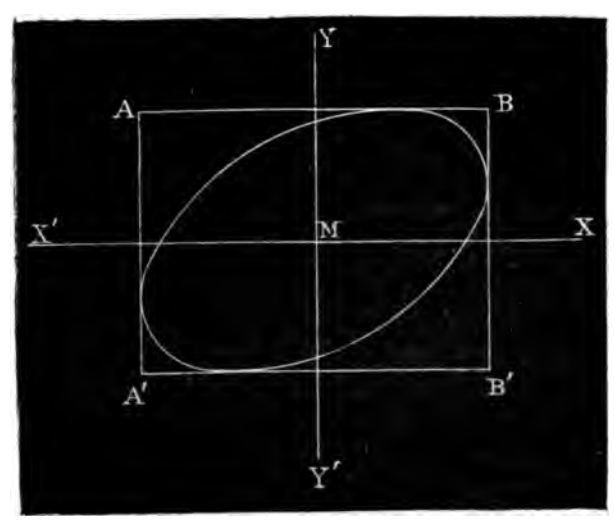


Fig. 17.

La trajectoire du point ω, dont les coordonnées sont

$$(17) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{\mathcal{A}}{r} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{VT} - a\right), \\ y &= \frac{\mathcal{A}'}{r} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{VT} - a'\right), \end{aligned} \right.$$

est, comme on le voit aisément, une ellipse, pour laquelle les axes Mx, My, forment un système de diamètres conjugués; cette ellipse est inscrite dans le rectangle AB, A'B', dont les côtés, respectivement parallèles aux axes MX, MY, ont pour équations

$$x = \pm \frac{\mathcal{A}}{r}, \quad y = \pm \frac{\mathcal{A}'}{r}.$$

Les ellipses relatives aux divers points M d'un même rayon ΣM sont homothétiques entre elles par rapport au point Σ, le rapport d'homothétie étant $\frac{1}{r}$.

Cherchons dans quel sens le point ω décrit l'ellipse.

La comparaison des figures 18 et 19 conduit sans peine à la règle suivante :

Si la trajectoire du point ω est *dextrorsum*, le rapport $\frac{\frac{dy}{dt}}{x}$ est toujours *négatif* au moment où y s'annule (fig. 18).

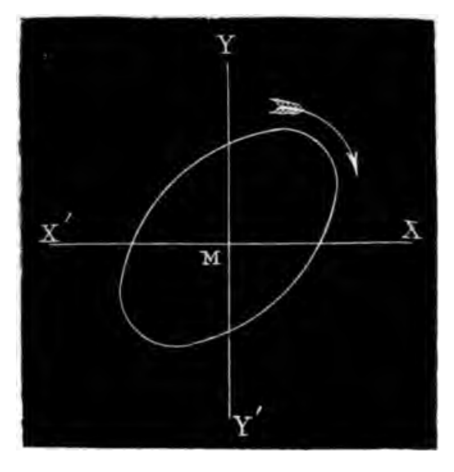


Fig. 18.

Si la trajectoire du point ω est *sinistrorsum*, le rapport $\frac{\frac{dy}{dt}}{x}$ est toujours *positif* au moment où y s'annule (fig. 19).

Les égalités (17) nous donnent, en général,

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{x} = \frac{2\pi}{T} \frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}} \frac{\cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{VT} - a'\right)}{\sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{VT} - a\right)}.$$

Lorsque l'on a

$$y = \frac{\mathcal{A}'}{r} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{VT} - a'\right) = 0,$$

on a

$$t = \frac{r}{V} + a'T + \frac{K}{2},$$

K étant un nombre entier, positif, négatif ou nul. On a alors

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{x} = \frac{2\pi}{T} \frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}} \frac{\cos K\pi}{\sin 2\pi \left(a' - a + \frac{K}{2}\right)}$$

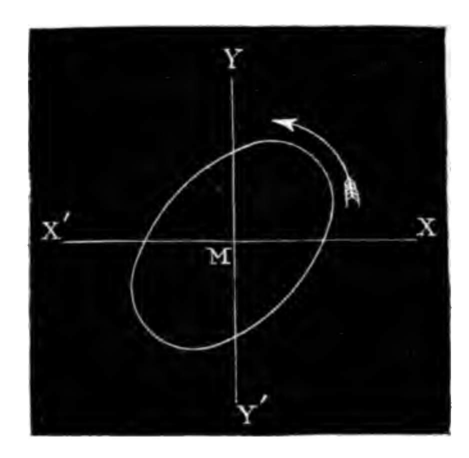


Fig. 19.

Ce rapport a une valeur et un signe indépendants de la valeur entière, positive, négative ou nulle, attribuée à K. On peut donc y faire K = 0 et écrire qu'au moment où $y = 0$, on a

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{x} = \frac{2\pi}{T} \frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}} \frac{1}{\sin 2\pi(a' - a)}.$$

On arrive ainsi à la règle suivante :

Si le produit $\mathcal{A}\mathcal{A}' \sin 2\pi(a' - a)$ *est positif, la trajectoire du point* ω *est une ellipse* sinistrorsum; *si le produit* $\mathcal{A}\mathcal{A}' \sin 2\pi(a' - a)$ *est négatif, la trajectoire du point* ω *est une ellipse* dextrorsum.

On dit que le segment $\Phi(t)$, dont nous venons d'étudier la variation, constitue une *vibration elliptique*. Moyennant cette définition, on peut énoncer la proposition suivante :

Un point lumineux complexe, formé par la réunion d'un nombre quelconque de points lumineux d'éclat fixe, éclairant également ou inégalement dans les diverses directions et envoyant en toute direction de la lumière complètement polarisée, équivaut à un point lumineux unique, d'éclat fixe, envoyant en chaque direction une vibration elliptique, changeant d'une manière quelconque lorsqu'on passe d'une direction à une autre direction.

UN TEL POINT LUMINEUX CONSTITUERA POUR NOUS, DORÉNAVANT, LA FORME LA PLUS GÉNÉRALE DU POINT LUMINEUX D'ÉCLAT INVARIABLE.

La lumière *complètement polarisée* prendra désormais le nom de lumière *polarisée rectilignement*.

Un point lumineux d'éclat fixe, infiniment éloigné, donnera des ondes planes; en chaque point d'une telle onde, la lumière sera elliptiquement polarisée; la vibration elliptique sera la même, à tout instant, en tous les points d'une même onde plane.

3. Équations aux dérivées partielles du phénomène lumineux.

Soit S un point lumineux qui envoie, en toute direction, de la lumière polarisée elliptiquement. Soit M (x, y, z) un point du milieu. Soit $\lambda = VT$ la longueur d'onde de la lumière considérée dans le milieu considéré. Soit r la distance SM. Les composantes de la vibration lumineuse au point M seront de la forme

$$u(x, y, z, t) = \frac{A}{r} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} - \alpha\right),$$

$$v(x, y, z, t) = \frac{B}{r} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} - \beta\right),$$

$$w(x, y, z, t) = \frac{C}{r} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} - \gamma\right),$$

A, B, C, α, β, γ étant des quantités indépendantes de t, et qui demeurent constantes le long d'un même rayon SM issu du point lumineux S.

Nous aurons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} = & - \frac{2\pi A}{\lambda r} \frac{\partial r}{\partial x} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} - \alpha\right) \\ & - \frac{2\pi A}{r} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} - \alpha\right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{A}{r}\right) \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} - \alpha\right). \end{aligned}$$

Au second membre, le premier terme est une quantité très grande de l'ordre de $\frac{1}{\lambda}$ par rapport aux deux autres termes. On peut donc écrire simplement

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{2\pi}{\lambda} \frac{A}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} - \alpha\right).$$

En regardant toujours λ comme infiniment petit, on obtient l'égalité

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\frac{A}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} - \alpha\right)$$

et, de même,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\frac{A}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} - \alpha\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\frac{A}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} - \alpha\right).$$

Ajoutons membre à membre ces égalités, en observant que

$$\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2 = 1,$$

et nous trouvons

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\frac{A}{r}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} - \alpha\right).$$

D'autre part, nous avons

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{4\pi^2}{T^2}\frac{A}{r}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} - \alpha\right).$$

Si donc on traite λ comme une quantité infiniment petite, on voit que l'on a

$$(18) \quad . \quad . \quad V^2\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad V^2\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad V^2\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

La vibration dont u, v, w sont les composantes est constamment perpendiculaire au rayon SM, dont $\frac{\partial r}{\partial x}$, $\frac{\partial r}{\partial y}$, $\frac{\partial r}{\partial z}$ sont les cosinus directeurs. On doit donc avoir, quel que soit t,

$$(19) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad u\frac{\partial r}{\partial x} + v\frac{\partial r}{\partial y} + w\frac{\partial r}{\partial z} = 0.$$

Or, on peut évidemment écrire

$$u\frac{\partial r}{\partial x}+v\frac{\partial r}{\partial y}+w\frac{\partial r}{\partial z}$$

$$=\left[\frac{A}{r}\cos 2\pi\left(\frac{r}{\lambda}+\alpha\right)\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{B}{r}\cos 2\pi\left(\frac{r}{\lambda}+\beta\right)\frac{\partial r}{\partial y}\right.$$
$$\left.+\frac{C}{r}\cos 2\pi\left(\frac{r}{\lambda}+\gamma\right)\frac{\partial r}{\partial z}\right]\sin 2\pi\frac{t}{T}$$
$$-\left[\frac{A}{r}\sin 2\pi\left(\frac{r}{\lambda}+\alpha\right)\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{B}{r}\sin 2\pi\left(\frac{r}{\lambda}+\beta\right)\frac{\partial r}{\partial y}\right.$$
$$\left.+\frac{C}{r}\sin 2\pi\left(\frac{r}{\lambda}+\gamma\right)\frac{\partial r}{\partial z}\right]\cos 2\pi\frac{t}{T}.$$

L'identité (19) entraine donc les deux égalités

$$(20)\quad\left\{\begin{aligned}&A\frac{\partial r}{\partial x}\cos 2\pi\left(\frac{r}{\lambda}+\alpha\right)+B\frac{\partial r}{\partial y}\cos 2\pi\left(\frac{r}{\lambda}+\beta\right)\\&\qquad+C\frac{\partial r}{\partial z}\cos 2\pi\left(\frac{r}{\lambda}+\gamma\right)=0,\\&A\frac{\partial r}{\partial x}\sin 2\pi\left(\frac{r}{\lambda}+\alpha\right)+B\frac{\partial r}{\partial y}\sin 2\pi\left(\frac{r}{\lambda}+\beta\right)\\&\qquad+C\frac{\partial r}{\partial z}\sin 2\pi\left(\frac{r}{\lambda}+\gamma\right)=0.\end{aligned}\right.$$

Mais nous avons vu qu'en considérant λ comme très petit, on pouvait écrire

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{2\pi}{\lambda}\frac{A}{r}\frac{\partial r}{\partial x}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r}{\lambda}-\alpha\right),$$

ou bien

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{2\pi}{\lambda}\frac{A}{r}\frac{\partial r}{\partial x}\left[\cos 2\pi\left(\frac{r}{\lambda}+\alpha\right)\cos 2\pi\frac{t}{T}+\sin 2\pi\left(\frac{r}{\lambda}+\alpha\right)\sin 2\pi\frac{t}{T}\right].$$

$\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial w}{\partial z}$, s'expriment d'une manière analogue, en sorte que l'on a

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda r}\left[A\frac{\partial r}{\partial x}\cos 2\pi\left(\frac{r}{\lambda} + \alpha\right) + B\frac{\partial r}{\partial y}\cos 2\pi\left(\frac{r}{\lambda} + \beta\right)\right.$$

$$\left. + C\frac{\partial r}{\partial z}\cos 2\pi\left(\frac{r}{\lambda} + \gamma\right)\right]\cos 2\pi\frac{t}{T}$$

$$+ \frac{2\pi}{\lambda r}\left[A\frac{\partial r}{\partial x}\sin 2\pi\left(\frac{r}{\lambda} + \alpha\right) + B\frac{\partial r}{\partial y}\sin 2\pi\left(\frac{r}{\lambda} + \beta\right)\right.$$

$$\left. + C\frac{\partial r}{\partial z}\sin 2\pi\left(\frac{r}{\lambda} + \gamma\right)\right]\sin 2\pi\frac{t}{T},$$

ou bien, en vertu des égalités (20),

$$(21) \quad \ldots\ldots \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Ainsi, pourvu que l'on regarde la longueur d'onde λ comme une quantité très petite, on peut dire que les trois composantes de la vibration engendrée en un point quelconque du milieu par un point lumineux d'éclat invariable, vérifient les équations aux dérivées partielles (18) et (21).

Imaginons maintenant que le milieu renferme un certain nombre de points lumineux d'éclat invariable, S, S', ... Le premier envoie au point M une vibration dont les composantes sont u, v, w; le second, une vibration dont les composantes sont u', v', w'; ... Si nous voulons connaître l'intensité lumineuse au point M, à l'instant t, nous avons à former le segment $\Phi(t)$, variable en grandeur et en direction avec t, segment dont les composantes sont

$$\mathcal{U} = u + u' + \cdots,$$
$$\mathcal{V} = v + v' + \cdots,$$
$$\mathcal{W} = w + w' + \cdots,$$

et à calculer la valeur de la quantité

$$\frac{1}{T}\int_t^{t+T}\Phi^2(t)dt = \frac{1}{T}\int_t^{t+T}(\mathfrak{U}^2 + \mathfrak{V}^2 + \mathfrak{W}^2)dt.$$

Or, les trois composantes u, v, w, vérifient les équations aux dérivées partielles (18) et (21); les trois composantes u', v', w', vérifient des équations semblables; ... Ces équations aux dérivées partielles étant linéaires, sont également vérifiées par $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$. On parvient ainsi au théorème suivant :

Supposons qu'un nombre quelconque de points lumineux d'éclat invariable brillent dans un milieu transparent; l'intensité lumineuse au point x, y, z, *à l'instant* t, *s'obtient par la formule*

$$(22) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad J = \frac{1}{T}\int_t^{t+T}(\mathfrak{U}^2 + \mathfrak{V}^2 + \mathfrak{W}^2)dt,$$

T *étant une quantité qui caractérise la couleur simple de tous ces points, et* $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$, *trois fonctions d'*x, y, z, t, LINÉAIRES ET HOMOGÈNES EN $\sin 2\pi\frac{t}{T}$ ET $\cos 2\pi\frac{t}{T}$, *qui vérifient les équations aux dérivées partielles simultanées :*

$$(23) \quad . \quad . \quad V^2\Delta\mathfrak{U} = \frac{\partial^2\mathfrak{U}}{\partial t^2}, \quad V^2\Delta\mathfrak{V} = \frac{\partial^2\mathfrak{V}}{\partial t^2}, \quad V^2\Delta\mathfrak{W} = \frac{\partial^2\mathfrak{W}}{\partial t^2},$$

$$(24) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial z} = 0.$$

V *est une quantité qui caractérise le milieu considéré et la lumière monochromatique considérée. Ce théorème n'est exact qu'aux termes près de l'ordre de* $\lambda = VT$.

Nous allons maintenant étendre ce théorème par voie d'HYPOTHÈSE à un éclairement monochromatique fixe ou variable quelconque. Nous énoncerons donc la proposition suivante :

*Soit un milieu transparent éclairé d'une manière quelconque par une lumière monochromatique. Il existe trois fonctions d'*x, y, z, t, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$, *qui vérifient les équations aux dérivées*

partielles simultanées (23) *et* (24) *où* V *est une quantité qui dépend du milieu considéré et de la lumière monochromatique considérée. L'intensité lumineuse au point* x, y, z, *à l'instant* t, *est donnée par la formule*

$$(25) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad J = \int_{t-\Theta}^{t} (\mathfrak{U}^2 + \mathfrak{V}^2 + \mathfrak{W}^2)dt,$$

où Θ *est la durée de persistance des impressions lumineuses.*

Si l'éclairement est fixe, les fonctions $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ *ne dépendent de* t *que par les termes* $\sin 2\pi \frac{t}{T}$, $\cos 2\pi \frac{t}{T}$, *où* T *est une quantité qui caractérise la lumière monochromatique employée; elles sont linéaires et homogènes par rapport à ces termes.*

Cette proposition n'est vraie qu'aux termes près de l'ordre de $\lambda = VT$, *que l'on traite comme une quantité très petite.*

Les équations (23) et (24) sont des équations bien connues; ce sont elles qui régissent les petits mouvements transversaux d'un solide élastique isotrope; l'étude analytique de ces équations, étude que nous supposerons faite, nous donne le résultat suivant :

Une lumière monochromatique se propage dans un milieu transparent isotrope avec une vitesse uniforme V, *la même en toute direction.*

K. *Conditions imposées aux vibrations lumineuses à la surface d'un corps parfaitement noir.*

Les équations précédentes sont le point de départ de l'étude mathématique des phénomènes lumineux au sein des milieux isotropes et parfaitement transparents. Pour achever la mise en équations de ce problème, il faut encore connaître les conditions auxquelles les fonctions $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$, sont assujetties soit le long de la surface par laquelle un milieu parfaitement transparent confine à un corps complètement noir, soit le long de la surface qui sépare l'un de l'autre deux milieux transparents. Nous allons nous occuper ici des premières conditions, en réservant l'étude des secondes pour le prochain Chapitre.

Par des considérations semblables à celles que nous avons développées dans notre deuxième fragment (Chapitre III, L) nous parviendrons au résultat suivant :

Soit un point lumineux S (fig. 20) qui, brillant seul dans un milieu transparent illimité, y engendrerait au point (x, y, z) une vibration dont les composantes seraient u, v, w.

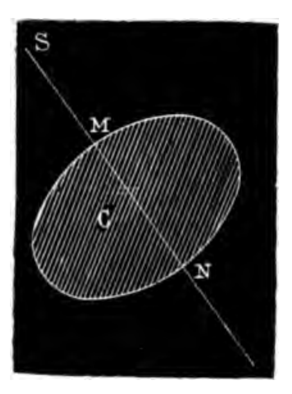


Fig. 20.

On introduit dans le milieu un corps parfaitement noir C, de forme quelconque. Les composantes de la vibration au point (x, y, z) deviennent U, V, W. Posons

$$U = u + \mathfrak{U}, \quad V = v + \mathfrak{V}, \quad W = w + \mathfrak{W}.$$

Les fonctions $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$, vérifient évidemment les équations aux dérivées partielles

$$V^2 \Delta \mathfrak{U} = \frac{\partial^2 \mathfrak{U}}{\partial t^2}, \quad V^2 \Delta \mathfrak{V} = \frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial t^2}, \quad V^2 \Delta \mathfrak{W} = \frac{\partial^2 \mathfrak{W}}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial z} = 0,$$

où V représente la vitesse de la lumière dans le milieu considéré.

Aux points M, où une droite issue de S a, avec la surface du

corps noir, une première rencontre, on a

$$\mathfrak{U} = 0, \quad \mathfrak{V} = 0, \quad \mathfrak{W} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial n} = 0,$$

n étant la normale au corps noir.

Aux points N, où une droite issue du point S a, avec le corps noir, une deuxième rencontre ou une rencontre d'ordre plus élevé, on a

$$\mathfrak{U} = -u, \quad \mathfrak{V} = -v, \quad \mathfrak{W} = -w,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial n} = -\frac{\partial u}{\partial n}, \quad \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial n} = -\frac{\partial v}{\partial n}, \quad \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial n} = -\frac{\partial w}{\partial n}.$$

Si l'on ajoute que ces conditions doivent être vérifiées seulement aux quantités près de l'ordre de $\lambda = VT$, on aura établi toutes les conditions qui permettent de déterminer $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$, lorsqu'on connaît u, v, w, c'est-à-dire de prévoir l'éclairement du milieu après l'introduction du corps noir lorsqu'on connaît l'éclairement qu'offrirait ce milieu en l'absence du corps noir. Le problème physique ainsi énoncé est ramené à une question d'analyse.

Cette question d'analyse a été entièrement résolue par G. Kirchhoff (*Vorlesungen über mathematische Physik, Optik*), qui a énoncé les résultats suivants :

1° Si la ligne qui joint le point S au point P (x, y, z) ne rencontre pas le corps noir entre les points S et P, on a, au point P,

$$\mathfrak{U} = 0, \quad \mathfrak{V} = 0, \quad \mathfrak{W} = 0.$$

La vibration au point P est identiquement la même que si le corps noir n'existait pas.

2° Si la ligne qui joint le point S au point P (x, y, z) rencontre le corps noir entre les points S et P, on a, au point P,

$$\mathfrak{U} = -u, \quad \mathfrak{V} = -v, \quad \mathfrak{W} = -w.$$

Le point P ne reçoit aucune lumière.

Ces théorèmes sont l'énoncé complet et précis de la *propagation rectiligne de la lumière.*

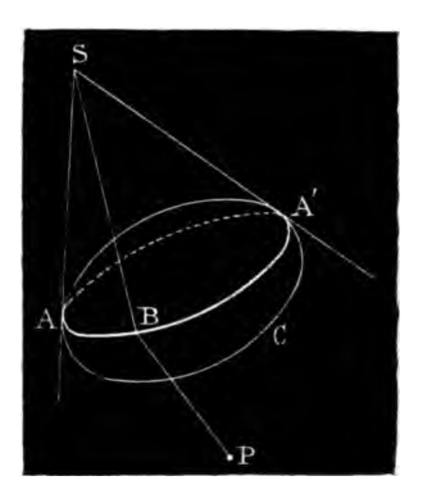


Fig. 21.

Mais ces théorèmes ne sont pas généraux ; ils ne sont vrais que moyennant certaines CONDITIONS qui sont les suivantes :

1° *La ligne* SP *ne passe pas, entre les points* S *et* P, *à une distance de la surface limite du corps* C, *qui soit de l'ordre de la longueur d'onde* $\lambda = VT$.

2° On peut fermer l'ouverture de l'écran par une surface Ω; soit l le contour de cette surface Ω; la ligne l partage la surface du corps noir en deux parties S_1, S_2. La surface S_1 et la surface Ω forment une surface fermée contenant le point lumineux S ; il en est de même des surfaces S_2, Ω.

Soient r_1, r_2 les distances SM, PM, M étant un point de la surface Ω.

On peut mener la surface Ω *de telle sorte qu'il n'y ait ni un domaine fini sur l'aire* Ω, *ni un segment fini sur la ligne* l, *le long desquels la somme* $(r_1 + r_2)$ *soit constante aux quantités près de l'ordre de* $\lambda = VT$.

Si l'une ou l'autre des conditions n'est point remplie, la loi de la propagation rectiligne de la lumière n'est plus exacte ; il se produit des PHÉNOMÈNES DE DIFFRACTION. — Les principes posés permettent, comme l'a montré G. Kirchhoff, de donner la théorie complète des phénomènes de diffraction.

L. *Constitution de la lumière naturelle.*

Nous avons étudié complètement les propriétés de la lumière polarisée rectilignement ou elliptiquement. Mais la lumière émise par les corps incandescents ne jouit pas de ces propriétés; il nous reste donc à chercher un mode de représentation des propriétés de la *lumière naturelle.*

Considérons un point lumineux S qui, dans une certaine direction SM, émet de la lumière polarisée elliptiquement; nous pouvons toujours le remplacer par deux points lumineux accolés, envoyant dans la direction SM deux lumières polarisées rectilignement, les plans de polarisation étant deux plans rectangulaires, arbitrairement choisis, passant par SM. Il nous suffit donc de considérer un point lumineux envoyant, dans chaque direction, de la lumière polarisée rectilignement.

Supposons donc que le point S envoie au point M de la lumière polarisée rectilignement suivant la direction Mv. La grandeur de la vibration est représentée par la formule

$$\varphi = \frac{\mathcal{A}}{r} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{VT} - \alpha\right),$$

r étant la distance SM, et A et α deux quantités qui dépendent uniquement de la direction SM.

Supposons que la direction Mv de cette vibration demeure fixe ou sensiblement fixe pendant un temps $\mathfrak{T}$, très long par rapport à la durée T d'une vibration, mais très court par rapport à la durée Θ de persistance des impressions lumineuses; puis, qu'au bout du temps $\mathfrak{T}$, la grandeur φ de la vibration étant représentée par la même formule, la direction de la

vibration change avec une extrême vitesse, de manière à devenir au bout d'un temps très court de l'ordre de T, la direction Mv', qui fait avec Mv un angle fini; au bout d'un nouveau temps $\mathfrak{E}'$, du même ordre de grandeur que $\mathfrak{E}$, la direction de la vibration changera encore avec une extrême rapidité, etc.

Supposons, en outre, que ces changements brusques et irréguliers satisfassent cependant à la condition suivante : Si, autour du point M, dans le plan perpendiculaire à SM, on trace 360 secteurs ayant 1° d'angle, pendant la durée Θ de persistance des impressions lumineuses, la vibration se sera trouvée à peu près un même nombre de fois en chacun de ces secteurs.

Toutes ces hypothèses sont compatibles. Prenons, en effet, la la lumière sensiblement monochromatique de la vapeur de sodium incandescente. Nous avons vu que, pour cette lumière, T, évalué en seconde, avait pour valeur

$$T = \frac{1}{506\,000\,000\,000\,000}.$$

Au contraire Θ, variable avec les observateurs, peut être évalué en moyenne à

$$\Theta = \frac{1}{20}.$$

On voit alors qu'une lumière jaune naturelle effectue, pendant ce temps Θ, plus de *70 milliards* de vibrations dont la direction tombe dans un même secteur de 1°. Si l'on suppose que la source envoie au point M environ *un million* de vibrations consécutives de direction à peu près invariable, la durée $\mathfrak{E}$, évaluée en seconde, aurait pour valeur

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{506\,000\,000}.$$

La direction de la vibration éprouvait environ *vingt-cinq millions* de changements brusques pendant le temps Θ.

Il est évident qu'une semblable lumière fera l'effet d'un

éclairement fixe d'intensité $\frac{A^2}{2r^2}$, mais tel qu'aucun plan passant par le rayon ne soit privilégié et ne jouisse de certaines propriétés à l'exclusion des autres.

Nous verrons, en traitant de la réflexion et de la réfraction de la lumière à la surface de séparation de deux milieux transparents, que ce mode de représentation rend compte des propriétés de la lumière naturelle.

CHAPITRE II.

Théorie de la réflexion et de la réfraction de la lumière à la surface de séparation de deux milieux transparents.

A. *Réfraction et réflexion d'ondes planes à la surface plane de séparation de deux milieux. — Cas de la réflexion partielle.*

Nous avons déjà, au Chapitre précédent, fait certaines hypothèses et obtenu certains résultats concernant la réflexion et la réfraction de la lumière à la surface de séparation de deux milieux transparents; nous allons reprendre ici ce que nous en avons dit, de façon à mettre la théorie de la réflexion et de la réfraction sous une forme entièrement systématique.

Nous commencerons par nous placer dans un cas très particulier délimité de la manière suivante :

La surface de séparation des milieux transparents 1 *et* 2 *est une surface plane indéfinie.*

Les milieux 1 *et* 2 *sont dénués de pouvoir rotatoire* (Chapitre I, D).

Les ondes incidentes sont des ondes planes illimitées.

Elles sont polarisées rectilignement soit (α) *normalement au plan d'incidence, soit* (β) *dans le plan d'incidence.*

Dans ce cas, l'expérience nous donne, tout d'abord, les renseignements suivants :

Premier fait d'expérience. — *La lumière réfléchie dans le*

milieu 1 se compose d'ondes planes illimitées dont la direction de propagation traverse la surface de séparation S *du milieu* 2 *vers le milieu* 1.

DEUXIÈME FAIT D'EXPÉRIENCE. — *La lumière réfractée dans le milieu* 2 *se compose d'ondes planes illimitées dont la direction de propagation traverse la surface de séparation* S *du milieu* 1 *vers le milieu* 2.

Les propositions suivantes sont certaines PAR RAISON DE SYMÉTRIE :

Le rayon réfléchi et le rayon réfracté sont dans le plan d'incidence.

Les ondes réfléchies sont polarisées rectilignement soit perpendiculairement au plan d'incidence, soit dans le plan d'incidence.

Les ondes réfractées sont polarisées rectilignement soit perpendiculairement au plan d'incidence, soit dans le plan d'incidence.

Les propositions suivantes ne peuvent être établies que par l'expérience :

TROISIÈME FAIT D'EXPÉRIENCE. — *Si les ondes incidentes sont polarisées rectilignement dans un plan perpendiculaire au plan d'incidence, les ondes réfléchies et les ondes réfractées sont polarisées rectilignement dans un plan perpendiculaire au plan d'incidence.*

QUATRIÈME FAIT D'EXPÉRIENCE. — *Si les ondes incidentes sont polarisées rectilignement dans le plan d'incidence, les ondes réfléchies et les ondes réfractées sont polarisées rectilignement dans le plan d'incidence.*

Dans chacun des deux cas, la direction des vibrations réfléchies et réfractées est connue; leur grandeur seule reste à déterminer en fonction de la grandeur de la vibration incidente. Sur cette grandeur, nous pouvons raisonner comme nous avons raisonné au Chapitre préliminaire sur la fonction d'éclairement. Nous admettrons donc, en premier lieu les hypothèses suivantes, que l'on peut regarder comme imposées par la RAISON DE SYMÉTRIE :

Lorsque des ondes planes, polarisées perpendiculairement au plan d'incidence, se réfléchissent et se réfractent à la surface plane qui sépare deux milieux transparents, la différence de phase

introduite par la réflexion et la différence de phase introduite par la réfraction, au point M *de la surface, ont des valeurs* D_1, D_2, *indépendantes de la position du point* M *sur la surface.*

Lorsque des ondes planes, polarisées dans le plan d'incidence, se réfléchissent ou se réfractent à la surface plane qui sépare deux milieux transparents, la différence de phase introduite par la réflexion et la différence de phase introduite par la réfraction, au point M *de la surface, ont des valeurs* Δ_1, Δ_2, *indépendantes de la position du point* M *sur la surface.*

En raisonnant comme au Chapitre préliminaire, nous déduisons de ce qui précède les lois suivantes :

La normale à la surface réfléchissante vers le milieu 1 *est bissectrice extérieure de l'angle que forment la direction de propagation des ondes incidentes et la direction de propagation des ondes réfléchies.*

Les directions de propagation des ondes incidentes et des ondes réfléchies sont d'un même côté de la normale à la surface réfléchissante menée vers l'intérieur du milieu 2.

Entre l'angle d'incidence et l'angle de réflexion existe la relation

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{\sin i}{\sin \rho} = \frac{V_1}{V_2}.$$

Ces lois s'appliquent aussi bien au cas où la lumière incidente est polarisée perpendiculairement au plan d'incidence qu'au cas où cette lumière est polarisée dans le plan d'incidence.

La relation (1) nous montre que nos hypothèses ne peuvent être toutes conservées dans le cas où l'on a l'inégalité

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \sin i > \frac{V_1}{V_2}.$$

Ce cas sera étudié ultérieurement sous le titre *réflexion totale*; pour le moment, il est exclu.

Les résultats établis peuvent se condenser dans les formules suivantes, en désignant par φ la vibration incidente, par Φ_1 la vibration réfléchie, par Φ_2 la vibration réfractée :

I. *Lumières incidente, réfléchie et refractée, polarisées perpendiculairement au plan d'incidence.*

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
\varphi &= A_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{lx + my + nz}{V_1T} - \alpha_1\right),\\
\Phi_1 &= G_1A_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{lx + my - nz}{V_1T} - \alpha_1 - D_1\right),\\
\Phi_2 &= G_2A_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{lx + my - N_{12}\, z \cos\rho}{V_1T} - \alpha_1 - D_2\right),\\
&\frac{\sin i}{\sin \rho} = N_{12} = \frac{V_1}{V_2}.
\end{aligned}
\right.
$$

II. *Lumières incidente, réfléchie et refractée polarisées dans le plan d'incidence.*

$$
(4)\quad \left\{
\begin{aligned}
\varphi &= A_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{lx + my + nz}{V_1T} - \alpha_1\right),\\
\Phi_1 &= F_1A_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{lx + my - nz}{V_1T} - \alpha_1 - \Delta_1\right),\\
\Phi_2 &= F_2A_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{lx + my - N_{12}\, z \cos\rho}{V_1T} - \alpha_1 - \Delta_2\right),\\
&\frac{\sin i}{\sin \rho} = N_{12} = \frac{V_1}{V_2}.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces formules sont les formules (13) et (12) du Chapitre précédent, formules qui nous ont déjà servi dans la discussion des expériences de M. O. Wiener.

Il s'agit maintenant de déterminer comment les huit quantités G_1, G_2, F_1, F_2, D_1, D_2, Δ_1, Δ_2, dépendent des deux seules variables A_1 et i et de la nature des milieux 1 et 2.

Pour cela, certaine CONVENTION DE SIGNES est nécessaire.

Nous conviendrons de prendre, dans chaque cas, pour directions positives des trois vibrations φ, Φ_1, Φ_2, trois demi-droites se projetant sur la surface de séparation suivant une même demi-droite.

Dans le cas où les lumières incidente, réfléchie et réfractée

sont polarisées dans le plan d'incidence, les trois vibrations sont normales au plan d'incidence; la convention précédente revient alors à les compter toutes trois positivement suivant une même demi-droite normale au plan d'incidence.

Dans le cas où les lumières incidente, réfléchie et réfractée sont polarisées dans un plan perpendiculaire au plan d'incidence, les trois vibrations sont situées dans le plan d'incidence et respectivement perpendiculaires aux rayons incident, réfléchi et réfracté; la convention précédente revient alors à les compter positivement suivant trois demi-droites situées dans le plan d'incidence d'un même côté de la normale à la surface réfléchissante.

La convention précédente était nécessaire pour donner un sens exempt d'ambiguïté à la proposition suivante :

Première hypothèse. — *Que la lumière incidente soit polarisée dans un plan perpendiculaire au plan d'incidence, ou qu'elle soit polarisée dans le plan d'incidence, la réflexion et la réfraction n'introduisent aucune différence de phase.*

Cette hypothèse se traduit par les égalités

$$(5) \quad . \ . \ . \quad D_1 = 0, \quad D_2 = 0, \quad \Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = 0,$$

qui résolvent une partie du problème posé.

Considérons un faisceau de rayons incidents IO, I'O' (fig. 22). Il leur correspond un faisceau de rayons réfléchis OR, O'R' et un faisceau de rayons réfractés $O\rho$, $O'\rho'$. Soient AA', BB', CC', les sections droites de ces trois faisceaux.

Entre les aires de ces sections droites, nous avons les relations

$$(6) \quad . \ . \ . \ \frac{\text{aire AA}'}{\cos i} = \frac{\text{aire BB}'}{\cos r} = \frac{\text{aire CC}'}{\cos \rho} = \text{aire OO}'.$$

Nous admettrons maintenant l'hypothèse suivante :

Deuxième hypothèse. — *La quantité de lumière incidente répandue sur l'aire AA' est égale à la somme de la quantité de lumière réfléchie répandue sur l'aire BB' et de la quantité de lumière réfractée répandue sur l'aire CC'.*

Si la lumière incidente est polarisée perpendiculairement au plan d'incidence, les intensités des lumières incidente, réfléchie et réfractée sont respectivement

$$\frac{1}{2}A_1^2, \quad \frac{1}{2}G_1^2A_1^2, \quad \frac{1}{2}G_2^2A_1^2.$$

Si la lumière incidente est polarisée dans le plan d'incidence, les intensités des lumières incidente, réfléchie et réfractée sont respectivement

$$\frac{1}{2}A_1^2, \quad \frac{1}{2}F_1^2A_1^2, \quad \frac{1}{2}F_2^2A_1^2.$$

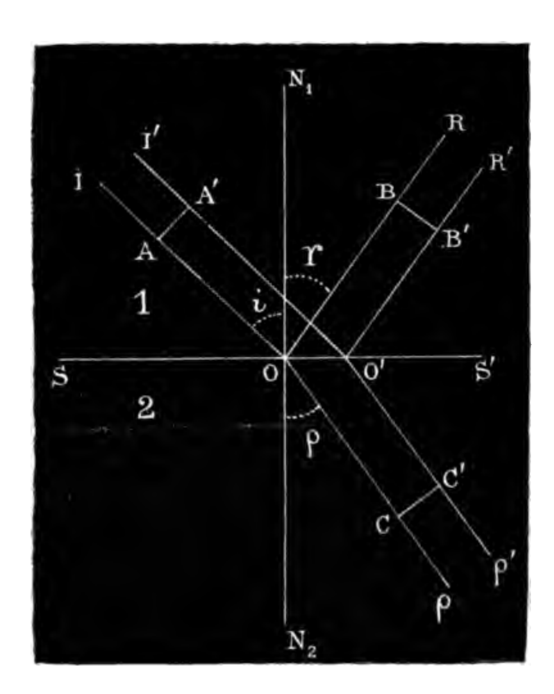


Fig. 22.

L'hypothèse précédente se traduit donc, dans le premier cas, par l'égalité

$$A_1^2 \times \text{aire } AA' = A_1^2 (G_1^2 \times \text{aire } BB' + G_2^2 \times \text{aire } CC'),$$

et, dans le second cas, par l'égalité

$$A_1^2 \times \text{aire } AA' = A_1^2 (F_1^2 \times \text{aire } BB' + F_2^2 \times \text{aire } CC').$$

En vertu des relations (6), ces égalités deviennent

$$(7) \quad \dots\dots \quad \begin{cases} (1 - G_1^2) \cos i = G_2^2 \cos \rho, \\ (1 - F_1^2) \cos i = F_2^2 \cos \rho. \end{cases}$$

Troisième hypothèse. — *Soient deux points* M_1, M_2, *situés l'un dans le milieu* 1, *l'autre dans le milieu* 2, *infiniment voisins l'un de l'autre et, partant de la surface réfléchissante; soient, à un même instant* t, φ_1 *et* Φ_1 *les vibrations incidente et réfléchie au point* M_1, Φ_2, *la vibration réfractée au point* M_2. *Soient* ψ, Ψ_1, Ψ_2, *les projections de ces vibrations sur la surface* S. *On a*

$$(8) \quad \dots\dots\dots\dots \quad \frac{\psi + \psi_1}{\psi_2} = K,$$

K *étant un coefficient qui dépend uniquement de la nature des milieux* 1 *et* 2 *et qui est le même lorsque la lumière incidente est polarisée perpendiculairement au plan d'incidence et lorsqu'elle est polarisée dans le plan d'incidence.*

Considérons d'abord le cas où la lumière est polarisée perpendiculairement au plan d'incidence; les directions positives des vibrations incidente, réfléchie, réfractée se projettent, suivant une même demi-droite, sur la surface S; elles font avec cette demi-droite des angles respectivement égaux à i, r (ou i) et ρ. On a donc

$$\psi = \varphi \cos i,$$

$$\psi_1 = \Phi_1 \cos i,$$

$$\psi_2 = \Phi_2 \cos \rho.$$

D'autre part, les égalités (3) donnent, en faisant $z = 0$ et en

tenant compte des égalités (5),

$$\varphi = A_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{lx + my}{V_1 T} - \alpha_1\right),$$

$$\Phi_1 = G_1 A_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{lx + my}{V_1 T} - \alpha_1\right),$$

$$\Phi_2 = G_2 A_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{lx + my}{V_1 T} - \alpha_1\right).$$

Pour que l'égalité (8) soit vérifiée, il faut et il suffit que l'on ait

(9) . . . . . $(1 + G_1) \cos i = K G_2 \cos \rho.$

Considérons maintenant le cas où la lumière est polarisée dans le plan d'incidence. Dans ce cas, les trois vibrations sont dirigées suivant une même demi-droite tracée sur la surface S. On a donc

$$\psi = \varphi, \quad \Psi_1 = \Phi_1, \quad \Psi_2 = \Phi_2.$$

D'autre part, les égalités (4) donnent, en faisant $z = 0$ et en tenant compte des égalités (5),

$$\varphi = A_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{lx + my}{V_1 T} - \alpha_1\right),$$

$$\Phi_1 = F_1 A_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{lx + my}{V_1 T} - \alpha_1\right),$$

$$\Phi_2 = F_2 A_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{lx + my}{V_1 T} - \alpha_1\right).$$

Pour que l'égalité (8) soit vérifiée, il faut et il suffit que l'on ait

(10) . . . . $1 + F_1 = K F_2.$

Les égalités (7), (9) et (10), donnent :

$$(11) \quad \ldots\ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} G_1 = \dfrac{K^2 \cos \rho - \cos i}{K^2 \cos \rho + \cos i}, \\[2ex] G_2 = \dfrac{2K \cos i}{K^2 \cos \rho + \cos i}. \end{array} \right.$$

$$(12) \quad \ldots\ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} F_1 = \dfrac{K^2 \cos i - \cos \rho}{K^2 \cos i + \cos \rho}, \\[2ex] F_2 = \dfrac{2K \cos i}{K^2 \cos i + \cos \rho}. \end{array} \right.$$

Les formules (5), (11) et (12) résoudront le problème proposé lorsque nous connaîtrons la valeur du coefficient K. Un fait d'expérience va déterminer cette valeur.

Cinquième fait d'expérience. (Loi de Brewster.) — *Si le rayon incident est polarisé dans un plan perpendiculaire au plan d'incidence, le rayon réfléchi est éteint au moment où sa direction serait perpendiculaire à celle du rayon réfracté.*

Le rayon réfléchi est perpendiculaire au rayon réfracté, on le voit sans peine, au moment où l'on a

$$(13) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \tang i = \frac{V_1}{V_2} = N_{12},$$

N_{12} étant l'indice de réfraction de la substance. On doit donc avoir $G_1 = 0$, au moment où $\tang i = N_{12}$ et où, par conséquent,

$$\sin i = \cos \rho;$$

cette dernière égalité doit donc entraîner l'égalité

$$\cos i = K^2 \cos \rho.$$

Ces deux égalités donnent

$$K^2 = \frac{1}{\tang i},$$

ou bien, en vertu de l'égalité (13),

$$(14) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad K^2 = \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{N_{12}}.$$

On achèvera de déterminer K si l'on connait son signe. Supposons que le milieu 2, graduellement variable, tende à devenir identique au milieu 1; V_2 tendra vers V_1 et N_{12} vers 1; or la définition même de K nous montre que, dans ces circonstances, K doit tendre vers 1. Nous devons donc poser

$$(15) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad K = \frac{1}{\sqrt{N_{12}}},$$

le radical étant pris avec son sens arithmétique.

L'égalité (15) achève de résoudre le problème posé.

En vertu de cette valeur de K, les égalités (11) deviennent

$$(16) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{array}{l} G_1 = \dfrac{\cos \rho - N_{12} \cos i}{\cos \rho + N_{12} \cos i}, \\ G_2 = \dfrac{2\sqrt{N_{12}} \cos i}{\cos \rho + N_{12} \cos i}. \end{array} \right.$$

Si l'on remplace dans ces égalités N_{12} par $\frac{\sin i}{\sin \rho}$, elles deviennent

$$(16^{bis}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{array}{l} G_1 = \dfrac{\sin 2\rho - \sin 2i}{\sin 2\rho + \sin 2i}, \\ G_2 = \dfrac{2}{\sqrt{N_{12}}} \dfrac{\sin 2i}{\sin 2\rho + \sin 2i}. \end{array} \right.$$

La première égalité (16 bis) peut encore s'écrire

$$(16^{ter}) . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad G_1 = - \frac{\operatorname{tang}(i - \rho)}{\operatorname{tang}(i + \rho)}.$$

En vertu de l'égalité (15), les formules (12) deviennent

$$(17) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} F_1 = \dfrac{\cos i - N_{12}\cos\rho}{\cos i + N_{12}\cos\rho}, \\ F_2 = \dfrac{2\sqrt{N_{12}}\cos i}{\cos i + N_{12}\cos\rho}. \end{cases}$$

Si l'on remplace dans ces formules N_{12} par $\frac{\sin i}{\sin\rho}$, elles deviennent

$$(17^{\text{bis}}) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} F_1 = -\dfrac{\sin(i-\rho)}{\sin(i+\rho)}, \\ F_2 = \dfrac{1}{\sqrt{N_{12}}}\,\dfrac{\sin 2i}{\sin(i+\rho)}. \end{cases}$$

Le problème de la réflexion et de la réfraction d'ondes planes à la surface plane qui sépare deux milieux transparents est ainsi complètement résolu *dans le cas où les ondes planes incidentes sont polarisées soit dans le plan d'incidence, soit dans un plan perpendiculaire au plan d'incidence.*

Les formules trouvées sont celles de Fresnel (*).

Il est facile maintenant, en suivant la voie indiquée dans tous les traités, d'examiner ce qui se produit lorsqu'on fait tomber sur une surface plane séparant deux milieux transparents, des ondes planes :

1° Polarisées rectilignement dans un plan quelconque;

2° Polarisées elliptiquement;

3° Formées de lumière naturelle.

Il est facile aussi de traiter des diverses applications de cette

---

(*) Les formules trouvées diffèrent en réalité de celles de Fresnel par la présence du facteur $\sqrt{N_{12}}$ soit au numérateur, soit au dénominateur des expressions de G_1 et de G_2. Mais si l'on observe que, dans toute expérience, la lumière engendrée *dans l'air* est observée *dans l'air* après avoir traversé un ou plusieurs milieux transparents, on voit sans peine que la présence ou l'absence de ce facteur n'altère aucune conséquence expérimentale. Toute vérification de la théorie de Fresnel est donc une vérification de la théorie précédente.

théorie (pile de glace, expérience des deux et des trois miroirs, couleurs des lames minces); nous n'insisterons pas sur ces questions qui ne présentent aucune difficulté de principe.

8. La réflexion totale.

Nous avons vu que les hypothèses sur lesquelles repose la théorie précédente conduisaient à des conséquences inadmissibles dans le cas où l'on avait

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \sin i > \frac{V_1}{V_2},$$

cas qui ne peut se présenter à moins que l'on n'ait

$$V_1 < V_2.$$

Dans ce cas, nous reprendrons la théorie de la réflexion à son point de départ et, arrivés au deuxième fait d'expérience, nous le remplacerons par le suivant :

Sixième fait d'expérience. — *Dans le cas où la condition* (2) *est vérifiée, il n'y a pas de lumière réfractée.*

Nous poursuivrons alors le développement de la théorie en supprimant simplement ce qui est relatif à la lumière réfractée et nous parviendrons ainsi aux équations (3) et (4) qui se réduiront à ce qui suit :

I. *Lumières incidente et réfléchie polarisées perpendiculairement au plan d'incidence.*

$$(18) \quad \begin{cases} \varphi = A_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{lx + my + nz}{V_1 T} - \alpha_1\right), \\ \psi_1 = C_1 A_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{lx + my - nz}{V_1 T} - \alpha_1 - D_1\right). \end{cases}$$

II. *Lumières incidente et réfléchie polarisées dans le plan d'incidence.*

$$(19)\quad \begin{cases} \varphi = A_1 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{lx + my + nz}{V_1 T} - \alpha_1\right), \\ \Phi_1 = F_1 A_1 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{lx + my + nz}{V_1 T} - \alpha_1 - \Delta_1\right). \end{cases}$$

Nous reproduirons maintenant notre deuxième hypothèse, en y supprimant simplement ce qui concerne la lumière réfractée; les égalités (7) seront alors remplacées par les suivantes :

$$(20) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} 1 - G_1^2 = 0, \\ 1 - F_1^2 = 0. \end{cases}$$

Ces égalités (20) entrainent la proposition suivante :

Dans le cas qui nous occupe, l'intensité de la lumière réfléchie est égale à l'intensité de la lumière incidente.

Cette proposition justifie le mot « *réflexion totale* » par lequel on caractérise ce cas.

Les égalités (20) déterminent la valeur absolue, mais non point le signe de G_1 et de F_1; pour fixer ce signe, nous aurons recours à des considérations de continuité.

Soit λ l'*angle limite*, défini par l'égalité

$$(21) \quad \ldots\ldots \quad \sin\lambda = \frac{V_1}{V_2}.$$

Lorsque l'angle i tend vers λ par valeurs inférieures à λ, l'angle ρ tend vers $\frac{\pi}{2}$; les égalités (16 et (17) nous montrent alors que F_1 tend vers 1, et G_1 vers — 1. Pour les valeurs de i supérieures à λ, nous remplacerons désormais les égalités (20) par

$$(22) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} F_1 = 1, \\ G_1 = -1. \end{cases}$$

Pouvons-nous conserver notre première hypothèse?

Considérons le cas où le rayon incident tombe sur la surface réfléchissante sous un angle $i = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire sous l'*incidence rasante*. Dans ce cas, le rayon réfléchi est évidemment le prolongement du rayon incident ; de quelque manière que le rayon incident soit polarisé, au point d'incidence, la vibration réfléchie doit être identique à la vibration incidente. Introduisons cette condition en tenant compte des égalités (22) et de la règle selon laquelle nous comptons positivement les vibrations ; nous arrivons sans peine aux résultats suivants :

Sous l'incidence rasante ($i = \frac{\pi}{2}$) *on a, pour la lumière polarisée dans le plan d'incidence,* $\Delta_1 = 2k + 1$, *et pour la lumière polarisée perpendiculairement au plan d'incidence,* $D_1 = 2k + 1$, k *étant un nombre entier positif, négatif ou nul.*

Ces résultats nous montrent qu'*il est impossible, dans le cas de la réflexion totale, de conserver notre première hypothèse.*

Le problème de la réflexion totale consiste à déterminer les valeurs de D_1 et de Δ_1 pour les valeurs de i comprises entre λ et $\frac{\pi}{2}$. Au sujet de ces valeurs, nous avons seulement les renseignements suivants :

$$(23) \quad \begin{array}{ll} \textit{Pour } i = \lambda. & \textit{Pour } i = \dfrac{\pi}{2}. \\ \left\{ \begin{array}{l} \Delta_1 = 0, \\ D_1 = 0, \end{array} \right. & \begin{array}{l} \Delta_1 = 2k + 1, \\ D_1 = 2k + 1. \end{array} \end{array}$$

On satisfait à ces conditions en prenant, pour valeurs de Δ_1 et D_1, les valeurs comprises entre 0 et 1 qui vérifient les égalités

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tang \pi\Delta_1 = \dfrac{\sqrt{\sin^2 i - N_{12}^2}}{\cos i}, \\ \tang \pi D_1 = \dfrac{\sqrt{\sin^2 i - N_{12}^2}}{N_{12}^2 \cos i}. \end{array} \right.$$

Ces formules ont été découvertes par Fresnel au moyen de considérations étranges ; curieuses pour l'histoire de la science, ces considérations ne donnent aucune valeur aux formules (24) ;

il en est de même des raisonnements que l'on substitue parfois à ceux de Fresnel. Nous aimons mieux introduire ces formules comme des HYPOTHÈSES que les vérifications de l'expérience rendent seules valables.

C. *Généralisation des résultats précédents.*

Il s'agit maintenant de traiter le cas où les ondes lumineuses et la surface de séparation des deux milieux transparents ont des formes quelconques. Il suffit de répéter presque textuellement ce que nous avons dit au paragraphe C du Chapitre préliminaire, afin d'arriver à définir les lumières émergentes et incidentes; l'angle d'incidence, le plan d'incidence, etc. Nous devrons seulement ajouter ceci : toute lumière incidente, qu'elle soit polarisée rectilignement, polarisée elliptiquement, ou naturelle, pourra se décomposer en deux lumières polarisées rectilignement, provenant du même point O, l'une ayant pour plan de polarisation le plan d'incidence, l'autre ayant pour plan de polarisation un plan perpendiculaire au plan d'incidence; chacune d'elles devra être traitée comme il est indiqué au Chapitre préliminaire, paragraphe C, mais, en passant de la première à la seconde, il faudra substituer les quantités G_1, D_1, G_2, D_2, aux quantités F_1, Δ_1, F_2, Δ_2.

Le problème de la réflexion et de la réfraction à la surface de contact de deux milieux transparents, isotropes, dénués de pouvoir rotatoire, sera ainsi mis en équations d'une manière complète; ce problème pourra comporter encore de grandes difficultés d'analyse, mais la tâche du physicien sera terminée en ce qui le concerne, du moins tant que les restrictions que nous avons imposées au problème de l'optique seront conservées.

CONCLUSION.

Rappelons quelles sont ces restrictions :

1° Nous avons supposé les milieux que nous avons étudiés *isotropes;* il existe des milieux anisotropes; comment peut-on leur étendre les théories précédentes ?

2° Nos équations exigent que les milieux étudiés soient *parfaitement transparents;* il y a des milieux absorbants, et même tous les milieux sont plus ou moins absorbants; comment faudrait-il modifier nos équations pour tenir compte de l'absorption?

3° *Nous avons exclu* de nos considérations *les milieux doués de pouvoir rotatoire;* comment se comportent, au point de vue optique, les milieux isotropes ou anisotropes qui possèdent le pouvoir rotatoire?

4° Chaque milieu est caractérisé, dans nos théories, par la vitesse avec laquelle la lumière s'y propage; cette vitesse dépend de la couleur de la lumière propagée, sauf pour le vide; nous avons admis cette dépendance comme un fait et nous avons laissé à la seule expérience le soin d'en déterminer la loi; ne peut-on chercher à l'expérience un guide théorique? ne peut-on tracer une *théorie de la dispersion?*

Autant de questions qu'il resterait à examiner en suivant les méthodes tracées dans les pages précédentes; nous ne les aborderons pas; nous arrèterons à ce point ces fragments où nous avons exposé la partie la plus achevée de l'Optique; nous en avons assez dit pour prouver que L'ON PEUT CONSTRUIRE UNE OPTIQUE RATIONNELLE, SANS FAIRE AUCUNE HYPOTHÈSE SUR LA CONSTITUTION INTIME DES MILIEUX TRANSPARENTS NI SUR LA NATURE DE LA LUMIÈRE.

DEUX CAS
DE
TRÉPANATION DES SINUS FRONTAUX

PAR

le Dr VANHEUVERSWYN

(de Lille)

Ex-chef de clinique de la Faculté catholique de médecine.

Nous avons, dans le courant de l'année 1893, observé deux cas d'altération pathologique des sinus frontaux. L'examen diagnostique des malades nous a conduit à proposer et à pratiquer avec M. le professeur Guermonprez la trépanation de ces cavités. Dans le premier fait il s'agissait d'un empyème, et notre intervention s'est trouvée sous le chloroforme justifiée sans conteste. Dans l'autre, il existait une tuméfaction de la région de la tête du sourcil avec la plupart des signes physiques et rationnels d'une affection du sinus; en fin de compte, nous avons trouvé une dégénérescence fongoïde de la muqueuse qui tapisse intérieurement les parois de la cavité. Il n'existait aucune collection liquide. Était-il nécessaire de recourir à une opération qui, au demeurant, laisse toujours une cicatrice assez visible? Nous inclinons à l'admettre. Nous rapporterons avec quelque détail nos deux observations afin d'en tirer des renseignements très utiles au point de vue du diagnostic différentiel et du traitement des lésions des sinus frontaux. La question est à l'ordre du jour, et la lumière se fait surtout avec les faits nouveaux.

I

Observation I. ***Polypes multiples des fosses nasales. Empyème du sinus frontal droit. Trépanation et curettage. Guérison se maintenant deux ans et demi après l'intervention.*** — C..., Arthur, 35 ans, ajusteur, est depuis plus de huit ans sujet à des coryzas répétés. Il présente les signes d'une obstruction presque complète des fosses nasales (enchifrènement, nasonnement, respiration bruyante, essoufflement, pâleur de la face, etc.). Depuis quatre mois environ, il accuse des maux de tête violents, continus, à exacerbations vespérales. Ces douleurs, localisées surtout à la partie inférieure du front, s'accompagnent à certains moments d'un malaise général, de frissonnements et d'accélération du pouls. Il y a quelques semaines, est apparu un gonflement de la région susorbitaire droite. D'abord limité à une petite plaque de la grandeur d'une pièce de deux francs surplombant la tête du sourcil, il a peu à peu envahi toute la moitié droite du front, empiétant sur le côté gauche et remontant en haut presque jusqu'à la naissance des cheveux. Par en bas, la paupière supérieure correspondante et la racine du nez sont elles mêmes légèrement infiltrées. Au palper, on reconnait que la tuméfaction peut être divisée en deux parties distinctes : l'une centrale et profonde, dure et douloureuse, occupant la région du sinus frontal, est constituée par l'hypertrophie pathologique de la lamelle ostéopériostique que forme la paroi antérieure de cette cavité; l'autre, périphérique et superficielle, molle et indolore, est due à l'infiltration œdémateuse des parties molles. L'examen rhinoscopique fait découvrir dans les deux fosses nasales plusieurs polypes muqueux de la grosseur chacun d'une petite noisette.

Diagnostic : empyème du sinus frontal droit; ostéite et périostite de la table antérieure du crâne.

Nous proposons la trépanation qui est acceptée. Elle est faite aux ateliers d'Hellemmes, en notre présence et avec notre aide, par M. le professeur Guermonprez.

Premier temps. Après chloroformisation, incision de la peau parallèlement à la ligne sagittale, à un demi-centimètre de cette ligne, commençant au tiers supérieur de la partie découverte du front et se terminant sur la tête du sourcil droit. Longue de 6 centimètres, elle intéresse successivement la peau, le tissu cellulaire et l'épicrâne.

Deuxième temps. On place deux écarteurs, l'un à droite, l'autre à gauche, pour découvrir le péricrâne. Ce dernier est congestionné, épaissi; on l'incise, on le détache avec le grattoir à périoste, et l'on voit apparaître la table antérieure du crâne. Une gouttelette de pus se montre aussitôt à travers un orifice qui admet à peine l'extrémité d'une sonde cannelée ordinaire. Le tissu osseux voisin est épaissi, semé d'un piqueté rougeâtre dû à sa vascularisation intense.

Troisième temps. Pour trépaner, on se contente d'agrandir, au moyen du ciseau à froid et du marteau, une fenêtre ronde de la grandeur d'une pièce de cinquante centimes. Le pus qui s'écoule est blanc, épais, crémeux; la muqueuse du sinus n'existe plus, elle est remplacée par une membrane villeuse qui se détache avec la plus grande facilité. On écouvillonne avec de petits tampons d'ouate l'intérieur de la cavité dans toutes ses anfractuosités, on rétablit la communication avec le nez, avec une petite curette qui arrive, après quelques tâtonnements, à retrouver l'orifice naso-frontal; puis, après avoir fait d'abondants lavages (sublimé corrosif au 4000e), on place jusque dans la cavité osseuse un drain qui passe extérieurement entre le tiers moyen et le tiers inférieur de l'incision cutanée. Cette dernière est fermée par quelques points de suture au crin de Florence.

Les suites de l'opération furent simples. On fait tous les jours à l'eau boriquée un lavage de la cavité par le drain. Le liquide passe en partie par les narines et l'arrière-gorge. Au bout de huit jours, on enlève les fils; on retire le drain à la fin de la troisième semaine, et la guérison est obtenue sans incidents. Dans la suite, nous adressons le malade à M. le Dr Lavrand, qui enlève trois gros polypes dans la fosse nasale droite et quelques autres dans la fosse nasale gauche. Nous revoyons le malade en

octobre 1895. Il est très bien portant, il n'a plus de maux de tête. Il va de temps en temps revoir M. Lavrand qui lui enlève de petits polypes au début de leur évolution et fait quelques cautérisations. Tout porte à croire qu'avec ces précautions et en attendant la guérison définitive notre opéré n'a plus rien à craindre du côté du sinus. Le nasonnement a disparu. Il reste une cicatrice linéaire ayant à son tiers inférieur un léger point déprimé (trace du passage du drain). A ce niveau, le palper digital fait percevoir une petite cupule, elle est loin d'avoir la grandeur d'une pièce de cinquante centimes. Le front, saillant avant l'opération, s'est affaissé, la table externe a subi un retrait en arrière. C'est ce qui explique le rétrécissement de la fenêtre pratiquée il y a deux ans par le ciseau à froid.

Réflexions. — Le gonflement occupait primitivement la région de la tête du sourcil ; mais nous voyons qu'au lieu de se porter ensuite vers l'angle supéro-interne de l'orbite, comme cela a lieu d'ordinaire, elle avait plutôt une tendance à s'accentuer dans la région frontale.

L'anatomie normale nous apprend que les sinus sont des cavités très variables de forme et d'étendue. A la suite de recherches pratiquées sur 23 sujets de 21 à 80 ans (13 hommes, 10 femmes), M. Alezais (*) a démontré que le sinus frontal était en général plus grand chez l'homme que chez la femme, mais que l'augmentation chez l'adulte, due à l'âge, était incertaine et irrégulière. L'absence totale a été rencontrée deux fois et l'absence unilatérale trois fois. L'aire frontale des sinus mesure chez l'homme 6 centimètres, suivant la ligne susorbitaire, et 3cm,5 suivant la ligne médiane sagittale ; chez la femme, on a 4cm,5 sur 3. La paroi orbitaire a, chez l'homme, 2cm,25 sur 2, et chez la femme, 2 centimètres sur 1,30. Elle s'arrête souvent à la ligne lacrymo-orbitaire ; mais *elle peut envoyer*, surtout à droite, *sur la paroi externe, un prolongement lacrymal de 1 centimètre sur 0,5*. Ceci expliquerait les empyèmes à prédominance symptomatique du côté des orbites.

(*) *Association française pour l'avancement des sciences*, session de Marseille. 1891.

La marche que nous avons observée doit donc tenir à une conformation individuelle; il est probable que la table antérieure était chez notre malade mince et peu résistante, ce qui fait qu'elle a cédé la première. Il ne faut pas oublier ces notions dans l'examen d'un cas où l'on a des raisons de supposer un empyème des sinus frontaux. Nous pouvions en effet de prime abord, vu le siège du mal, croire à une altération primitive du corps de l'os; mais les commémoratifs et l'examen rhinoscopique nous ont, malgré cela, fait porter le diagnostic d'abcès du sinus, avec ostéite secondaire.

Relativement au traitement, nous avons été assez heureux pour retrouver le canal d'abouchement dans les fosses nasales. Il faut savoir que les récidives sont très fréquentes et ont lieu surtout lorsque l'on omet de rétablir cette communication. Les chirurgiens sont tellement convaincus de cette vérité que plusieurs d'entre eux, les auteurs en font foi (*), n'hésitent pas, au cas où ils ne retrouvent pas l'orifice qui conduit à l'infundibulum, à défoncer par en bas la lame carrée de l'ethmoïde et à faire passer par l'ouverture pratiquée un drain qui vient ressortir par la narine correspondante.

Éclairé par un travail de Jansen (*Archiv fur Laryngol.*, 1893, page 133) établissant l'association habituelle des cellules ethmoïdes à la suppuration du sinus, M. Luc (**), après l'ouverture *de tout empyème frontal*, pratique, du front vers le nez, une large brèche qui fait de ces dernières et du sinus une seule et spacieuse cavité. Nous n'avons pu nous procurer l'étude de Jansen, mais nous trouvons dans la *Revue de chirurgie* (1893), sous le nom de M. Hartman (de Berlin), le résumé d'une communication (21e congrès de la Société allemande de chirurgie) qui peut nous être de quelque utilité pour notre sujet: « Il est rare qu'il existe un canal naso-frontal; *le plus souvent* le sinus

---

(*) DICT. ENCYCLOP. DES SCIENCES MÉD., art. *Crâne* (maladies des cavités osseuses). — Duplay et Reclus, *Traité de chirurgie.*

(**) *Des suppurations du sinus frontal et en particulier de leur traitement chirurgical.* SEMAINE MÉDICALE, 16 juin 1894.

s'étend jusqu'à l'extrémité antérieure du cornet moyen et *s'ouvre librement* par une large fente dans la partie externe du méat moyen. D'habitude la partie du sinus sous-jacente à la racine du nez est rétrécie par des cellules ethmoïdales, qui peuvent se développer sur toutes ses parois. Ces cellules laissent au centre un espace qu'on peut appeler canal naso-frontal. Celui-ci s'ouvre en général dans le sillon antérieur de l'infundibulum, et avec des sondes de courbure convenable on pénètre facilement dans le sinus, quand l'ouverture dans le méat moyen est libre. Il n'en est plus de même lorsque le canal est formé par les cellules ethmoïdales qui s'ouvrent alors dans sa cavité, le stylet peut s'égarer dans l'une d'entre elles. »

En se rappelant les données de l'anatomie, on peut tirer de la communication de M. Hartman les deux conclusions suivantes : 1° on voit le sinus s'ouvrir *directement par un point de sa paroi* dans le méat moyen. Dans ce cas les cellules ethmoïdales sont situées en arrière et en bas du sinus et ont leurs orifices particuliers dans le méat en question. Le carrefour où aboutissent tous ces orifices (du sinus et des cellules) n'est autre chose que l'infundibulum; 2° on voit le sinus frontal communiquer avec le méat au moyen d'un *canal allongé* et rétréci par le développement autour de la cavité fronto-nasale de cellules ethmoïdales. Dans ce cas on trouve au fond de l'infundibulum un seul orifice, celui du sinus, se continuant en haut par un *couloir* où viennent s'ouvrir les *cellules* de l'ethmoïde.

Si, dans cette seconde hypothèse, celles-ci doivent être envahies par la suppuration en cas d'empyème frontal, il n'est nullement démontré que dans la première l'association existe. Aussi croyons-nous que la pratique recommandée par M. Luc peut être dans certains cas exagérée. Qu'elle soit applicable aux empyèmes compliqués comme ceux qu'il relate, c'est possible. Mais il est évident que, pour les cas moyens, comme celui qui fait l'objet de l'observation précédente, le curettage et la cautérisation du sinus suivis du rétablissement de la communication fronto-nasale et du traitement de l'affection des premières voies aériennes sont le plus souvent suffisants. Dans les cas difficiles

et très anciens d'ailleurs, tout est à tenter dans les limites imposées à la saine chirurgie, et nous sommes loin de blâmer les interventions auxquelles a eu recours M. Luc, pour obtenir la guérison d'empyèmes très rebelles.

La trépanation et le rétablissement des voies fronto-nasales doivent être accompagnés d'un curettage très soigné de la paroi. Pour manœuvrer plus à l'aise, il ne faut pas craindre de pratiquer à la table antérieure du sinus en cause une fenêtre de grandes dimensions. Dans notre cas, la cavité suppurée n'était pas notablement agrandie : aussi a-t-il suffi de faire sauter une rondelle osseuse circulaire du diamètre d'une pièce de cinquante centimes. Avec une petite curette (*) on arrive très bien à nettoyer la cavité du sinus dans tous ses recoins, en insistant surtout pour désobstruer le canal naso-frontal.

On peut, si cela est nécessaire, faire suivre le curettage d'un attouchement avec une solution concentrée de chlorure de zinc. Pour peu que les soins ultérieurs soient bien appliqués, on arrive à une guérison définitive. Ceux-ci consistent surtout dans des lavages pendant les jours qui suivent l'intervention, et plus tard dans la modification de la muqueuse nasale (par des cautérisations, par l'ablation des polypes, etc.). Il est clair en effet qu'ultérieurement la membrane qui tapisse le sinus ne sera *saine* que si elle est régénérée par une *muqueuse nasale saine.* A ce point de vue, les soins donnés par M. le professeur Lavrand à notre malade nous ont été d'un grand secours. C'est pour ne pas avoir toujours pratiqué cette thérapeutique active immédiatement après l'opération et dans les mois qui l'ont suivie, que beaucoup de chirurgiens ont vu l'affection se reproduire. Pour notre part, nous avons supposé que les choses se passeraient pour la muqueuse nasale et celle du sinus comme pour la muqueuse utérine après le curettage et certaines excisions endocervicales récemment préconisées, et les faits jusqu'ici ont semblé nous donner raison.

(*) M Guermonprez en possède une d'un tout petit modèle dont il se sert pour évider des cavités osseuses minuscules (phalanges d'enfant dans le cas de *spina ventosa*).

II

Dans le fait précédent, nous avions posé un diagnostic précis malgré le siège peu habituel de la tuméfaction inflammatoire. Voici un fait où nous avons retrouvé un ensemble symptomatique analogue, et dans lequel le sinus a été trouvé vide de toute collection liquide. Il n'existait pas non plus de production néoplasique affectant cliniquement les allures d'un empyème. Les lésions toutes en surface n'avaient point fermé la communication avec les fosses nasales; mais elles étaient malgré cela assez accentuées pour développer une ostéite de la paroi antérieure du sinus.

Observation II. *Hypertrophie de la muqueuse nasale. Dégénérescence fongoïde de la muqueuse du sinus frontal gauche. Ostéopériostite du frontal. Névralgie susorbitaire. Trépanation. Curettage. Guérison se maintenant au bout de trois ans.* — D..., Louis, 24 ans, frappeur, vient me consulter au début de l'année 1893 pour des douleurs de tête qu'il ressent depuis cinq semaines. Il n'a fait à sa connaissance aucune maladie grave; il n'était pas antérieurement sujet à la migraine. Aucune trace de syphilis. La céphalalgie occupe surtout la région du front. Le nerf susorbitaire gauche est douloureux à son point d'émergence. Pas de douleur à la pression du nerf sous-orbitaire, ce qui, bien qu'il existe quelques *chicots*, nous incline à éliminer l'appareil dentaire dans les causes de la névralgie. Nous remarquons d'ailleurs que la voix est nasonnée et que la narine gauche est en partie obstruée. En examinant la cavité de cette dernière avec le *speculum nasi*, nous constatons une hypertrophie notable du cornet inférieur. Le malade nous raconte qu'il a eu depuis quatre mois un certain nombre de coryzas et que l'enchifrènement va sans cesse en augmentant. Nous faisons séance tenante un attouchement avec une solution de chlorure de zinc au 50°, nous prescrivons des irrigations nasales à l'eau boriquée chaude et de l'antipyrine associée au bromhydrate de quinine à l'intérieur

(aa. 60 centigrammes par jour). Quelques jours après, le malade n'est pas amélioré, et il nous fait constater un léger gonflement du front au-dessus de l'arcade orbitaire gauche. Au palper, la peau est œdématiée et l'on sent comme un soulèvement diffus de l'os. Le centre de la tuméfaction occupant la région du sinus frontal, il est probable que nous nous trouvons en présence d'une affection de cette cavité. Le coryza à répétition et l'hypertrophie des cornets gauches nous inclinent à admettre une altération de la muqueuse avec rétention probable des produits de sécrétion (pus ou mucus). Nous proposons la trépanation au malade qui l'accepte. Elle est pratiquée aux ateliers d'Hellemmes par M. le professeur Guermonprez. Le malade étant chloroformé, une incision est conduite sur la peau du front à un demi-centimètre de la ligne sagittale et parallèlement à elle. Commençant au milieu du front, elle vient finir sur la tête du sourcil. Elle a une longueur de 4 centimètres. Après avoir divisé l'épicrâne, on arrive sur le périoste qui apparaît très vascularisé. On l'incise suivant la même direction que le tégument et on l'écarte à la rugine. Le tissu osseux se montre, il est percé sur toute l'étendue correspondant au sinus gauche d'une infinité de pertuis formant par leur réunion un piqueté d'un rouge vif très intense.

La trépanation est faite au moyen du ciseau à froid et du maillet. On pratique ainsi une fenêtre de la grandeur d'un centimètre carré environ. Une fois le sinus ouvert, nous sommes très étonnés de ne voir aucun liquide sortir de la cavité. Mais un lambeau de muqueuse qui a été arraché avec la lamelle osseuse excisée nous renseigne sur la nature de l'altération que nous avons à traiter. Cette muqueuse est en effet très épaisse et très friable. Elle est comme boursouflée et couverte de gros bourgeons violacés dans l'intervalle desquels on aperçoit un enduit grisâtre muco-purulent.

Une exploration au stylet montre que le canal naso-frontal est perméable. Avec une curette mousse on pratique l'ablation de toute la muqueuse du sinus. On fait un lavage au sublimé au 4000e et l'on referme la plaie par quelques points de suture au crin de Florence, après avoir placé à sa partie inférieure un

petit drain qui, pénétrant directement dans la cavité du sinus, permettra d'en faire le lavage.

Pansement iodoformé qu'on renouvelle tous les jours suivants après un lavage à l'eau boriquée (le liquide passe en partie par la narine correspondante et l'arrière-gorge). On enlève les fils le septième jour et le drain vers la fin de la deuxième semaine. Nous faisons à plusieurs reprises dans la suite des attouchements du cornet inférieur au chlorure de zinc. Le malade se fait de fréquents lavages à l'eau chaude salée.

Nous avons revu l'opéré ces jours-ci (novembre 1895). Il est resté complètement guéri. Le cornet inférieur est pourtant toujours un peu hypertrophié.

Dans ce cas nous avons été fort surpris de ne pas trouver une collection liquide dans la cavité du sinus. Nous nous sommes demandé s'il n'y avait pas une erreur de diagnostic et si nous n'aurions pas dû plutôt admettre une altération primitive de l'os frontal. Nous ferons remarquer cependant que tout dans l'histoire de notre malade indiquait une affection nasale. L'examen rhinoscopique laissait voir une inflammation chronique de la muqueuse avec hypertrophie considérable du cornet inférieur (du côté du sinus incriminé). Quel était donc l'état pathologique de la cavité trépanée? Il mérite à notre avis d'être décrit.

Il y a un développement énorme de la muqueuse qui tapisse intérieurement le sinus. Celle-ci prend l'aspect fongueux. On voit des élevures arrondies, mollasses et friables, bleuâtres, violacées, séparées par des sillons au fond desquels se trouve un enduit grisâtre analogue à du muco-pus à moitié desséché. Il est fâcheux que les lambeaux enlevés se soient trouvés dans un état qui ne permettait pas d'en faire une coupe microscopique régulière. Nous aurions probablement retrouvé des lésions analogues à celles qui ont été décrites pour la muqueuse intra-utérine sous le nom d'endométrite chronique glandulaire (Ruge, Wyder), et peut-être même eussions-nous observé une transformation polypeuse, comme celle qu'a signalé Récamier pour le même organe et qu'Ohlsausen a de nouveau étudiée. En tout cas, nous nous trouvions en face d'une lésion en voie d'évolution.

Elle pouvait aboutir à un empyème, à une hypertrophie enkystée du sinus, si un jour la communication avec la fosse nasale était fermée, ou à une masse polypeuse, si cette voie fronto-nasale existant toujours, le travail pathologique s'accentuait davantage dans le sens d'une prolifération. A ce point de vue l'observation précédente mérite d'être retenue, elle marque le début d'affections du sinus que l'on ne connaît souvent qu'à leur période confirmée. Le commencement d'altération de la paroi osseuse montre que le travail pathologique était assez intense.

La trépanation était-elle nécessaire? — Oui et non. Oui, puisque tout nous portait à admettre une maladie du sinus antérieure à l'ostéite. Jusqu'à présent les classiques nous disent que lorsqu'une tuméfaction se montre dans la région du sinus frontal et que l'on a des données pour admettre une lésion inflammatoire ou organique de ce dernier, il ne faut pas hésiter de recourir à l'ouverture de la cavité. Si en effet la lésion est un abcès, on court le risque en attendant de voir le pus se faire une voie vers les méninges et occasionner des accidents redoutables. — Non, si l'on admet que l'affection que nous venons de décrire peut être guérie par des irrigations nasales, ou par le cathétérisme suivi de lavages du sinus par son orifice naturel dans le méat moyen. Cette intervention nécessite des mains mieux outillées et plus exercées que les nôtres, et nous nous demandons d'ailleurs si cette thérapeutique peut faire rétrocéder une ostéite du frontal.

Au demeurant, notre malade a retiré un grand bénéfice de notre intervention. Les douleurs névralgiques qui tenaient à coup sûr à l'altération osseuse ont complètement disparu. Il lui restait une hypertrophie inflammatoire des cornets; elle fut heureusement modifiée par les moyens ordinaires : irrigations nasales, cautérisations.

Quant il n'existe pas de lésion osseuse, comme dans le cas précédent, il ne faut pas trop se hâter de recourir à la trépanation.

M. Mayo Collier a relaté à l'Association britannique de laryngologie et de rhinologie (1892) trois observations intéres-

santes de troubles du côté des sinus frontaux. Nous résumons les deux premières.

Dans l'une, la sensation d'une douleur intense à la racine du nez, la fièvre et une vive sensibilité à la pression des sinus frontaux avaient fait conclure à une inflammation aiguë des sinus. L'aconitine et la morphine à l'intérieur, la glace sur la région douloureuse amenèrent la guérison.

Dans l'autre, l'apparition de douleurs sourdes persistantes et une sensation de plénitude à la région frontale, précédées d'un coryza intense, avaient fait supposer un abcès du sinus. Des douches nasales tièdes et des inhalations d'un mélange de teinture d'iode, de chloroforme et d'acide phénique firent apparaître au bout de quelques jours un écoulement semi-purulent par une narine, après quoi le malade guérit.

A propos de notre intervention, d'aucuns pourraient blâmer la manière dont nous avons abordé le sinus. La plupart des opérateurs ont soin, en effet, de dissimuler leur incision cutanée dans le sourcil, et l'on nous demandera pourquoi nous n'avons pas imité cette conduite. A cela nous répondrons que dans nos deux cas la tuméfaction était haut située sur le front, ainsi qu'il ressort des observations; et que d'ailleurs la défiguration qui résulte de nos incisions est bien minime. Elle se borne à un trait fort étroit occupant à peu près la ligne sagittale.

De l'étude qui précède nous pouvons tirer les conclusions suivantes :

1° On n'a point décrit jusqu'à présent toutes les altérations des sinus frontaux. Entre l'inflammation aiguë qui accompagne ou suit immédiatement le coryza d'une part, et les collections liquides (purulentes ou non) et les proliférations néoplasiques (polypes, ostéites, etc.) d'autre part, on peut décrire un état fongoïde spécial de la muqueuse du sinus. Cet état est très probablement le résultat de poussées inflammatoires successives. Le diagnostic en est difficile sinon impossible, mais il faut y songer lorsqu'on se trouve en présence d'affections nasales réci-

divant avec ténacité malgré une thérapeutique bien appliquée ou quand on a affaire à une névralgie susorbitraire très rebelle.

Le traitement doit consister d'abord dans l'application de révulsifs sur la région du sinus et plus tard dans la trépanation de la cavité, quand il existe une ostéite secondaire du frontal. On se trouve vraisemblablement en présence d'une lésion qui aboutira tôt ou tard à la production d'une collection liquide (hydropisie, empyème) ou a une prolifération néoplasique du sinus (polypes muqueux).

2° Les empyèmes frontaux, l'hydropisie enkystée et les polypes du sinus réclament une thérapeutique spéciale et prolongée si on ne veut pas s'exposer à les voir récidiver.

Ce traitement comprend : *a*) la trépanation du sinus; *b*) le curettage très soigné accompagné au besoin d'une cautérisation de la paroi; *c*) la désobstruction du canal naso-frontal et *au besoin* l'effondrement des cellules ethmoïdales en bas et en arrière du sinus; *d*) le traitement prolongé de l'affection nasale primitive.

DE
L'OPHTALMIE DES NOUVEAU-NÉS

PAR

M. le Dr WARLOMONT.

On ne saurait trop attirer l'attention des médecins et du public sur un fléau qui continue à sévir dans notre pays, comme dans d'autres contrées voisines : l'ophtalmie des nouveau-nés. Je viens de relever, à quelques jours de distance, pour la seule ville de Bruges (*), trois cas de cette affection : deux (dont l'un appartenant à la clientèle d'un de mes confrères) sont actuellement en voie de guérison, le troisième a abouti à une cécité complète, l'enfant m'ayant été présenté plus de deux semaines après le début, quand les cornées étaient déjà infiltrées de suppuration.

Ce fait navrant, un pauvre petit être condamné dès son berceau à une cécité irrémédiable, est peut-être plus fréquent qu'on ne le pense (**); fût-il exceptionnel, il serait encore un

(*) La ville de Bruges n'est nullement visée par la constatation faite ici ; la situation est la même dans d'autres villes et dépend, comme on va le voir, de lacunes graves dans notre organisation sanitaire. Il n'y a pas bien longtemps, l'auteur de cette communication a pu assister, dans une grande ville universitaire, à une leçon clinique ayant pour objet l'ophtalmie des nouveau-nés. Six cas de cette triste affection étaient présentés par le professeur à ses élèves, cas légers, cas moyens, cas graves, complications cornéennes, etc.

(**) On comprend qu'il soit bien difficile de dresser des statistiques sur ce point ; il faudrait pour cela connaître le chiffre des cécités, monolatérales ou complètes, par ophtalmie des nouveau-nés, observés par chaque oculiste. Des relevés faits dans quelques cliniques oculistiques, à Berlin, à Vienne et en Angleterre, donnent le chiffre de 3 cécités doubles pour 100 cas d'ophtalmie des nouveau-nés (Fuchs). Quant à la part prise par la blennorrhée conjonctivale des nouveau-nés dans le contingent des aveugles, elle est impossible également à établir, à cause de la diversité des données. Dans quelques établissements d'aveugles, en Allemagne, en France, en Autriche, en Hollande, le professeur Fuchs relève 30 à 40 % de cécités par blennorrhée (FUCHS, *Causes et prévention de la cécité*).

non-sens et, tranchons le mot, un scandale dans une société armée comme la nôtre contre de semblables malheurs.

C'est qu'il ne s'agit pas ici d'une de ces maladies infecticuses, choléra, fièvre typhoïde, rage, etc., qui préoccupent les savants et les gouvernements, mais que la science, si avancée qu'elle soit, ne saurait se flatter de prévenir à coup sûr, encore moins de guérir avec certitude. La blennorrhée conjonctivale des nouveau-nés (non pas seulement la forme catarrhale légère, mais la blennorrhée véritable, virulente) est, au contraire, une maladie *évitable* (qu'on nous permette le mot, il est dû au professeur Bouchard) et *curable à coup sûr; évitable*, si l'on prévient, par des précautions antiseptiques et aseptiques bien connues de tout médecin, la contamination des yeux de l'enfant par les sécrétions virulentes des organes maternels ou leur infection, après la naissance, par les linges souillés de ces mêmes matières; *curable*, si l'on attaque vigoureusement le mal dès ses débuts, par des moyens appropriés (cautérisations, lavages oculaires antiseptiques). L'expérience a démontré à l'évidence ces deux points.

Comment se fait-il, dès lors, que l'ophtalmie des nouveau-nés continue ses ravages, en dépit des avertissements donnés par les hommes compétents, hygiénistes et ophtalmologues, et malgré les indications les plus précises proposées par eux pour éteindre le mal à coup sûr? Il est facile d'accuser l'impéritie de l'entourage de la petite victime : en réalité, les parents, appartenant d'ordinaire à la classe pauvre ou ouvrière, pèchent surtout par ignorance ; ils n'ont pas, non plus, à leur portée les ressources dont on dispose dans les classes aisées, la mère pauvre n'a pour l'avertir et la seconder que la sage-femme, humble auxiliaire, dont il serait injuste de méconnaître les services, mais qui ne saurait suffire à sa tâche si elle ne se sait surveillée d'une manière efficace et si elle n'est pas armée contre des défaillances, dont elle ne peut comprendre toute la gravité, par des règlements précis, appuyés par des sanctions sérieuses.

Il faut le dire bien hautement : c'est aux autorités que remonte la responsabilité des désastres dont nous parlons; c'est aux pouvoirs publics qu'il appartient de prendre les mesures néces-

saires pour faire disparaître le fléau en s'attaquant à ses causes. Ces causes sont, en résumé, d'une part, l'ignorance du public, surtout de la classe pauvre et ouvrière, d'autre part, l'insuffisance des soins préventifs et curatifs donnés à celle-ci. A l'étranger, certaines dispositions, isolées et insuffisantes, ont été prises; chez nous, rien, que nous sachions, n'a encore été fait.

Il suffira, pour montrer que nous ne sommes pas désarmés, d'énumérer les moyens prophylactiques qui ont été proposés (*) :

1. *Instruire les ménages du danger* et leur indiquer les précautions urgentes à prendre, soit au moyen d'une notice courte, claire et précise qui serait délivrée au bureau de l'état civil à toute personne venant annoncer une naissance (proposition du Dr Brière, du Havre, 1880), soit par quelques lignes insérées dans le livre de mariage (Dr Fieuzal) (**).

L'éducation du public en général devrait être faite sur ce point d'hygiène, comme sur bien d'autres, par des tracts, des publications de vulgarisation, des conférences, et cette question devrait être traitée dans les manuels d'hygiène pour les gens du monde. Quel bien pourraient faire, en jetant le cri d'alarme, les visiteurs et visiteuses des pauvres (maîtres des pauvres, membres des conférences de Saint-Vincent-de-Paul, dames de la Miséricorde)!

2. *Veiller à ce que les sages-femmes s'acquittent rigoureusement de leur mission.* L'instruction des sages-femmes est donnée dans les maternités par des médecins qui mettent certainement tous leurs soins à cette tâche; mais cela ne suffit pas,

(*) On trouvera de précieux renseignements sur toute cette question dans l'excellent ouvrage du professeur Fuchs : *Causes et prévention de la cécité*, traduction du Dr Fieuzal, 1885 (mémoire couronné par la *Society for the prevention of blindness*). Nous avons fait plusieurs emprunts à ce travail.

(**) A *Gand* et à *Bruges* se trouvent insérés dans le carnet de mariage quelques excellents « conseils aux mères de familles » sur l'hygiène du premier âge. C'est là une heureuse idée, qui mérite d'être mise à exécution partout. Dans le carnet de Bruges se trouvent ces mots : « Si les yeux de l'enfant suppurent, si les paupières sont collées, hâtez-vous de consulter l'oculiste; en quelques heures la vision pourrait être à jamais perdue. » Court et bon!

il faut encore s'assurer que cet enseignement est appliqué, il faut que la femme pauvre et son enfant soient garantis contre les conséquences désastreuses d'une négligence. Il faut, surtout, comme cela existe en Autriche, *rendre obligatoires les soins antiseptiques que la sage-femme a à donner à la mère* (irrigation vaginale préventive, faite immédiatement avant l'accouchement) (*).

Dans toutes les maternités, les sages-femmes doivent être initiées aux pratiques de désinfection oculaire; tel est l'avis des praticiens les plus autorisés, du professeur Fuchs, entre autres. Elles doivent être autorisées, sinon à faire une instillation d'une solution de nitrate d'argent (méthode de Crédé), au moins à faire un lavage préventif des yeux de l'enfant avec de l'eau bouillie ou boriquée (**) et même à pratiquer une insufflation d'iodoforme (méthode de Valude).

Ces règles sont faciles à suivre dans les maternités et les asiles d'enfants trouvés où règne une surveillance médicale incessante ; elles peuvent cependant et elles doivent être appliquées tout aussi rigoureusement au dehors.

Est-il besoin d'ajouter ici que l'ingérence illicite de certaines matrones non diplômées doit être poursuivie sans pitié par les commissions médicales, qui la dénonceront aux tribunaux?

Voilà pour la prophylaxie. Que faire maintenant dans les cas trop nombreux où ces précautions ont été négligées et où la maladie a éclaté? Faire en sorte que l'enfant soit soigné immédiatement et convenablement. Pour cela :

1° *La sage-femme doit être tenue, sous la sanction de péna-*

(*) Le Dr de Wecker, une autorité en ophtalmologie, a pu dire, sans soulever d'objection, au *Congrès de la Société française d'ophtalmologie*, en mai 1894 : « Mon ami Abadie vous propose, Messieurs, de supprimer bien des choses dans le traitement de l'ophtalmie purulente, ma proposition tend à *supprimer la maladie elle-même*. La meilleure prophylaxie consiste, à mon avis, à rendre *obligatoire* la désinfection de *toute* femme qui doit accoucher. » M. de Wecker demande « que l'on punisse sévèrement tout accoucheur et toute sage-femme qui procèdent sans désinfection à un accouchement ».

(**) Le simple lavage avec de l'eau pure a suffi, entre les mains d'Abegg, pour réduire le chiffre des blennorrhées à 3 %. (FUCHS, *loc. cit.*)

lités sérieuses, d'exiger des parents l'assistance du médecin (du médecin des pauvres ou des hôpitaux, ou d'un médecin ayant une consultation gratuite, comme c'est le cas pour la plupart). Cette sage disposition est appliquée en Autriche et en Suisse, et elle a déjà porté ses fruits : d'après Horner, depuis 1865, il ne se trouve, dans l'établissement d'aveugles de Zurich, aucun cas de cécité par conjonctivite purulente des nouveau-nés (*).

Si les parents refusent d'obtempérer à la demande de la sage-femme, celle-ci devra en référer à l'autorité et dégager ainsi sa responsabilité (**).

Quand l'enfant sera porté au médecin avec une blennorrhée négligée, si celui-ci apprend que la sage-femme n'a pas fait son devoir, il devrait non seulement avoir le droit, mais être obligé de dénoncer la sage-femme coupable (***).

2° *Les médecins chargés de la constatation des naissances seront tenus d'examiner les yeux des nouveau-nés* (IV).

En cas d'ophtalmie, ils avertiront les parents et feront en sorte que les soins nécessaires soient donnés à l'enfant.

Cette mesure, aussi simple qu'efficace, a été proposée il y a plus de dix ans par le Dr Galezowski (1882), et l'on doit s'étonner qu'elle ne soit pas appliquée partout. Elle rendrait souvent inutile l'intervention de la sage-femme, dont nous venons de parler. Pas toujours cependant : la visite du médecin de l'état civil peut précéder la manifestation de l'ophtalmie; celle-ci,

---

(*) FUCHS, *loc. cit.* — En France, une loi récente, celle du 30 novembre 1892, complétée par le décret ministériel du 23 novembre 1893, range l'ophtalmie des nouveau-nés parmi les maladies dont la déclaration doit être faite à l'autorité. Grâce à cette déclaration imposée à la sage-femme, le médecin pourra intervenir à temps. Ce qu'on comprend moins, c'est que cette déclaration soit également imposée au médecin par cette loi; il y a là une bizarrerie qui a très justement amené des réserves de la part de la Société française d'ophtalmologie (réunion de 1894), à la suite d'une communication du Dr Gorecki : « La déclaration à l'autorité des cas d'ophtalmie des nouveau-nés ». (*Bull. et Mém. de la Soc. franç. d'ophtalmie*, 1894.)

(**) FUCHS, *loc. cit.*

(***) *Ib.*

(IV) Dans certaines villes de notre pays, c'est un agent de la police qui vient constater les naissances, aussi bien que les décès. Est-il besoin d'insister sur ce que cette coutume a d'absurde?

quand l'infection a eu lieu pendant l'accouchement, éclate du deuxième au cinquième jour, les observations sont assez concordantes sur ce point. (Quand la blennorrhée éclate après le cinquième jour, il faut admettre, d'après Fuchs, que l'infection est postérieure à la naissance et doit être attribuée à une contamination par les doigts de la garde ou de la mère, ou par les linges et éponges imprégnés de lochies.)

On le voit, les moyens ne manquent pas, si on voulait les appliquer résolument, pour restreindre à de minimes proportions et même pour supprimer les ravages de l'ophtalmie des nouveau-nés; ils suffiraient largement à rendre impossible cette chose monstrueuse : l'enfant du pauvre et de l'ouvrier, aveugle dès sa naissance de par l'imprévoyance et l'apathie des autorités et des classes dirigeantes. Celles-ci possèdent assez de chrétiens généreux, s'ils étaient mieux instruits de ces choses, pour prendre en main cette cause de l'enfance, qui fait bien partie, ce semble, de « l'œuvre des enfants martyrs » !

Parmi les mesures qui viennent d'être passées en revue, il en est d'urgentes, d'essentielles, que l'opinion publique, saisie de cette question, devrait réclamer impérieusement, sans retard; ce sont : une réforme dans l'exercice de la profession de sage-femme dans le sens d'une surveillance plus étroite exercée sur leurs actes, d'une responsabilité plus sérieuse, mieux sanctionnée, attribuée à leurs fonctions, d'une indication plus précise de leurs devoirs : *obligation absolue* notamment *des soins préventifs de la blennorrhée infantile donnés à la mère* (irrigation vaginale avant l'accouchement) et *des pratiques de préservation immédiate appliquées à l'enfant* (lotions oculaires); obligation aussi de *faire prévenir le médecin dès l'apparition de l'ophtalmie.*

L'examen des yeux du nouveau-né imposé au médecin-visiteur devrait être également introduit dans la législation.

L'accord se ferait facilement, sans doute, dans le corps médical, sur l'opportunité de ces réformes, qui trouveraient tout naturellement leur place dans le projet de loi, en préparation actuellement, sur l'assistance publique.

L'intervention du médecin doit être assurée à l'enfant, avons-

nous dit, dès les premiers symptômes de la maladie. Mais tout médecin sera-t-il en mesure de la traiter? Oui, pour peu qu'il veuille s'initier à la pratique, fort simple d'ailleurs, de ce traitement. Il n'est pas possible de faire de celui-ci l'apanage exclusif du spécialiste; l'oculiste n'est pas toujours à portée et il y a péril en la demeure.

Il est donc indispensable, au moins dans les villes où ne se trouvent pas d'oculistes et surtout partout dans les campagnes, que tout médecin sache soigner judicieusement cette redoutable affection. Il ne se contentera pas d'instillations illusoires de collyres, il saura *retourner la paupière* (il y a pour cela un « tour » très facile à acquérir) et atteindra, avec son pinceau chargé de la solution de nitrate d'argent (à 2, 3 et 4 °/₀ selon le cas), les culs-de-sac conjonctivaux; il *répètera cette opération deux ou trois fois par jour dans les cas graves*. Les villes pourvues d'oculistes pourront d'ailleurs s'assurer de leur concours.

Est-ce tout, et suffira-t-il, pour sauver l'enfant d'une cécité partielle ou complète, de lui assurer les secours d'un médecin éclairé? Non, l'enfant doit encore être, à domicile, l'objet de soins incessants. Cette sécrétion virulente, qui se forme constamment dans les replis des conjonctives, débordant les paupières qu'elle agglutine, il faut *l'éliminer sans relâche par des lavages antiseptiques répétés* (eau boriquée, solution de sublimé ou de permanganate de potasse, etc.). Le public devrait savoir que ce pus, qui se renouvelle sans cesse, n'est pas une « humeur mauvaise qui doit se tarir d'elle-même et à laquelle il est dangereux de toucher », mais un corrosif lent mais implacable qui rongera et détruira, si l'on n'y prend garde, les cornées ou tout au moins altérera à jamais leur transparence.

Puis, le microbe, agent vivant de cette force de destruction (gonocoque?), il faut prendre garde qu'il ne soit pas transporté dans l'autre œil, si celui-ci est indemne; il faut, enfin, éviter la contamination des personnes du logis, enfants ou adultes, et surtout de celle qui pratique les lotions, contamination par des linges ou par des mains chargées de virus.

Tout cela exige de l'attention, un peu de dextérité et la con-

science bien nette de l'importance de toutes les précautions à prendre. Ces conditions se trouveront bien dans les maternités ou les asiles d'enfants trouvés, pourvus d'un personnel dressé à ces pratiques, mais au logis de l'indigent ou de l'ouvrier, qui se chargera de cette tâche? Impossible d'envoyer cet enfant de quelques jours à l'hôpital et de le séparer de sa mère. Alors, qui sera là pour exécuter les prescriptions formelles du médecin, pour faire cette « chasse au virus » qui exige une application de tous les instants? Une parente ou même une voisine secourable s'offrira souvent à s'en charger; la mère elle-même trouvera dans son amour maternel des forces que son état semblerait devoir lui refuser, pour les consacrer à son enfant menacé; et dans ces conditions si précaires, malgré la propreté douteuse du logis, des mains qui s'approchent des yeux du petit malade, des tables où les linges destinés aux ablutions trainent à côté de débris d'aliments ou d'ustensiles en désordre, malgré tout cela, l'enfant pourra échapper à l'issue redoutée. Mais trop souvent ces soins, insuffisants ou peu soutenus, seront impuissants à maîtriser le mal, on se lassera vite d'un traitement aussi assujétissant; puis, dans les milieux ouvriers, le temps est précieux, et les mains disponibles sont rares. Le virus poursuivra alors son œuvre, et la vision de l'enfant sera altérée, voire même abolie pour toujours.

Que faire à cela, dira-t-on? La bienfaisance publique officielle a procuré à son administré les secours du médecin et les agents pharmaceutiques nécessaires; peut-elle faire davantage? Non, sans doute (encore faut-il remarquer que l'ouvrier n'a souvent pas droit aux secours donnés par le bureau de bienfaisance; s'il peut trouver sans peine un médecin charitable, il n'en devra pas moins prélever sur son petit salaire de quoi suffire aux frais de pharmacie).

Mais ce que l'État ne peut faire, l'initiative privée le peut, elle! et c'est un appel à la charité que nous voudrions faire ici. La charité!

« Mère de ceux pour qui la fortune est marâtre! »,

ce n'est pas en vain qu'on l'invoque dans un pays tout imprégné de christianisme comme le nôtre, où les plus grandes

œuvres abondent, au point qu'on doit s'étonner qu'il reste encore des souffrances ignorées et privées de secours. N'est-ce pas elle qui a créé à Bruxelles cette admirable « Œuvre du Calvaire » ? C'est à ces femmes de cœur, à ces dames des classes riches, que nous nous adressons. C'est à elles qu'il appartiendrait de fonder ce qu'on pourrait appeler : « l'Œuvre du traitement à domicile de l'ophtalmie des nouveau-nés ». Ce que nous leur demandons n'est pas plus héroïque que de panser de leurs mains blanches les plaies des vieillards et des cancéreux ! Qu'elles consentent à aller s'asseoir au logis du pauvre et de l'ouvrier ! Qu'elles demandent comme une faveur à cette mère impuissante de soigner son enfant en péril, qu'elles se fassent les auxiliaires du médecin, qu'elles se penchent sur ce berceau pour écarter sans relâche de ces yeux, à peine ouverts encore à la lumière, le poison qui les brûle ! Elles s'exposeront à un danger, c'est vrai ! une distraction peut leur inoculer le virus, elles devront faire le sacrifice de leur temps et de leurs plaisirs, mais ces dangers et ces sacrifices ne sont-ils pas de l'essence même de la charité? N'est-ce pas ce don volontaire de soi-même, ce mépris de tout ce qui révolte notre sensibilité et notre égoïsme, n'est-ce pas là précisément ce que recherchent les grandes âmes?

Nous n'insisterons pas sur le détail d'une œuvre semblable, sur son organisation. Si elle est praticable, elle se fera, et nous croyons qu'elle est possible. Ce qui est certain, c'est qu'il y a là quelque chose à faire; nous ne revendiquons d'autre mérite que celui de le proclamer bien haut. Dieu fera le reste.

Depuis la présentation de cette communication à la Société scientifique de Bruxelles, la question de l'ophtalmie des nouveau-nés a suscité des débats et des travaux intéressants : M. le professeur Deneffe, qui a fait naguère une campagne éloquente, restée malheureusement sans écho, contre un autre fléau, l'ophtalmie granuleuse, a attiré l'attention du Gouvernement sur cette affection et sur l'ophtalmie des nouveau-nés (Académie de médecine, séance du 30 novembre 1895); il s'est plaint de voir négliger par les commissions médicales, dans leurs rapports, « ces deux maladies qui font chaque année de nombreuses victimes », et qui se développent « sans qu'aucune mesure ait été prise contre leur propagation ».

MM. les Drs Romiée, de Liége, et Abadie, de Paris, ont publié des considérations pratiques sur la prophylaxie et le traitement de l'ophtalmie des nouveau-nés (*La Clinique ophtalmologique*, janvier et avril 1896.)

Le Congrès annuel de la Société française d'ophtalmologie s'est encore occupé de la question lors de sa dernière réunion (mai 1896).

Un ophtalmologue américain, M. Howe, de Buffalo, y a déclaré que le seul moyen préventif efficace consistait à *forcer les sages-femmes ou les nourrices à declarer le cas dès qu'il existe le moindre soupçon de la maladie.* Il cite la loi, fort sévère, en vigueur dans l'État de New-York depuis le 1er septembre 1890, qui oblige la sage-femme ou nourrice, ayant charge d'un enfant, qui aura remarqué « qu'un œil ou les deux yeux de l'enfant étaient enflammés ou rouges, à quelque époque que ce soit dans l'intervalle de deux semaines après la naissance », *à déclarer le fait par écrit dans les six heures à l'officier de santé* ou à toute autre personne pratiquant légalement la médecine dans la ville, le bourg ou le district où résident les parents de l'enfant. *Toute infraction à cette loi est passible d'une amende de 100 dollars (500 francs) ou plus, ou d'un emprisonnement de six mois et plus, ou à la fois de l'amende et de la prison.* Cette loi a été adoptée, après l'Etat de New-York, par les huit autres Etats donnant un ensemble de population de plus de 20 millions d'habitants.

Signalons surtout le travail très complet, très scientifique et en même temps fort pratique de M. le Dr Lor, adjoint à la clinique ophtalmologique de l'hôpital Saint-Jean à Bruxelles. (*Journal médical de Bruxelles*, 2 avril 1896.) M. Lor, après avoir étudié l'étiologie et la pathogénie de la maladie, discute avec beaucoup de détails les mesures prophylactiques qui ont été proposées. Il termine par les conclusions suivantes, que nous sommes heureux de reproduire ici, car elles corroborent singulièrement et complètent les propositions que nous avons émises :

1° Antisepsie des organes de la mère..., injections vaginales antiseptiques avant tout accouchement;

2° Chez l'enfant : méthode de Crédé pure et simple;

3° Pour l'entourage : soins antiseptiques des mains avant et après tout contact avec les organes de la mère et les yeux de l'enfant. Écarter tout linge contaminé ou suspect;

4° Des instructions uniformes pour les sages-femmes de tout le pays, leur enseignant et imposant les injections vaginales *ante partum* et la méthode de Crédé (instillation préventive d'une solution de nitrate d'argent dans les yeux de l'enfant);

5° Déclaration obligatoire, pour les sages-femmes, d'un cas d'ophtalmie quelconque éclatant dans les deux semaines après l'accouchement, sous menace d'amende ou de peines à établir;

6° Distribution aux parents, au moment du mariage, d'un avis spécial sur l'ophtalmie purulente et les moyens de l'éviter, et sur les devoirs imposés aux sages-femmes.

LA
FIÈVRE GANGLIONNAIRE
EST-ELLE UNE ENTITÉ MORBIDE ?

PAR

le Dr Alexandre FAIDHERBE

Lauréat de l'Académie des sciences et de la Faculté de médecine de Paris,
Membre de la Société scientifique de Bruxelles,
de la Société des sciences médicales et de la Société anatomo-clinique de Lille.

Les premières observations de fièvre ganglionnaire ne datent pas de bien loin, puisque c'est en 1889 que Pfeiffer en donna une première description (*), bientôt suivie par une note de Starck (**) ; jusqu'ici les travaux publiés sur cette question sont encore peu nombreux et la somme d'observations rapportées est relativement peu considérable. D'autre part, les traités de médecine infantile, comme les traités récents de pathologie interne, sont muets pour la plupart sur ce sujet : à peine avons-nous pu trouver dix lignes dans le *Traité des maladies de l'enfance* de Comby (***), qui a du reste étudié depuis cette affection dans un travail particulier (IV).

Nous voudrions, dans ce travail, procéder à une revue rapide de la question et, en rapportant les cas que nous avons rencontrés personnellement, en discutant d'autre part les diverses

(*) PFEIFFER, *Jahrbuch für Kinderheilkunde*, 1889, t. XXIX, fasc. 3 et 4.
(**) STARCK, *Jahrbuch für Kinderheilkunde*, 1890, t. XXXI, fasc. 4
(***) Paris, 1895.
(IV) COMBY, *La fièvre ganglionnaire*. Paris, 1894.

observations publiées, voir s'il peut se dégager des faits actuellement connus une description d'ensemble et s'il convient de faire de la fièvre ganglionnaire une entité morbide.

I

Les cas d'inflammation aiguë du système lymphatique, indépendante d'une lésion cutanée, ont été rangés en deux catégories différentes par les auteurs qui les ont rapportés. Les uns, Pfeiffer, Starck, Hoerschelmann (*), Rembe (**), Ricci (***), Roux et Lannois (IV), Vanheuverswyn (V), Desplats (VI), Comby ont décrit des cas d'infection générale des ganglions avec phénomènes généraux plus ou moins accentués; d'autres, et notamment Neumann (VII) et Muggia (VIII), ont décrit des infections restreintes à la région cervicale, en prétendant en faire une affection différente de la fièvre ganglionnaire, du *Drüsenfieber* de Pfeiffer.

Le Dr Gourichon (IX), dans la thèse qu'il a soutenue récemment sur l'infection ganglionnaire et où il a reproduit les idées de Comby sur la question, a réuni ces deux affections, décrites séparément, et a cherché à en faire une maladie unique, expliquant

---

(*) PFEIFFER, STARCK et HOERSCHELMANN, *Jahrbuch für Kinderheilkunde*, 1894, Band XXXVIII, S. 14.

(**) REMBE, *Kinderarzt*, 1894, Band V, S. 161.

(***) RICCI, *Su due casi di febbre gangliare.* (GAZZETTA DEGLI OSPITALI E DELLE CLINICHE, 1893, semestre II, pagina 1308.)

(IV) ROUX et LANNOIS, *Adénie infectieuse due au Staphylococcus pyogenes aureus.* (REVUE DE MÉDECINE, décembre 1890.)

(V) VANHEUVERSWYN, *Infection aiguë généralisée des ganglions lymphatiques, consécutive à une inflammation pharyngo-buccale.* (JOURNAL DES SCIENCES MÉDICALES DE LILLE, 1892, t. I, p. 193.)

(VI) DESPLATS, *Note sur un cas de fièvre ganglionnaire ou d'adénite aiguë terminée par la mort.* (JOURNAL DES SCIENCES MÉDICALES DE LILLE, 1894, t. II, page 78.)

(VII) NEUMANN, *De l'inflammation aiguë idiopathique des ganglions cervicaux.* (SEMAINE MÉDICALE, 1891, p. 469.)

(VIII) MUGGIA, *Sulla linfadenite cervicale acuta nei bambini.* (GAZZETTA MEDICA DI TORINO, 1893, nº 26.)

(IX) GOURICHON, *Essai sur la fièvre ganglionnaire.* Paris, 1895.

par une gravité plus ou moins forte de l'infection les modalités diverses qui ont été signalées.

Nous croyons, et notre conviction ressort de l'étude des observations que nous allons rapporter, que la fièvre ganglionnaire peut en effet comprendre des degrés infinis d'intensité, depuis la poussée fugace d'érythème amygdalien avec infection passagère d'un ou deux ganglions, jusqu'à l'amygdalite profonde avec infection généralisée et durable de tout le système lymphatique.

II

Nos observations doivent se ranger en trois séries, afin de spécifier le moment où nous les avons recueillies. La première est un cas isolé que nous avons rencontré pendant l'été dernier.

Observation I. — Adrienne B..., 6 ans, a des antécédents pathologiques assez chargés : fièvre muqueuse avec accidents péritonéaux en septembre 1892, rougeole en mars 1894, scarlatine normale en avril 1895. Cependant elle a ordinairement un état de santé satisfaisant.

Le 17 juillet 1895, elle devient souffrante brusquement et se plaint d'un violent mal de gorge ; dans l'après-midi, saignement de nez assez abondant. Nous la voyons à 8 heures du soir et nous la trouvons très accablée, la face pourprée; respiration difficile et râlante, sans toux marquée; voix normale; température : 39°,3. Pas de catarrhe oculaire ; la narine gauche présente encore quelques croûtes sanglantes; rien dans la narine droite. La langue est fortement saburrale: les amygdales sont énormes, rouge vif, se rejoignant sur la ligne médiane, repoussant la luette en arrière et gênant la respiration. La peau ne présente pas de traces d'éruption. Rien du côté du thorax à l'auscultation ; ventre indolore, mais un peu tendu.

Cataplasmes chauds de farine de lin sur la gorge : 0gr,30 de sulfate de quinine à prendre en une fois; 0gr,25 de calomel à administrer le lendemain matin. Diète lactée.

Le 18 au matin, nous revoyons l'enfant qui a assez mal dormi, mais est pourtant moins abattue et moins chagrine que la veille; la respiration est moins difficile. Température : 38°,4. Les amygdales ont un peu diminué de volume et sont moins rouges, mais nous constatons la présence de deux ganglions assez gros et durs sous les amygdales ; en continuant l'exploration, nous trouvons un chapelet de ganglions volumineux et douloureux à la pression des deux côtés des vertèbres cervicales. Malgré leur présence, les mouvements de la tête semblent libres et indolores. Rien à l'auscultation.

Le 19, au matin, l'enfant, qui a passé une bonne nuit, est beaucoup mieux que la veille et semble revenue à son état normal. Plus de dysphagie, plus de toux. Température : 37°,8. Les amygdales ont presque repris leur volume et leur coloration habituels : les ganglions du cou et de la nuque restent engorgés et nous paraissent même avoir légèrement grossi depuis la veille; rien dans les aisselles; quelques ganglions du volume d'un gros pois à l'aine gauche.

La dose de calomel administrée la veille n'ayant produit aucun effet et la constipation persistant, nous prescrivons de donner un lavement dans la journée et, en cas de non résultat, de donner le lendemain 15 grammes d'huile de ricin.

Le 20, l'enfant paraît bien remise de son indisposition. Les ganglions engorgés restèrent gros pendant une semaine environ, et disparurent progressivement au bout de ce temps sans complication d'aucune sorte. Nous avons revu l'enfant depuis; elle ne présente plus de trace de ganglions.

Fait à noter, une sœur, âgée de 3 ans, est restée en contact permanent avec la malade pendant toute la durée de l'indisposition et n'a présenté à aucun moment de signes d'infection glandulaire; mais au mois de septembre, elle a été atteinte de scarlatine.

Comme on le voit par l'observation, il s'est agi d'un cas isolé de fièvre ganglionnaire type qui a guéri sans complication. La seconde série d'observations sera plus intéressante, tant au point de vue de la gravité de certains cas qu'au point de vue des conditions spéciales où ils se sont produits.

III

Dans les derniers jours de novembre et dans les premiers jours de décembre 1895, à la suite de temps froids et pluvieux, des cas nombreux d'influenza et de diphtérie se produisirent à Roubaix. C'est à ce moment-là que nous eûmes à examiner nombre d'enfants, plus ou moins souffrants (*) : parmi ces enfants, nous en avons trouvé seize qui présentèrent une amygdalite plus ou moins prononcée avec infection des ganglions; chez six d'entre eux, une amygdale ou les deux présentaient une rougeur légère et les ganglions sous-maxillaires seuls étaient engorgés, soit d'un seul côté, soit des deux. Nous laisserons de côté ces cas pour ne rapporter que les autres observations qui ont quelque importance.

Observation II. — Henri S..., 4 ans, bonne constitution, a eu la rougeole il y a quinze mois. Il est pris, le 3 décembre 1895, de fièvre, d'inappétence, de vomissements; passe une nuit agitée.

Nous le voyons le 4 au matin : température assez élevée; rien à l'examen des divers organes, tête, thorax, abdomen, membres. Cependant, en examinant la gorge, nous trouvons une rougeur modérée avec gonflement notable des amygdales; les ganglions sous-maxillaires sont assez volumineux et douloureux à la pression. Langue saburrale.

Diète, séjour à la chambre; une cuiller à bouche d'huile de ricin, compresses chaudes sur la gorge.

Le 5, la fièvre est tombée; la gorge est moins rouge, mais quelques ganglions cervicaux ont pris.

Le 7 décembre, l'enfant joue et mange; les ganglions sont dans le même état.

Rétablissement rapide.

(*) Une note de journal, annonçant que trois enfants, fréquentant la même école, étaient morts du croup en huit jours de temps, avait semé la panique dans la population

Observations III et IV. — Lucienne G..., 4 ans et demi; enfant bouffie, blonde, à amygdales ordinairement assez volumineuses. Antécédents chargés : entérite aiguë à dix-huit mois avec soupçons de péritonite tuberculeuse; rougeole en 1894; en mars 1895, angine pseudo-membraneuse, à bacilles de Löffler et streptocoques, guérie par le sérum de Roux.

Le 7 décembre 1895, l'enfant est prise de toux rauque et de fièvre. Nous la voyons le soir; la température est à 38°,7; la gorge est très rouge et les amygdales sont manifestement plus volumineuses que de coutume; les ganglions sous-maxillaires et cervicaux sont engorgés. Nous prescrivons des gargarismes boriqués tièdes, une potion au benzoate de soude et trois paquets d'antipyrine de $0^{gr},40$ à prendre à une heure d'intervalle.

Le 8, l'enfant, qui a mal dormi, est pourtant moins accablée que la veille : elle a demandé à manger et a bu du lait en quantité, mais elle se plaint de mal de tête et de coliques. La température est à 38°. Langue chargée; la gorge reste rouge; les ganglions déjà pris ont augmenté de volume; ceux de l'aine sont pris surtout à gauche; rien dans les aisselles. Pas de sensibilité marquée du ventre. On continue les gargarismes et on donne $0^{gr},25$ de calomel en une prise.

Le 9, l'enfant a beaucoup toussé la nuit. A l'auscultation, quelques râles muqueux, disséminés dans la partie supérieure du thorax; rien à la percussion. Pas de sensibilité du ventre. La gorge est encore assez rouge, mais les amygdales ont diminué de volume. Même état des ganglions que la veille. Potion calmante.

Du 10 au 12, même situation.

Le 13, la détente ganglionnaire commence : la toux a cessé, disparition du râle.

Le 15, les ganglions ont notablement diminué de volume, sauf le ganglion sous-maxillaire droit qui est très gros, dur et douloureux à la pression. Onctions à l'onguent napolitain et cataplasmes de farine de lin.

Le 19, les ganglions ont presque disparu, sauf le sous-maxillaire qui commence seulement à se résoudre vers la fin du mois.

Nous avons revu l'enfant vers la fin de février 1896, à cause d'une légère poussée de bronchite. Les amygdales sont toujours volumineuses et striées de veinules très accentuées, le ganglion sous-maxillaire a disparu.

Lucien G...., frère de la précédente, né le 22 janvier 1895, enfant bien portant, nourri au lait stérilisé, mais à tempérament lymphatique et à grosses amygdales, est pris de fièvre légère le 10 décembre; il mange avec moins d'appétit que d'ordinaire. Rougeur marquée de la gorge, amygdales manifestement gonflées; ganglions sous-maxillaires engorgés, quelques ganglions cervicaux à droite. Constipation.

Purgatif léger. Résolution complète en sept ou huit jours.

OBSERVATION V. — Suzanne H...., née le 25 janvier 1895, bien constituée, nourrie au lait stérilisé et toujours bien portante jusqu'alors, est prise subitement de fièvre et d'agitation le 8 décembre au soir. La nuit est assez agitée et le lendemain matin l'enfant semble éprouver quelque difficulté à boire son lait.

Nous la voyons le 9 à midi. L'enfant a la face empourprée, le front baigné de sueur. Température : 39°,4. Pas de diarrhée : deux selles normales dans la matinée. Pas de toux. Rien de spécial du côté du thorax, de l'abdomen et des membres; rien à l'auscultation. En examinant la gorge, nous trouvons les amygdales très volumineuses, rouges et comme vernissées; un petit ganglion sous-maxillaire de chaque côté.

Ne pouvant établir de diagnostic précis (1), nous prescrivons 15 centigrammes de bromhydrate de quinine en lavement.

Nous revoyons l'enfant le soir. Température : 40°,1. L'après-midi a été très difficile; l'enfant a vomi le peu de lait qu'elle a pris; elle urine fréquemment, mais peu, et son urine a une odeur âcre et piquante d'ammoniaque qui saisit violemment au nez et

(1) L'enfant habitait le quartier, foyer principal de l'épidémie de diphtérie, ce qui devait nous inspirer des craintes sérieuses.

aux yeux, et tache fortement les linges en rouge-brun. Du côté des amygdales, même aspect : ni fausses membranes ni ulcérations herpétiques. Nouveau lavement de quinine.

10 décembre. — Nuit agitée : les vomissements ont persisté. Température matin : 39°,6. En examinant l'enfant, nous sommes frappé de suite du volume énorme de la région sous-maxillaire : on a absolument l'aspect néronien des diphtéritiques à grande infection ganglionnaire. A la palpation, on sent que tous les ganglions de la région sont fortement tuméfiés, chauds et douloureux à la pression ; à la nuque, plusieurs ganglions sont pris des deux côtés, mais surtout à droite ; rien aux aisselles ni aux aines. Les amygdales sont toujours volumineuses et rouges, mais pas de trace d'affection pseudo-membraneuse.

Le diagnostic de fièvre ganglionnaire semblait s'imposer : nous prescrivons de continuer les lavements de quinine deux fois par jour et d'appliquer sur les tumeurs ganglionnaires des cataplasmes de farine de lin après onction avec

Iodure de plomb	4 grammes.
Vaseline	30 —

Température soir : la même qu'au matin.

11 décembre. — *Statu quo*, un peu de diarrhée. Température matin : 39°,7. Les paquets ganglionnaires de la nuque sont en voie d'augmentation ; quelques ganglions nouveaux aux aines et aux aisselles. Résolution vers les amygdales ; langue très chargée, noirâtre. Le ventre est douloureux à la pression dans toute sa partie médiane.

Calomel : 0gr,15 dans un peu de lait.

Température soir : 40°,3.

12 décembre. — L'enfant a été fort agitée la nuit ; elle a toussé et présenté un peu d'oppression. Diarrhée abondante et fétide. Urines toujours courtes et très ammoniacales. Sueurs abondantes tachant le linge.

Température matin : 39°,8.

Les ganglions de l'aisselle et des aines ont augmenté de

volume; ceux du cou sont stationnaires. Le ventre est dur et tendu, fort douloureux à la pression; un peu de tympanisme; gargouillement léger dans la fosse iliaque droite. A l'auscultation, quelques râles sous-crépitants et muqueux entre les omoplates; respiration un peu rude aux sommets.

Nous donnons une potion avec

Bromure de potassium	0gr,25.
Sous-nitrate de bismuth.	0gr,50.
Sirop simple	60 grammes.

Une cuiller à café d'heure en heure.

Le soir, l'enfant est toujours fort agitée; la respiration est rapide et difficile. Température soir : 40°,4. A la percussion du thorax, on constate une zone de submatité assez appréciable entre les omoplates; à l'auscultation, râles plus fournis et respiration sifflante.

En raison de la prolongation et de l'intensité de la fièvre et surtout en raison du tempérament nerveux et irritable de l'enfant (hérédité névropathique intense), nous prescrivons des enveloppements généraux à renouveler toutes les trois heures tant que la température ne descend pas au-dessous de 39° : commencer à 30° et descendre chaque fois de 2°.

13 décembre. — Même situation. Température matin : 39°,6. L'enfant a pourtant dormi par moments après ses enveloppements qui abaissent en moyenne la température d'un demi à un degré. Température soir : 40°,6 à 5 heures et demie, et 40°,9 à 10 heures. Les parents effrayés nous appellent à ce moment : rien de particulier; les tumeurs ganglionnaires sont toujours énormes; ventre très sensible; submatité et foyer de râles toujours limités au voisinage de la colonne vertébrale.

14 décembre. — Même situation. Température matin : 39°,4. Rien de particulier du côté des masses ganglionnaires. Vers 11 heures, après un nouvel enveloppement, l'enfant s'assoupit et dort jusqu'au soir, sauf deux courtes périodes où il prend du lait en assez grande quantité.

Température soir : 38°,3. La diarrhée est arrêtée depuis le

matin ; les urines sont encore fortement ammoniacales, mais beaucoup plus abondantes que les jours précédents. A la palpation, détente légère vers les masses ganglionnaires ; le ventre est encore douloureux; la submatité persiste à la poitrine, mais il y a moins de râles. Nous faisons cesser les enveloppements et la potion, mais continuer les onctions et les cataplasmes sur les paquets ganglionnaires du cou.

15 décembre. — Température matin : 37°,8. La nuit a été bonne. La tension des ganglions est fort diminuée, surtout à la nuque et aux aisselles ; sensibilité légère du ventre ; peu de submatité à la percussion du thorax ; plus de râles.

16 décembre. — Température matin : 37°,1. L'enfant est gaie, joue et prend son lait comme d'habitude. Masses ganglionnaires réduites de trois quarts, sauf à la région sous-maxillaire ; plus de sensibilité du ventre ni de signes stéthoscopiques. La langue restant chargée, nous rendons $0^{gr},15$ de calomel.

17 décembre. — L'amélioration se maintient; région sous-maxillaire fort détendue.

19 décembre. — L'enfant prend beaucoup de lait. Les ganglions de l'aisselle ont disparu ; ceux de la région sous-maxillaire, de la nuque et des aines sont encore gros comme des pois.

Du 20 au 26 décembre, amélioration persistante.

26 décembre. — L'enfant est un peu chagrine. Température soir : 38°,1. Rien qui explique cette fièvre qu'un peu de rougeur de la gorge : les ganglions sont réduits partout à la grosseur d'une lentille environ.

27 décembre. — Température matin : 37°,2 ; température soir : 37°,4. Rien de particulier.

Le 6 janvier 1896, nous sommes rappelé parce que l'enfant est un peu abattue depuis la veille et mange avec moins d'appétit. Température matin : 37°,8. La gorge de l'enfant est nette ; nous retrouvons avec peine les ganglions sous-maxillaires, surtout le droit ; les autres ganglions sont imperceptibles. Cependant, en examinant la région sus-hyoïdienne, il nous semble remarquer une légère voussure et un peu de rougeur ; la palpation ne donne rien de net. Cataplasmes chauds sur la gorge.

Le 7, la voussure et la rougeur ont beaucoup augmenté et la palpation révèle nettement l'existence d'une collection purulente. Désinfection de la région et incision horizontale : il s'écoule une cuiller à entremets de pus verdâtre, bien lié, sans odeur. Pansement au salol.

Le 8, l'enfant a dormi et pris beaucoup de lait. Pansement fortement souillé.

Le 9, suppuration médiocre.

Le 13, l'incision est cicatrisée.

Le 15, nous trouvons l'enfant abattue, la peau chaude et rouge; elle a refusé de manger, a mal dormi et s'est plainte toute la nuit. Température matin : 38°,7. La gorge est très rouge, surtout à gauche; amygdales énormes; rien à la peau Seconde infection ganglionnaire.

Température soir : 39°,9. Les ganglions de la gorge et de la nuque sont pris, surtout à gauche. Les parents, avant notre venue, ont commencé les enveloppements; nous prescrivons des onctions avec la pommade iodurée et des cataplasmes.

16 janvier. — Les ganglions déjà pris ont augmenté de volume ; ceux des aisselles et des aines sont pris à leur tour. Pas de sensibilité du ventre, rien dans la poitrine. Température matin: 39°,4; température soir: 40°,4.

17 janvier. — *Statu quo;* l'enfant est extrêmement irritable et refuse absolument de prendre du lait. Constipation; langue chargée; 0gr,15 de calomel. Température matin : 39°,9; température soir : 40°,9.

18 janvier. — L'enfant s'est endormie vers une heure du matin et au réveil a paru beaucoup mieux. Température matin : 37°,6. Les ganglions ont diminué de volume d'une manière appréciable, sauf les ganglions sous-maxillaires gauches qui restent gros, durs et douloureux. On continue les onctions et les cataplasmes à cet endroit; teinture d'iode à la nuque.

19 janvier. — L'amélioration continue.

Le 9 février, les ganglions sous-maxillaires gauches, qui avaient paru devoir se résoudre à leur tour, sont en voie de suppuration : applications d'onguent gris et de cataplasmes.

15 février. — Les deux ganglions sont complètement abcédés : incision à la partie inférieure de la collection purulente, évacuation du premier abcès et rupture à la sonde cannelée de la cloison qui sépare les deux ganglions. Environ 25 grammes de pus. Pansement au salol.

Le 3 mars, la cicatrisation est parfaite.

Nous avons revu l'enfant dans les derniers jours de mars; sa santé est très bonne; elle a beaucoup augmenté de poids.

Observations VI et VII. — André G..., 3 1/2 ans, enfant chétif, lymphatique, à amygdales très développées, a déjà eu trois attaques de laryngite striduleuse. Le 9 décembre 1895, à midi, nous sommes appelé d'urgence : l'enfant a été pris la nuit de toux rauque avec inspiration sifflante, mais le fait ne s'étant pas reproduit, on n'a pas cru devoir nous appeler. Dans la journée, l'enfant ayant toussé de nouveau et n'ayant pas voulu manger, on s'est inquiété de son état.

L'enfant est abattu et se plaint de mal à la tête; toux rauque et fréquente, respiration rapide, inspiration sifflante. Pas de fièvre. A l'auscultation, respiration rude, quelques râles sifflants et ronflants, gros râle trachéal. La gorge est d'un rouge modéré; les amygdales sont plus volumineuses que de coutume; les ganglions sous-maxillaires sont gonflés.

Repos au lit, diète lactée. Compresses chaudes sur la gorge; gargarismes boriqués tièdes, potion bromurée.

Nous revoyons l'enfant le soir. Température soir: 38°,1. Quelques petits ganglions cervicaux.

10 décembre. — L'enfant a bien reposé; cependant il a encore quelques quintes de toux. La gorge est plus rouge que la veille; les ganglions sous-maxillaires et cervicaux sont augmentés de volume. Constipation. Les urines sont rouge vif, mais ne contiennent pas d'albumine. Dans la poitrine, râles plus nombreux que la veille.

On continue les compresses chaudes et les gargarismes; un cataplasme sinapisé sur le dos; 0gr,20 de calomel.

11 décembre.— L'enfant a passé une bonne nuit et n'a toussé

que [illegible]. Il [illegible] à manger. La gorge [illegible] ; même [illegible] des ganglions [illegible] à [illegible].

12 décembre. — Les ganglions [illegible] à diminuer [illegible] ; [illegible] au [illegible].

L'amélioration [illegible] l'enfant [illegible] le 13 décembre. Les ganglions [illegible] ; les autres ont disparu. La gorge [illegible].

Germaine G..., [illegible] ans, sœur du [illegible], [illegible] au peu de fièvre le 3 décembre au soir ; rougeur légère de la gorge, ganglions sous-maxillaires engorgés. Etat saburral de la langue, constipation. Compresses chaudes sur la gorge ; [illegible].

10 décembre. — Les ganglions sous-maxillaires ont le volume d'une amande ; quelques ganglions cervicaux du volume d'un pois, surtout à gauche. Rougeur [illegible] peu [illegible].

Amélioration rapide : le 16, on trouve avec peine les ganglions sous-maxillaires.

Observation VIII. — Emile N..., 8 ans, bien portant ordinairement, se plaint de maux de tête et de fatigue le 11 décembre, il refuse de manger. Dans la journée du 12, le malaise s'accentue et l'enfant tousse un peu. Nous trouvons l'enfant très accablé, la figure empourprée, la peau chaude et sèche. Température soir : 38°,7. L'enfant a été à la selle dans l'après-midi, après administration d'un lavement ; il n'a pas vomi.

Pas de catarrhe oculaire ou nasal ; langue chargée. Vive rougeur et gonflement considérable des amygdales ; pas d'ulcérations ni de plaques ; ganglions de la gorge et de la nuque enflammés. Pas de traces d'éruption. Quelques gros ronchus à l'auscultation ; le ventre n'est pas sensible à la pression.

Nous prescrivons des onctions iodurées et des cataplasmes sur la gorge et la nuque ; trois paquets d'antipyrine de 0gr,80 à administrer d'heure en heure. Diète lactée.

13 décembre. — L'enfant a assez bien dormi et a bu du lait en quantité suffisante. Même état de la gorge et des ganglions.

Nous n'avons pas revu l'enfant qui est retourné chez ses parents.

Observation IX. — Urbain M..., 7 1/2 ans; enfant bien portant, mais lymphatique à grosses amygdales : deux angines pultacées antérieures; rougeole en 1893. Il est pris brusquement de fièvre, de toux et de difficulté de la déglutition, le 12 décembre 1895. Nous le voyons le soir. Température soir : 37°,9. L'enfant se plaint de douleur modérée de la gorge; nous trouvons en effet les amygdales légèrement augmentées de volume, mais plus rouges qu'à l'état normal, et les ganglions sous-maxillaires fort engorgés des deux côtés. A l'auscultation, quelques râles muqueux en arrière. Pas de sensibilité du ventre.

Nous prescrivons des gargarismes boriqués tièdes et des applications chaudes sur la gorge.

12 décembre. — L'enfant a beaucoup toussé la nuit et n'a pas été à la selle depuis deux jours. La rougeur de la gorge a diminué en partie; les ganglions sous-maxillaires ont le même volume, mais il existe quelques ganglions cervicaux du volume d'une amande. Dans la poitrine, râles sibilants et muqueux plus abondants que la veille.

Nous donnons 0gr,30 de calomel, potion au benzoate de soude, révulsion légère sur la poitrine; continuer les gargarismes et les compresses chaudes.

14 décembre. — La gorge a repris sa couleur normale ; les ganglions sont un peu augmentés de volume. Même traitement.

16 décembre. — Amélioration complète; la poitrine est dégagée. Les ganglions sont moins douloureux et ont un peu diminué de volume.

Observation X. — Louise D..., 6 1/2 ans : enfant à face très colorée, à tempérament sanguin, très grosse mangeuse, a depuis plusieurs jours de la fièvre, de l'agitation et des maux de tête. Quand nous la voyons, le 13 décembre 1895, elle mange beaucoup moins que d'habitude. Nous ne trouvons qu'un peu

d'état saburral de la langue; rien du côté de la gorge, mais il existe quelques ganglions, du volume d'un pois à celui d'une amande, à la région sous-maxillaire, à la nuque et aux aines. Nous prescrivons une cuiller à bouche d'huile de ricin, diète lactée, eau de Vichy; quelques badigeonnages iodés sur les chapelets ganglionnaires.

Le 15 décembre, l'enfant semble remise : les ganglions, qui ne sont point douloureux à la pression, semblent en voie de résolution.

Observation XI. — Pauline R..., 5 ans, enfant chétive, ayant eu antérieurement la rougeole (1892) et une angine pseudo-membraneuse (mai 1894), est souffrante depuis deux jours quand nous la voyons, le 14 décembre 1895 au soir. Elle a de la fièvre, de la gêne de la déglutition, une toux rauque, de l'agitation et refuse de manger; les parents craignent une nouvelle angine.

Fièvre modérée, peau rouge et chaude, pas de traces d'éruption. Les amygdales sont très grosses et rouges; les ganglions sous-maxillaires et cervicaux sont engorgés et douloureux à la pression. Rien à l'auscultation; sensibilité du ventre à la pression dans toute son étendue, fait habituel chez l'enfant, nourrie d'une manière absurde.

Gargarismes boriqués tièdes; onctions iodurées et cataplasmes sur la gorge et la nuque; diète lactée et tisane de tilleul; 0gr,25 de calomel le lendemain matin.

15 décembre. — L'enfant a dormi. Amygdales et ganglions aussi volumineux que la veille; quelques ganglions comme des amandes à l'aine. A l'auscultation, quelques râles muqueux. Même traitement.

16 décembre. — L'état de la gorge s'est amélioré; les ganglions sont moins douloureux, sans avoir diminué de volume d'une manière notable.

17 décembre. — Détente prononcée vers les ganglions; la gorge a repris son aspect normal.

Nous avons revu l'enfant en février : plus de traces de son indisposition.

IV

Enfin, tout récemment, nous avons encore rencontré des cas d'infection ganglionnaire généralisée, mais dans des conditions toutes particulières; il y a même deux observations, les quatorzième et quinzième, que nous reproduisons sous réserve, sans en faire de vrais cas de fièvre ganglionnaire et que nous discuterons plus loin.

Observations XII et XIII. — Agnès E..., 4 ans, enfant lymphatique, à amygdales moyennement hypertrophiées, devient souffrante dans la nuit du 17 au 18 mars 1896 et se plaint de la gorge; fièvre modérée (*). Nous la voyons le 18 après midi : peau chaude, visage enflammé, se plaint d'avoir peine à avaler et d'avoir mal derrière la tête; elle refuse toute nourriture solide; elle ne tousse pas.

Température soir : 38°,1. L'enfant ne présente aucune trace d'éruption ; pas de catarrhe oculaire ni nasal; langue un peu blanche. Les amygdales sont plus grosses que de coutume et assez rouges; l'examen des diverses régions ne révèle pas l'existence de ganglions engorgés. Pas de râles dans la poitrine; ventre nullement sensible.

Gargarismes boriqués tièdes ; diète lactée.

Le 19 mars, même situation. Température matin : 37°,9; température soir : 38°,3.

Le 20 mars, l'enfant a mal dormi et se plaint beaucoup plus de la nuque : nous constatons l'existence d'un ganglion sous-maxillaire gauche assez gros, dur et douloureux. Sur l'amygdale gauche, dans la partie qui regarde la luette, petite vésicule blanche très saillante. Rien de suspect ailleurs.

Nous revoyons l'enfant l'après-midi : la vésicule blanche n'a pas augmenté, mais le ganglion sous-maxillaire est gros comme une noisette.

(*) Deux cousines de cette enfant ont la scarlatine; une autre a les oreillons ainsi que sa sœur.

Température matin : 38°,2; température soir : 38°,7. Je fais donner 0gr,30 d'antipyrine à renouveler deux fois d'heure en heure en cas de besoin. Continuer les gargarismes.

21 mars. — L'enfant est toujours chagrine et inquiète; constipation. La vésicule de l'amygdale gauche a disparu, mais il en existe une sur la région antérieure médiane de l'amygdale droite. Température matin : 38°,4. Le ganglion sous-maxillaire gauche est toujours très sensible; quelques petits ganglions à la nuque. Calomel : 0gr,20.

Le soir, la température s'élève à 39°,3; poussée ganglionnaire considérable à la nuque, surtout du côté droit et à l'aine gauche. Nous prescrivons 0gr.30 de chlorhydrate de quinine en lavement.

22 mars. — L'enfant a mieux reposé. Température matin : 37°,9. Les ganglions déjà pris n'ont pas augmenté de volume, mais on en sent quelques nouveaux à l'aisselle gauche et à l'aine droite. En revanche, le ganglion sous-maxillaire a presque disparu. Rien à l'auscultation; le ventre est assez sensible à la pression.

23 mars. — Température matin : 37°,1 ; détente peu accusée vers les ganglions. L'enfant s'est levée : elle est gaie, joue et demande à manger.

Le 24 mars au matin, nous trouvons l'enfant moins bien que la veille; elle s'est réveillée plusieurs fois la nuit et a beaucoup crié. Température matin : 38°,4. Le ganglion sous-maxillaire gauche est engorgé de nouveau; rien de particulier du côté des autres. Les amygdales sont grosses et d'un rouge beaucoup plus foncé que la première fois. Rien du côté de la peau. Nous n'attachons guère d'importance à cette rougeur des amygdales, croyant simplement à une nouvelle poussée.

Le 25 mars, même état. Température matin : 38°,6. La figure de l'enfant est marbrée de plaques rouges très foncées et très étendues; la gorge a repris sa couleur rouge tendre antérieure. Scarlatine. L'éruption s'étend vers le corps dans la journée. Température soir : 39°,7.

Le 27 mars, l'éruption semble terminée; la fièvre est tombée à la normale.

5 avril.— L'exanthème a disparu presque entièrement ; à peine voit-on quelques macules. Les ganglions, qui sont restés stationnaires jusqu'aujourd'hui, semblent entrer en résolution.

9 avril. — L'enfant commence à se lever dans la chambre.

13 avril. — Les amygdales ont repris leur volume et leur coloration habituels. — Plus de ganglion sous-maxillaire bien net ; à la nuque, surtout à droite, ganglions du volume d'un pois; à l'aisselle gauche, deux ganglions du volume d'une lentille; à l'aine, des deux côtés, ganglions comme des pois.

Pas d'albumine dans les urines.

Madeleine E..., 6 ans, sœur de la précédente, a eu une angine pseudo-membraneuse en mars 1893; elle a les oreillons depuis trois jours et est isolée quand sa sœur tombe malade; le côté gauche seul est pris. État général satisfaisant.

Le 21 mars, léger accès de fièvre le soir, mal de tête assez prononcé. Température : 38°,2.

Le 22, nous constatons une rougeur et un développement accentués des amygdales; les ganglions sous-maxillaires et cervicaux sont engorgés et douloureux. Pas de traces d'éruption. Langue chargée; constipation : une cuiller à bouche d'huile de ricin.

Le 23, quelques ganglions à l'aisselle et aux aines. La rougeur de la gorge a déjà disparu.

Le 24, même situation.

Le 27, l'enfant se plaint d'être fatiguée et de n'avoir pas faim. La gorge ne présente pas de nouvelle poussée; les ganglions de la gorge et de la nuque n'ont pas varié de volume, mais, en découvrant l'enfant, nous trouvons sur la poitrine et l'abdomen deux ou trois vésicules transparentes à base rougeâtre et qui sont manifestement des boutons de varicelle.

La varicelle suit son cours normal, mais pendant environ huit jours les ganglions gardent encore le même volume; vers le 4 avril seulement, ils commencent à diminuer. L'enfant est aujourd'hui à peu près rétablie ; il reste quelques petits ganglions à la nuque.

Observation XIV. — Louise T..., 12 ans, bonne santé antérieure, est souffrante depuis huit jours quand nous la voyons, le 8 avril 1896. Elle a eu un peu de fièvre, mal à la tête, mal à la gorge; elle a aussi toussé sans que les parents s'en soient préoccupés, mais le manque absolu d'appétit de l'enfant leur semble plus inquiétant.

La langue est très chargée; du côté de la gorge, nous trouvons les amygdales et le voile du palais très rouges; sur les amygdales se trouvent plusieurs ulcérations jaune sale, découpées profondément dans le tissu amygdalien. Les ganglions sous-maxillaires sont aussi gros que la première phalange du pouce; à la nuque, plusieurs ganglions de la grosseur d'une amande; à l'aine, plusieurs ganglions de la même grosseur; à l'aisselle, quelques petits ganglions, roulant sous le doigt. Rien à l'auscultation; rien à la palpation du ventre.

Diète lactée; gargarismes boriqués tièdes; compresses chaudes. Quinze grammes de sulfate de magnésie.

Le 10 avril, la malade n'a pas eu de fièvre ces deux jours : elle se trouve mieux et demande à manger. Les ulcérations des amygdales sont détergées; les ganglions sous-maxillaires ont déjà diminué de volume. Nous faisons continuer les gargarismes et les compresses, tout en permettant de manger.

Observation XV. — Léon A..., 15 ans, au cours de la convalescence d'une fièvre typhoïde fort grave, est repris brusquement de fièvre, d'inappétence, de courbature, de douleurs d'estomac et d'intestin. La fièvre remonte à 37°,9 et 38°,4 le matin; à 39°,3 le soir; diarrhée fétide, trois ou quatre selles par jour; quelques gargouillements dans la fosse iliaque droite. Remis à la diète et soumis à l'antisepsie intestinale (benzonaphtol, bétol, tannin) et au sulfate de quinine, il fait sa défervescence au bout de huit jours. Deux jours après, il est repris de malaise et de fièvre; 38°,2 le soir, et le lendemain nous constatons que tous les ganglions sous-maxillaires, cervicaux, axillaires et inguinaux sont gros et un peu douloureux à la pression. Du reste leur résolution s'est faite lentement, sans traitement spécial et sans complication.

V

Cet ensemble d'observations permettrait de tracer un tableau complet de la fièvre ganglionnaire avec tous ses symptômes et toutes ses modalités, depuis l'infection bénigne apyrétique ou à peu près, limitée à un ou deux ganglions, jusqu'à l'infection suraiguë rapide avec hyperthermie considérable et inflammation de tous les groupes lymphatiques de l'organisme. Nous n'insisterons pas sur ce tableau clinique qui ressort de la lecture des observations et qui a déjà été tracé par divers auteurs que nous avons cités.

Il nous semble cependant utile d'insister sur le rapport manifeste qui semble exister entre ces cas de gravité diverse, parce que ce rapport a été nié par certains auteurs. Muggia, par exemple, a voulu faire de la *lymphadénite cervicale aiguë* une affection particulière qu'il rapproche des cas de Filatow et qu'il oppose au *Drüsenfieber* de Pfeiffer. De même, Neumann, en exposant à la Société de médecine de Berlin les cas qu'il avait observés en 1891, a voulu en faire une inflammation aiguë idiopathique des ganglions cervicaux, indépendante de la fièvre glandulaire.

Il nous semble que ces distinctions n'ont pas de raison d'être et qu'on peut avec raison faire une affection unique de ces divers cas.

Si l'on s'en rapporte à la description des cas observés, on voit, en effet, que l'affection semble frapper presque exclusivement les enfants et surtout les enfants en bas âge ; c'est exceptionnellement que les adolescents ou les adultes en sont atteints ; encore pouvons-nous nous demander s'il n'y pas chez les adultes une affection qui doive faire le pendant de la fièvre ganglionnaire des enfants.

Chez tous les enfants atteints, le point de départ semble avoir été le naso-pharynx ou plus spécialement les amygdales; et, dans les cas assez rares où ce point de départ n'a pas été nettement décelé, il est permis de se demander si l'amygdalite superfi-

cielle n'a pas existé effectivement, mais pendant un temps trop court pour être constatée par le médecin. Au reste, nous rappellerons, comme le Dr Gourichon, que les recherches de Schlenker et de Dobroklonsky ont montré que l'agent infectieux de la tuberculose pouvait traverser la surface saine des amygdales sans y laisser de traces de son passage, et atteindre ainsi les ganglions cervicaux ; il est certain que d'autres agents infectieux peuvent agir de même et produire ainsi une infection à distance sans déterminer de lésions apparentes primitives.

Du reste la marche progressive de l'affection montre bien qu'il s'agit simplement de différences individuelles et non de différences essentielles : chez les uns, l'infection se limite strictement aux ganglions sous-maxillaires ; chez d'autres, elle s'étend aux ganglions de la nuque, puis aux aisselles et enfin aux aines et aux ganglions viscéraux.

La durée de la fièvre dans ces cas semble être en rapport avec la marche de l'infection qui se propage par bonds successifs et rarement envahit tous les groupes ganglionnaires en même temps. La plupart du temps, la fièvre, assez élevée en raison de la réaction de l'organisme contre l'agent infectieux, diminue ou même tombe rapidement quand la barrière ganglionnaire cervicale suffit à en empêcher la diffusion dans les autres groupes.

Et cette rapidité de la terminaison de l'affection dans beaucoup de cas semble être la cause de la rareté apparente des observations de fièvre ganglionnaire dans la littérature médicale, quand au contraire leur fréquence réelle doit être considérable. La plupart du temps, en effet, les parents ne s'inquiètent pas du léger mouvement fébrile et des signes peu accusés qui accompagnent les cas minimes, et n'appellent le médecin qu'en présence des cas plus sérieux où la fièvre se prolonge et où l'embarras gastrique se montre ; aussi nous paraît-il certain qu'une foule de cas de minime importance échappent à l'attention, à moins que la coïncidence d'une épidémie grave, comme le fait s'est produit pour nous, n'éveille les craintes des parents et ne les amène à surveiller leurs enfants de plus près.

Si tapageuse que puisse être dans certains cas l'éclosion de

la fièvre ganglionnaire, il ne semble pas qu'elle soit ordinairement bien grave et qu'elle entraîne des accidents sérieux et surtout mortels. En effet, si nous relevons les cas qui ont été publiés par les divers auteurs, nous trouvons, sur 67 observations, 15 cas de suppuration, 4 cas d'albuminurie et 2 cas de mort : or, dans ces deux cas de mort, il est vraisemblable qu'un élément particulier est venu compliquer la maladie primitive.

Si du reste nous nous en rapportons à la proportion établie par Hoerschelmann, nous trouvons que, sur 16 cas, il a constaté 10 formes légères, 5 moyennes et 1 grave. Notre proportion de cas sérieux est un peu plus forte puisque, sur les 13 cas typiques de fièvre ganglionnaire, nous trouvons 1 cas grave, 5 moyens et 7 légers. Quant aux 2 autres cas, nous hésitons à en faire de vrais cas de fièvre ganglionnaire : dans l'observation XIV, il y a ce fait qui ne se trouve signalé dans aucune des observations publiées jusqu'aujourd'hui, de ces ulcérations à fond jaune sale, découpées dans les amygdales, et dans l'observation XV, le fait que cette infection ganglionnaire s'est produite au cours de la convalescence de la fièvre typhoïde, et après une rechute apparente, nous force à être très prudent dans l'interprétation des symptômes.

Un point qu'il est très important de noter, c'est que le plus souvent nous avons trouvé des lésions bilatérales des ganglions, tandis que pour Pfeiffer et Comby l'unilatéralité serait la règle; au contraire, Neumann, tout en reconnaissant que le plus souvent les ganglions d'un seul côté sont pris, dit en avoir parfois trouvé des deux côtés. Dans les cas sérieux et graves, comme ceux des observations I, V, XII et XIII, les masses ganglionnaires étaient nettement perceptibles à droite et à gauche, mais cependant un des côtés était ordinairement plus développé que l'autre; il en était de même, et nous nous en sommes assuré plusieurs fois, dans les cas rapportés aux numéros XIV et XV. Toutefois, il n'y avait pas symétrie absolue dans la répartition des masses ganglionnaires, et notamment chez Agnès E... (Obs. XII) la masse ganglionnaire de la nuque et de l'aine était plus considérable à droite, tandis que le ganglion sous-maxillaire et les ganglions axillaires prédominaient à gauche.

Quelle est la nature de la fièvre ganglionnaire? Qu'elle soit de nature infectieuse, la chose ne peut faire de doute : la marche de la maladie, la fièvre élevée et l'agitation qu'elle provoque parfois, l'abattement considérable qui peut la suivre et sa détermination spéciale sur les ganglions montrent bien qu'il s'agit là d'une infection de l'organisme. D'ailleurs les recherches bactériologiques, faites par plusieurs auteurs et notamment par Neumann, ont montré que l'agent principal était le streptocoque pyogène de Fürbringer dont la présence presque constante dans la bouche de l'enfant a été prouvée par Dornberger (*); dans certains cas cependant, le *Staphylococcus pyogenes albus* était associé au streptocoque.

Ces données bactériologiques permettent de comprendre la pathogénie de certains cas de fièvre ganglionnaire qui seraient inexplicables sans cette connaissance. Sans doute les observations de Pfeiffer, d'Hoerschelmann, de Comby, de Kisel tendent à prouver que la contagion, surtout la contagion familiale, est une des sources de la maladie, mais il nous semble que, dans bien des cas, il faut chercher chez l'enfant lui-même la préexistence du germe morbide, et cette réflexion nous amènerait à nier que la fièvre ganglionnaire soit une entité morbide bien définie.

Si l'on veut se reporter à nos observations, on verra en effet que l'une de nos malades (Obs. I) a eu la scarlatine trois mois avant d'avoir la fièvre ganglionnaire; que sa jeune sœur, restée en contact avec elle, n'a pas été contagionnée, en apparence du moins, mais que, moins de deux mois après, elle était prise à son tour de scarlatine dont nous n'avons pu découvrir la source dans le voisinage ou dans la parenté, car ce cas était tout aussi isolé que le cas de fièvre ganglionnaire de la sœur aînée. Si de cette observation nous rapprochons les observations XII et XIII, nous verrons qu'Agnès E..., ayant été en contact possible avec ses cousines qui ont la scarlatine, est prise d'abord de fièvre ganglionnaire avec manifestations herpétiques très fugaces vers

(*) DORNBERGER, *Jahrbuch für Kinderheilkunde*, Band XXXIV, S. 395.

les amygdales et ne commence la scarlatine que sept ou huit jours après; sa sœur est prise de fièvre ganglionnaire au cours des oreillons et fait ensuite la varicelle.

En continuant la revue de ces observations, nous trouvons dans les observations XIV et XV que, chez ces adolescents, le développement ganglionnaire s'est fait seulement au cours d'autres maladies infectieuses, angine gangréneuse (?) chez l'une, fièvre typhoïde à son déclin chez l'autre.

Or il est généralement admis aujourd'hui que le streptocoque est l'agent, sinon de la scarlatine, au moins de toutes les complications de cette maladie; il provoque aussi la plupart des complications suppuratives des maladies infectieuses, soit qu'il soit seul, soit qu'il soit associé au staphylocoque; enfin il se rencontre fort souvent dans les angines gangréneuses et pseudomembraneuses, soit comme agent principal, soit comme concurrent du bacille de Löffler.

Nous insistons d'autant plus sur ce point que l'accord est loin d'être fait sur la nature de la fièvre ganglionnaire. Si Comby en fait une maladie infectieuse bien déterminée, si Muggia en fait une maladie infectieuse de cause inconnue, d'autres auteurs en font des modalités particulières de maladies définies. Bronowski (*) voit dans la fièvre ganglionnaire une modalité particulière de la scarlatine et affirme l'identité de leur agent infectieux. Czajkowski (**) nie cette opinion de Bronowski parce qu'il n'a jamais vu coïncider la fièvre ganglionnaire et la scarlatine dans la même famille ni dans la même saison; au contraire, elle serait pour lui une forme particulière de l'influenza où le poison microbien agirait de préférence sur le système lymphatique.

Nous avouons que nous sommes fort disposé à accepter les théories de Bronowski et de Czajkowski en les fusionnant : nos observations semblent bien nous donner le droit d'arriver à cette conclusion que la fièvre ganglionnaire n'est pas une entité mor-

---

(*) Bronowski, in *Gazeta Lekarska*, 1893.
(**) Czajkowski, in *Gazeta Lekarska*, 1894.

bide, mais au contraire la manifestation lymphatique d'une infection pharyngienne par des germes de diverse nature.

Czajkowski n'admet pas la parenté de la fièvre ganglionnaire et de la scarlatine, parce qu'il ne les a pas vues coïncider comme saison et comme milieu ; or, nous avons fait voir que ces deux maladies peuvent se succéder chez le même individu ou chez des individus différents à intervalle assez bref pour que la persistance du germe scarlatineux puisse être admise; bien plus, nous les avons vues évoluer presque en même temps chez le même individu. Aussi l'idée de Bronowski est-elle très acceptable et mérite-t-elle d'être étudiée.

Quant à la théorie de Czajkowski, faisant de la fièvre ganglionnaire une variété de l'influenza, elle ne peut être rejetée *a priori*. D'après les observations qu'il a faites, ces deux maladies peuvent éclater en même temps ; or, si l'on se reporte à notre seconde série d'observations, on verra que les dix cas (observations II à XI) que nous y rapportons se sont produits en onze jours de temps, au moment même où l'influenza reprenait la forme épidémique à Roubaix et au seul moment de cet hiver où on en ait observé des cas abondants. De plus, si l'on analyse de près certains cas (observations III, VI, VIII, IX et XI), on verra que nous y avons signalé des signes stéthoscopiques qui ne peuvent être attribués, comme dans le cas de Suzanne H..., à la compression des bronches par les ganglions médiastiniques, mais qui sont comparables à ceux qu'on rencontre dans les cas d'influenza bénigne.

Sans doute le fait de ces diverses coïncidences a trop peu d'importance pour identifier la fièvre ganglionnaire et l'influenza, mais il nous permet de nous demander si, dans certains cas, l'infection ganglionnaire est bien idiopathique et si elle n'est pas secondaire au développement d'une autre infection bénigne qu'elle masque par son importance.

Enfin, dans un de nos cas (observation V), celui de Suzanne H..., nous serions bien porté à admettre l'explication de la fièvre ganglionnaire que donnent Starck et Séjournet : pour ces deux auteurs, la fièvre ganglionnaire n'est que la conséquence d'une auto-intoxication par troubles gastro-intestinaux.

« Pourquoi ces toxines non éliminées, non détruites, comme
» elles le sont chez les individus sains, n'iraient-elles pas, à la
» façon des principes infectieux ou virulents de certaines mala-
» dies (syphilis), de certaines fièvres (scarlatine, rougeole,
» variole), porter l'inflammation dans des ganglions éloignés qui
» les arrêtent au passage (*)? »

Dans notre observation, en effet, l'apparition des masses ganglionnaires a coïncidé avec une diarrhée fétide et une miction ammoniacale très prononcée qui montrent bien que l'organisme entier a été touché; or, si nous considérons que l'enfant, bien portante cependant, a toujours été chagrine et maigre jusqu'à l'apparition de la maladie; qu'au contraire, depuis sa guérison, elle s'est considérablement développée comme poids et a revêtu un aspect général bien meilleur que son aspect antérieur, il nous est permis de nous demander si l'allaitement artificiel, même bien conduit, n'avait pas été nuisible à cette enfant en la saturant de toxines, et si le double accès de fièvre ganglionnaire qu'elle a présenté n'a pas été le résultat de cette saturation et l'occasion d'une décharge générale de l'organisme. Cette décharge, insuffisante la première fois malgré la diarrhée, les urines et les sueurs abondantes, se serait complétée la seconde fois au grand avantage de l'enfant qui maintenant se porte bien.

En résumé, nous croyons que la fièvre ganglionnaire n'est pas une entité morbide bien définie, mais qu'elle doit être la manifestation d'infections microbiennes diverses dont la détermination se fait spécialement sur le système lymphatique.

Quant au traitement, nous serons bref. La fièvre ganglionnaire, en raison de sa bénignité ordinaire, ne réclame qu'un traitement symptomatique dans la plupart des cas ; la quinine et le calomel suffiront habituellement contre la fièvre et les phénomènes gastriques. Quant aux divers moyens employés contre l'inflammation ganglionnaire, nous croyons qu'ils sont tous inefficaces et, si nous les employons, c'est plutôt par habitude : seules, les

(*) SÉJOURNET, *De certaines adénites infantiles*. (UNION MÉDICALE DU NORD-EST, 1891.)

applications chaudes fréquemment renouvelées sur les masses ganglionnaires volumineuses nous ont paru aider leur résolution et procurer aux malades un soulagement réel.

Pourtant, dans quelques cas particulièrement sérieux, comme celui de l'observation V, nous croyons qu'un traitement plus actif est nécessaire. Nous avons dans ce cas employé les enveloppements pour combattre les effets de l'hyperthermie qui pouvaient être graves, étant donnée l'hérédité névropathique très accentuée de l'enfant : nous croyons que les enveloppements et même les bains chauds devraient dans un cas semblable être employés systématiquement dès que la maladie serait bien confirmée. Carlo Ricci a en effet obtenu de bons résultats en faisant donner deux fois par jour des bains d'un quart d'heure à 37° et en faisant ensuite rouler l'enfant dans une couverture de laine pour provoquer une sudation abondante. Cette balnéation chaude, « en favorisant l'élimination des principes » toxiques, en excitant le système nerveux et vasculaire, en » activant les échanges interstitiels », peut avoir une action favorable sur les phénomènes généraux et sur la marche de l'infection ganglionnaire.

Enfin, nous croyons que si l'existence du streptocoque était démontrée, on pourrait, dans les cas graves où le volume des masses ganglionnaires est une cause de troubles menaçants de la respiration et de la circulation, et dans ceux où il existe une albuminurie prononcée, employer légitimement le sérum antistreptococcique de Marmorek.

UN MÉDECIN THÉOLOGIEN INCONNU (1)

PAR

le Dr Alexandre FAIDHERBE

Lauréat de l'Académie des sciences, de la Faculté de médecine de Paris
et de la Société des sciences de Lille,
Membre de la Société scientifique de Bruxelles,
de la Société d'Émulation de Roubaix et de la Société d'Émulation de Cambrai.

Il semblerait téméraire d'annoncer une communication sur un médecin théologien devant beaucoup d'autres sociétés savantes, mais nous savons qu'un semblable sujet ne sera pas déplacé devant vous, et que le point peu connu d'histoire médicale belge que nous allons traiter ne vous paraîtra point ridicule. La science pour vous n'exclut point la foi, elle la complète et l'étaie, tandis qu'elle en est elle-même vivifiée et illuminée.

Vous avez ainsi continué la longue tradition des médecins belges qui, depuis six siècles, ont illustré leur patrie et rendu service à la cause du *vrai progrès* en apportant patiemment l'appoint de leurs efforts à la création de l'édifice médical, sans oublier qu'il est une science plus haute encore que celle de l'homme, la science infinie du Créateur de l'univers. Ai-je besoin de rappeler ici les noms justement vénérés des Jean de Saint-Amand, des Robert de Douai, des Despars, des Jérémie de Drivère, des de Boodt, prêtres et médecins, des Vésale, des Van Helmont, des Corneille de Baersdorp, des Montanus et de bien d'autres encore dont l'énumération serait fastidieuse?

D'autres médecins, non contents de croire à une vérité supé-

---

(1) Communication faite à la Société scientifique de Bruxelles, dans la session d'octobre 1895, à Tournai.

rieure, n'ont point voulu que leurs croyances fussent des croyances stériles.

« La foi qui n'agit point, est-ce une foi sincère? »

Ils ont cherché à défendre la religion et à en étendre l'influence; ils ont voulu faire pénétrer leurs convictions dans l'esprit de leurs contemporains et leur inspirer le respect des dogmes divins. Sans doute nous ne signerions point les écrits de tous, et cependant les ouvrages de théologie protestante qu'ont publiés les Baten et les Martin de Cleene ne nous offusquent pas plus que les écrits catholiques de de la Rue, d'Ingelbrecht, de Benoît de Bacquere, de Michel Boudewyns qui sont connus depuis longtemps.

Un autre médecin théologien a été laissé dans l'oubli, et c'est sur lui que nous voudrions attirer votre attention. Bien que deux exemplaires de son travail se trouvent à la bibliothèque de Tournai, aucun bibliographe n'a encore signalé cette production mystique. Elle n'est en effet indiquée ni dans les mémoires de Paquot, ni dans le dictionnaire d'Éloy qui ont tous deux consacré une notice à son auteur au sujet d'un travail médical; Hahn, dans le dictionnaire de Dechambre, n'a guère fait que copier ces deux auteurs, et Belval lui-même n'a pas rencontré dans ses consciencieuses recherches l'ouvrage de dévotion écrit par Perdu. Le docteur Philippart lui-même n'en fait pas mention dans sa notice sur les médecins de Tournai (*).

Aussi, profitant de la circonstance favorable que nous offrait la réunion tenue à Tournai par la Société scientifique de Bruxelles, nous avons voulu rendre justice à Benoit Perdu dans la ville même où il a vécu, travaillé... et prié.

I

Benoit Perdu (Benedictus Perdutius) naquit à Gravelines, dans la Flandre maritime, à la fin de l'année 1615 ou au début de

(*) Cf. *Mémoires de la Société historique et littéraire de Tournai*. t. XIX, p. 325.

l'année 1616. On ne sait en quelle université il fit ses études, et c'est à tort que M. Hahn le donne comme ayant étudié la médecine au collège des médecins de Tournai (*), car cette Société n'était pas un centre d'études. Les *Collegia Medica* des diverses villes belges, comme celui de Lille, étaient surtout des établissements de surveillance administrative, destinés à empêcher les médecins, les chirurgiens et les pharmaciens d'enfreindre les règlements et à les protéger contre la concurrence illégale des charlatans (**); on n'y faisait pas ses études, mais on devait s'y faire agréger pour pouvoir exercer dans la ville où ils étaient institués; ils jouaient, mais avec des attributions plus étendues et un droit légal de correction, le rôle que tendent à jouer à notre époque les syndicats médicaux.

Quoi qu'il en soit, Perdu, après avoir fini ses études de médecine et avoir été reçu licencié, vint s'établir à Tournai où il se fit agréger au collège des médecins le 26 novembre 1647; il ne fut pas un des moindres membres de cette réunion qui compta cependant dans son sein nombre d'hommes d'élite.

Perdu exerça la médecine à Tournai jusqu'à sa mort, qui survint le 5 juillet 1694 : il avait ainsi pratiqué pendant quarante-sept ans avec distinction; nous en trouvons la preuve dans sa nomination comme médecin pensionnaire. A Tournai, de même que dans la plupart des grandes villes de la région, la charge de médecin pensionnaire n'était accordée, en effet, qu'à des médecins éprouvés, exerçant depuis longtemps déjà dans la cité et ayant donné des preuves manifestes de leurs capacités et de leur zèle. Cette récompense se faisait du reste souvent attendre pendant de longues années : Benoît Perdu, par exemple, ne reçut la troisième pension que le 20 mars 1675, par conséquent à l'âge de 60 ans et après vingt-huit ans d'exercice.

Perdu se maria d'assez bonne heure, semble-t-il, puisque son fils, nommé Philippe-François, se faisait déjà agréger au collège

(*) HAHN, *Dictionnaire encyclopédique de Dechambre*. Art. *Perdu*.

(**) Voir BROECKX, *Histoire du Collegium Medicum Bruxellense*, et *Histoire du Collegium Medicum Antverpiense*.

des médecins de Tournai le 1er février 1663 : aussi avait-il fait un stage suffisamment long pour obtenir le titre de médecin pensionnaire à la mort de son père. Il en jouit du reste fort peu, puisque, nommé le 15 juillet 1694, il mourut à Tournai le 11 octobre 1702.

La famille ne semble pas, du reste, s'être éteinte avec lui et nous nous croyons en droit de rattacher à la descendance de notre sujet Benoît Perdu de Lespinois, juré de Tournai en 1789, et Charles-Philippe Perdu de Lespinois, qui fut successivement juré et administrateur municipal de 1790 à 1793.

II

Benoît Perdu a laissé un ouvrage où il a consigné nombre d'observations qu'il a recueillies dans le cours de ses vingt premières années de pratique, et où il parle notamment de la peste qui ravagea Tournai de 1646 à 1652.

C'est le *Statera sanguinis, sive disceptatio de saphenae sectione in febribus, tum in viris, tum in praegnantibus. Et de quibusdam aliis Casibus, auctore Benedicto Perdutio, medico Tornacensi. Tornaci, viduae Adriana Quinque*, 1668, in-8° de 86 pages, y compris le *Corollarium de pestis modernae* (*hodiernae*) *remedio*, qui commence à la page 79 (*).

Le but de Perdu, en écrivant cette brochure, était de prouver qu'on peut sans inconvénient ouvrir la veine saphène chez les hommes et chez les femmes, même enceintes, et il étayait sa thèse sur un certain nombre de cas qu'il rapportait d'après son expérience personnelle. Nous ne nous étendrons point, du reste, sur ce travail, mais nous nous contenterons de reproduire une épigramme que, suivant l'usage des siècles anciens, un ami de

(*) Ce *Corollarium de pestis remedio* venait d'autant plus en son temps qu'en 1668 éclatait la fameuse peste de Tournai à laquelle le titre fait allusion.

Perdu lui avait adressée pour la faire imprimer en tête de son opuscule :

Miror quam varium faciant tua nomina sensum :
Si Perdu tu sis, qui Benedictus eris.
Verum si Perdu tu es, tu es cognomine tantum;
Nomine, reque simul, tu Benedictus eris.

Il n'est pas rare, en effet, de trouver en tête des ouvrages médicaux des XVIe et XVIIe siècles nombre de poésies de ce genre, composées à la louange des auteurs et de leurs œuvres, et souvent plus subtiles que spirituelles. Dans l'épigramme à Benoit. Perdu, le fond vaut mieux que la forme, car si le jeu de mots est assez bon, les vers le sont beaucoup moins.

III

C'est quelques années plus tard que Perdu fit paraitre le petit ouvrage de théologie mystique auquel nous faisions allusion plus haut et qui rend le médecin tournaisien particulièrement intéressant.

Commençons par donner sur l'ouvrage quelques renseignements bibliographiques ; nous parlerons ensuite du fond même de ce traité. Perdu a intitulé son travail :

Le Paranymphe Eucharistique. Traité de la Communion Fréquente et de celle de chaque jour, divisé en quatre parties. Tiré de divers Autheurs par Benoît Perdu, Licentié en Médecine. A Valentiennes, de l'Imprimerie de Jean Boucher, au Nom de Jesus, 1679. Petit in-4° de 8 feuillets liminaires non numérotés, de 255 pages et de 2 feuillets terminaux non numérotés.

Les feuillets liminaires contiennent :

a) Le titre ;

b) Une invocation au Saint-Esprit à qui Perdu dit : « Voiez un petit vermisseau de terre, qui dans les ténèbres de son néant, tâche d'élever tant soit peu ses foibles regards vers votre lumière inaccessible, pour luy offrir un bégayement d'enfant sur un

sujet si relevé, qu'il surpasse l'éloquence des plus éclairés Séraphins...

» ...Vous pouvez avec justice nous punir par la privation d'un si grand bien, comme il est arrivé aux Peuples d'Angleterre, de Genève, de Hollande, de Zelande, de Danemarck, etc...»

c) Un avis au lecteur où l'auteur explique les raisons qui l'ont poussé à publier cet ouvrage. Appelé par son ministère dans plusieurs communautés religieuses, il s'étonnait d'y rencontrer de « très-bonnes et très-saintes Ames » qui communiaient rarement par ordre de leur confesseur, sous prétexte « qu'il y falloit des dispositions, que l'on a que rarement ». Trouvant ces sentiments peu conformes aux desseins de Dieu, Perdu étudia les auteurs sacrés et en tira l'ouvrage qu'il se risqua à présenter au public. Il se défend du reste d'oser exposer ses propres idées, tant il est pénétré de son insuffisance, et s'excuse de n'avoir point dans son style « la politesse du temps, ny la douceur que recherchent les delicats ».

d) Une pièce de vers résumant le but de l'ouvrage et dont nous nous permettons de citer une strophe, si médiocre qu'en soit la facture :

O Divine Eucharistie,
Très grand miracle des Cieux :
O divin Arbre de vie,
Don de Dieu très-précieux :
Vous estes mon espérance,
Vous estes tout mon support;
Muny de votre assistance,
Ie ne craindray pas la mort.
. . . .

Bien que ces vers ne portent pas de signature, nous tendons à croire qu'ils sont de Perdu lui-même : en effet, lorsque les poésies, imprimées en tête des ouvrages, provenaient d'un ami de l'auteur, elles portaient au moins une dédicace à celui-ci. En tout cas, si cette poésie donne à Perdu le droit de prendre place dans le Parnasse médical flamand, elle ne lui vaudra certainement point la couronne.

e) Un avant-propos où Perdu expose le but de son livre après

avoir défini le Saint Sacrement et la Sainte Communion : il prétend par charité pour son prochain « luy découvrir un thrésor qu'il ne connoit peut estre pas assés bien ».

f) Une approbation, datée de Valenciennes, le 23 septembre 1678, et signée par le dominicain frère Jean Turu, docteur en théologie et censeur des livres.

IV

L'ouvrage est divisé en quatre parties, contenant quarante-quatre chapitres, où Benoit Perdu traite respectivement des causes de l'institution et des effets de la Sainte Eucharistie ; de la fréquente communion et de celle de chaque jour ; de la communion sacramentelle et de la spirituelle ; enfin des raisons qui doivent pousser à communier fréquemment.

Nous ne pouvons, on le comprend, analyser l'ouvrage chapitre par chapitre : ce serait un travail fastidieux, et il nous suffit d'apprécier le traité dans son ensemble. Toutefois, pour le faire connaître d'une manière assez complète, il n'est pas inutile de citer les titres des principaux chapitres, parce que cette courte énumération donnera une idée exacte du plan que l'auteur avait adopté pour traiter son sujet.

PARTIE PREMIÈRE.

CHAPITRE Ier. — L'amour de Dieu envers les hommes est la cause de l'institution du Saint Sacrement.

CHAPITRE III. — La présence de Nostre Seigneur dans l'Eucharistie nous est maintenant plus utile, que la présence sensible ne l'estoit aux hommes lorsqu'il conversoit sur la terre.

CHAPITRE VII. — Les grands biens que nous acquerrons par la Communion fréquente.

PARTIE SECONDE.

CHAPITRE IX. — Il ne faut pas laisser de communier souvent à cause de nos faiblesses spirituelles et cheutes fréquentes.

CHAPITRE XI. — Le progrès en la vertu se fait plus facilement et plus manifestement par la Communion fréquente, que par des penitences et par des austérités.

PARTIE TROISIÈME.

CHAPITRE II. — La Communion réelle surpasse de beaucoup la Communion spirituelle.

CHAPITRE VI. — Les séculiers et imparfaits ont plus grande nécessité de communier souvent que les religieux.

CHAPITRE IX. — La Sainte Eucharistie est la fontaine et gardienne de la chasteté et continence.

PARTIE QUATRIÈME.

CHAPITRE III. — De ceux qui ne font pas de profit de leurs Communions.

CHAPITRE VI. — Contre ceux qui disent qu'ils sont trop adonnés aux vices, qu'ils n'ont pas la dévotion, que Dieu ne les y appelle pas, que le monde en parleroit.

CHAPITRE IX. — De la préparation absolument nécessaire.

Benoit Perdu a, comme on le voit, développé méthodiquement son sujet, de manière à arriver tout naturellement à ses conclusions. Du reste, il ne fait pas seulement preuve d'un talent réel d'exposition; son ouvrage est encore un témoignage durable de son érudition et prouve suffisamment que notre médecin avait étudié sérieusement la question et ne se risquait pas à écrire à la légère sur des matières si délicates. Nous n'énumérerons point cependant tous les écrivains dont s'est inspiré Perdu, car ce serait encombrer notre travail sans grand intérêt pour le lecteur.

V

Perdu a largement mis à contribution les Pères de l'Église et les théologiens des siècles postérieurs, et pourtant il ne faut point croire que le *Paranymphe eucharistique* soit une simple

compilation, faite à coups de livres et n'ayant d'autre valeur que celle des citations. Ce serait, en effet, une étrange erreur. On sent en le lisant que Perdu était bien au courant de la question qu'il traitait et que, habitué de longue date à méditer les vérités religieuses, il n'avait point dû se lancer d'emblée dans l'examen d'un problème si grave et si digne d'attention. On sent que notre auteur était d'avance un chrétien sincère et instruit, pour qui les spéculations théologiques n'étaient pas un monde nouveau.

Peut-être s'en émerveillera-t-on dans notre siècle où tant de chrétiens ne le sont que de nom et prennent si peu de soin d'approfondir les grandes leçons de la religion? Il n'en était point ainsi au dix-septième siècle, à cette époque magnifique qui eut certes ses défauts et ses vices, mais qui avait aussi de si grandes et sublimes qualités. C'était le temps où les hommes les plus éminents croyaient, mais raisonnaient leurs croyances et ne rougissaient pas de prendre part aux discussions religieuses.

Certes ils se trompaient parfois (ceci va nous ramener à notre sujet), et l'on sait quelle fut la lamentable erreur de Port-Royal, entraîné à la remorque des Jansenius et des Arnauld. Le jansénisme, produit par une réaction violente contre des doctrines trop faciles et entretenu par l'orgueil des savants auteurs qui l'acceptèrent, était cependant une preuve de la vivacité des croyances religieuses de l'époque; malheureusement ses fondateurs ne surent point écouter la voix du Docteur infaillible et causèrent ainsi à la foi catholique un mal immense dont les ravages plus ou moins apparents se font encore sentir à notre époque. Moins accessible à la masse que le protestantisme, parce que, bien loin de faire appel aux vils instincts de la bête, le jansénisme voulait, au contraire, une perfection chimérique, la doctrine nouvelle influa beaucoup sur les esprits cultivés : peut-être ne serait-il pas difficile de déceler la part qu'elle eut dans le mouvement encyclopédique du dix-huitième siècle et dans les lois attentatoires à la religion, promulguées au début de la Révolution.

La Flandre et les provinces voisines, plus qu'aucun autre pays,

ont souffert des résultats de cette hérésie dont le rigorisme absurde eut pour effet d'éloigner bien des fidèles de la Sainte Table. Des prêtres et des religieux, inspirés par cet esprit, se pénétraient d'un respect outré pour la Sainte Eucharistie et interdisaient la communion fréquente à leurs pénitents, sous prétexte qu'ils ne pouvaient être suffisamment préparés à s'approcher de la table sainte. Ce fut un vrai désastre pour la foi et c'est contre ces malheureuses tendances que Benoît Perdu crut devoir écrire le livre dont nous parlons ici.

Il analyse avec beaucoup de soin les causes diverses qui poussent les hommes à s'abstenir de la réception des sacrements : la mollesse, l'indifférence et la lâcheté des uns, la complaisance des autres dans leurs vices habituels, les scrupules légitimes, mais excessifs, de quelques-uns et la crainte de n'être pas dans des dispositions suffisantes pour recevoir dignement la sainte hostie. Il réfute toutes ces raisons avec talent. Il prouve que c'est aux faibles, au contraire, de rechercher cet élément de force dans la pratique des vertus et dans le bon combat; il montre que c'est aux défaillants et à ceux qui sont plus exposés aux occasions de tomber, à demander fréquemment par la communion le secours et la grâce de Dieu. Aussi les laïques doivent-ils communier bien plus souvent que les religieux, qui sont moins exposés aux dangers du monde.

Il convient toutefois que cette réception du Saint Sacrement ne doit pas devenir une habitude machinale, mais qu'elle doit être raisonnée; celui qui veut communier souvent doit se préparer soigneusement, ou plutôt sa vie ne doit être, par sa décence et sa discrétion, qu'une préparation à la communion.

Ces idées que Perdu expose dans son livre furent du reste confirmées peu après par un décret d'Innocent XI, daté du 12 février 1679, par lequel le Pape « approuve et loüe la communion fréquente et quotidienne moyennant qu'elle fut faite avec préparation digne ». Perdu, heureux de voir sa thèse étayée par une autorité si éminente, s'empressa de faire imprimer le bref en question à la fin de son ouvrage.

Le *Paranymphe Eucharistique* eut un grand succès lorsqu'il

parut : il fut, en effet, réimprimé deux fois, entre autres à Liége en 1685. La valeur de Perdu était même tellement établie que le libraire Hovin ne crut pas nuire à ses propres intérêts en dédiant au médecin tournaisien une traduction de l'ouvrage du père Jean Falconi, religieux espagnol de l'ordre de la Mercy, intitulé : « Notre pain quotidien qui n'est autre que le très saint Sacrement de l'autel... »

Je ne compte pas que ma communication, bien imparfaite d'ailleurs, ait le succès de l'ouvrage qui l'a inspirée, mais je vous remercie cependant de la bienveillante attention que vous m'avez accordée : elle m'a permis de mettre en lumière l'existence d'un homme qui, dans un rang modeste, a su honorer notre profession.

IDENTITÉ
DES PLANS DE RIEMANN
ET
DES SPHÈRES D'EUCLIDE

PAR

M. G. LECHALAS,

Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées.

Chacun sait que la trigonométrie des plans de Riemann est identique à celle des sphères d'Euclide et qu'il y a de même identité entre la trigonométrie des plans de Lobatchefsky et celle des pseudo-sphères, surfaces euclidiennes étudiées par Beltrami. Il n'en a pas fallu davantage pour que certains adversaires des géométries non euclidiennes aient cru pouvoir plaisanter leurs partisans, en prétendant que leur découverte se réduisait à un changement dans les noms des surfaces. Les géomètres non euclidiens n'ont pas manqué de protester contre cette assertion et de soutenir énergiquement la distinction des surfaces que l'on prétendait confondre.

Cependant un philosophe aux allures indépendantes et aux intuitions parfois géniales, M. Delbœuf, reprit la thèse des euclidiens, mais en en transformant complètement la portée : pour lui, plans de Riemann et plans de Lobatchefsky ne sont bien que des sphères euclidiennes, mais envisagées dans des espaces à trois dimensions différents du nôtre et dans lesquels elles présentent des propriétés également différentes (*).

(*) Voir *Revue philosophique* d'avril 1894, pp. 373 à 377 (*L'Ancienne et les nouvelles géométries*).

L'idée nous parut profonde et mériter le plus sérieux examen. Pour qu'on puisse admettre l'identité de deux surfaces, une première condition est nécessaire, à savoir l'identité de leurs géométries propres, c'est-à-dire abstraction faite de tout espace à trois dimensions dans lequel elles seraient contenues. Or, cette condition permet d'écarter immédiatement l'identité des pseudo-sphères et des plans de Lobatchefsky, car les géodésiques des premières se coupent deux à deux un nombre infini de fois, et celles des derniers une seule fois ; par deux points d'une pseudo-sphère il passe de même une infinité de géodésiques, au lieu d'une géodésique unique ; et enfin, si le déplacement d'une figure s'opère, en un sens, sans déformation sur une pseudo-sphère, cette propriété n'est pas absolue, car le déplacement peut faire naitre ou évanouir certaines intersections, ou seulement changer les points où elles se produisent et les angles qu'elles engendrent.

On peut, il est vrai, faire évanouir ces différences en considérant une pseudo-sphère sur laquelle une infinité de feuillets seraient enroulés et en faisant abstraction des intersections résultant de la superposition des divers feuillets : c'est ainsi qu'on peut considérer un cylindre de révolution comme ayant identiquement la géométrie du plan. Mais cet artifice, intéressant assurément, ne saurait permettre de poser l'identité des surfaces. Ajoutons que l'arc de géodésique qui joint deux points d'une pseudo-sphère est plus long que la droite euclidienne, alors que celle-ci est plus longue elle-même que toute droite de Lobatchefsky allant également de l'un de ces points à l'autre ; mais cette considération oblige à sortir de la surface étudiée.

A l'égard des sphères euclidiennes et des plans de Riemann, rien de tel ne peut être objecté : les géométries de ces deux classes de surfaces, considérées en elles-mêmes, exclusivement comme des espaces à deux dimensions, sont absolument identiques.

Ce fait ne saurait toutefois constituer une preuve de l'identité de ces surfaces elles-mêmes, car il est parfaitement conciliable avec l'apparition de propriétés différentes dans un même espace à trois dimensions : ainsi en est-il du plan et des cylindres

à directrice ouverte, comme les cylindres paraboliques, dont les géométries à deux dimensions ne diffèrent nullement. Aussi n'avons-nous été convaincu que par des considérations complémentaires présentées par M. Delbœuf, considérations que nous allons reprendre en leur donnant un développement analytique, mais qui nous parurent immédiatement démonstratives, la possibilité de ce développement étant évidente pour nous.

Fort de cette conviction, nous avons exposé à notre tour la thèse de M. Delbœuf, réduite au cas des plans de Riemann et des sphères d'Euclide, dans notre *Étude sur l'espace et le temps* (*). Le cadre de cet ouvrage ne comportait d'ailleurs pas le développement analytique qui aurait pu être utile, et, en tout état de cause, nous pensions bien que cette conception soulèverait des objections, à moins qu'elle ne passât inaperçue.

Nous sommes reconnaissant à M. Mansion de nous avoir fourni l'occasion de reprendre cette question avec plus d'ampleur, en critiquant notre manière de voir dans un compte rendu, d'ailleurs beaucoup trop bienveillant, de notre ouvrage, qu'il a publié dans la *Revue des questions scientifiques* (**).

Disons tout de suite pour quel motif la raison invoquée à l'appui de cette critique ne nous paraît aucunement convaincante.

La sphère euclidienne, dit M. Mansion, a un centre unique, ce qui n'est pas le cas pour un plan riemannien. Or, la propriété invoquée est évidemment relative à l'espace à trois dimensions dans lequel on considère la sphère, et nous aurons simplement à voir si elle subsiste lorsqu'on envisage cette surface dans l'espace à trois dimensions ayant mêmes géodésiques qu'elle ; dans cet espace, nous devrons exactement retrouver les propriétés des plans de Riemann (***).

Au risque d'être un peu long, mais afin de préparer le terrain et de faciliter l'interprétation géométrique du développement

---

(*) Page 34.

(**) Janvier 1896, pp. 266 et suiv. ; voir spécialement p. 269.

(***) Nous devons dire que, dans le tirage à part de son compte rendu, M. Mansion a supprimé l'argument tout en maintenant la critique.

analytique que nous allons présenter, nous réduirons d'abord d'une unité le nombre des variables, parce qu'ainsi nous ne sortirons pas de la géométrie euclidienne la plus élémentaire.

Dans un espace à trois dimensions euclidien, c'est-à-dire ayant la droite euclidienne pour géodésique, soit la sphère :

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

que nous coupons par le plan $x = 0$; la courbe d'intersection est le cercle $y^2 + z^2 = R^2$. Si maintenant je rends ce plan mobile autour de l'axe des z, en lui donnant pour équation $x = y$ tang α, la courbe d'intersection restera la même, quel que soit α, en raison de la parfaite symétrie de l'équation de la sphère, et ainsi du reste qu'on le vérifierait facilement au moyen d'un changement de coordonnées qui ferait du plan sécant le nouveau plan des yz (*).

Il résulte de là que, lorsque le plan sécant tourne autour de l'axe des z, le grand cercle qu'il détermine constamment sur la sphère engendre celle-ci, et l'on peut ajouter que, lorsque α est égal à π, chaque moitié du grand cercle vient en coïncidence avec la position primitive de l'autre moitié (**) : il y a eu retournement du cercle. Ce retournement, d'ailleurs, au lieu d'être considéré comme résultant de la rotation d'un plan autour de l'axe des z dans l'espace à trois dimensions, peut être regardé comme opéré par une rotation sur la sphère elle-même autour des points où cet axe perce cette surface,

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = \pm R.$$

On peut donc dire que le cercle est une ligne retournable

(*) Les formules de transformation seraient

$$x = x' \cos\alpha + y' \sin\alpha,$$
$$y = -x' \sin\alpha + y' \cos\alpha,$$
$$z = z'.$$

(**) Ceci résulte immédiatement de la symétrie de l'équation du cercle.

autour de deux de ses points, sur les sphères dont il est grand cercle.

Remarquons d'ailleurs que, pendant la rotation, les points situés sur le plan des xy ont décrit le grand cercle $x^2 + y^2 = R^2$ et sont, durant tout le mouvement, restés à une distance constante $\frac{1}{2}\pi R$ des deux points autour desquels s'est effectuée la rotation : un grand cercle a donc deux centres sur la sphère, auxquels répondent deux rayons égaux. Tout point, à une distance βR d'un des centres de rotation, décrit également un cercle ayant aussi deux centres, mais auxquels répondent des rayons inégaux, βR et $(\pi - \beta)R$, ayant πR pour somme. La parfaite symétrie de l'équation de la sphère montre la généralité de ces propriétés.

Nous allons prendre maintenant une variable de plus, et nous demandons qu'on veuille bien nous suivre, sans préoccupation sur le point d'arrivée et les conclusions à tirer de ce que nous établirons, mais en contrôlant simplement l'exactitude de la géométrie que nous développerons (*).

Dans un espace euclidien à quatre dimensions, c'est-à-dire ayant la droite euclidienne pour géodésique, l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 + v^2 = R^2,$$

représente un espace à trois dimensions que nous appellerons sphérique. Dans cet espace d'ailleurs, une équation du premier degré représente un espace euclidien à trois dimensions, et celui qui a pour équation $x = 0$ coupe l'espace sphérique suivant la sphère

$$y^2 + z^2 + v^2 = R^2,$$

qu'on peut appeler *grande sphère*, car tout autre espace, tel que $x = a$, déterminerait une sphère de plus petit rayon :

$$y^2 + z^2 + v^2 = R^2 - a^2.$$

(*) Le principe de l'exposé qui suit nous a été indiqué par notre ami, M. Calinon.

Rendons mobile l'espace $x = 0$ autour du plan des vz, en changeant son équation en : $x = y$ tang α; la sphère d'intersection restera la même en raison de la parfaite symétrie de l'équation de l'espace sphérique et ainsi du reste qu'on le vérifierait facilement au moyen d'un changement de coordonnées qui ferait de l'espace sécant celui des nouveaux axes des y, des z et des v (*). Il résulte de là que, lorsque l'espace sécant tourne autour du plan des zv, la grande sphère qu'il détermine dans l'espace sphérique engendre celui-ci, et l'on peut ajouter que, lorsque α est égal à π, chaque moitié de la sphère vient en coïncidence avec la position primitive de l'autre moitié : il y a eu retournement de la sphère. Ce retournement, d'ailleurs, au lieu d'être considéré comme résultant de la rotation d'un espace euclidien à trois dimensions dans un espace également euclidien à quatre dimensions, peut être regardé comme opéré dans l'espace sphérique à trois dimensions lui-même, autour du grand cercle suivant lequel le plan des zv coupe cet espace sphérique :

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z^2 + v^2 = R^2.$$

On peut donc dire que la sphère est une surface retournable autour de ses grands cercles, dans les espaces sphériques à trois dimensions dont elle est grande sphère.

Pendant cette rotation autour d'un des grands cercles, chaque point de la sphère reste à des distances constantes de chacun des points de ce grand cercle; si donc nous considérons un des points de celui-ci et le grand cercle dont il est le centre (ou le pôle), tous les points de la surface engendrée par ce grand cercle seront également distants de lui et formeront une sphère dont il sera un centre, mais qui en aura un second, à savoir le second centre du grand cercle générateur. Les deux rayons de cette grande sphère seront tous deux égaux à $\frac{1}{2}\pi$ R. Si au lieu d'un grand cercle, nous prenons un petit cercle, il engendrera une petite sphère ayant deux rayons βR et $(\pi - \beta)$R.

(*) Les z et les v ne changent pas, et les formules de transformation des x et des y sont celles que nous avons vues précédemment.

Les propriétés dont jouissent ainsi les sphères euclidiennes dans les espaces sphériques à trois dimensions sont exactement celles des plans ou des sphères de Riemann, suivant que l'on considère une grande sphère ou une petite sphère dans l'espace sphérique. Il est bien évident d'ailleurs que, les formules riemanniennes à deux dimensions étant identiquement celles de la géométrie sphérique euclidienne, leur généralisation par l'introduction d'une troisième variable doit forcément conduire aux formules des espaces sphériques à trois dimensions.

Si l'on peut qualifier « euclidienne » une sphère, pour exprimer qu'elle peut être située dans un espace euclidien à trois dimensions, nous pouvons qualifier de même nos espaces sphériques, puisque nous les avons précisément déterminés au sein d'un espace euclidien à quatre dimensions. Ces qualifications n'empêchent pas qu'on puisse dire très justement que, dans un espace sphérique à deux ou à trois dimensions, tout est sphérique; mais il n'en est pas moins vrai que ces espaces contiennent certaines figures, les cercles et les sphères, qui leur sont communes avec les espaces euclidiens à deux et à trois dimensions. Seulement, les propriétés de ces figures communes diffèrent profondément quand, sortant d'elles-mêmes, on les envisage dans un espace euclidien ou dans un espace sphérique. Sur l'espace euclidien à deux dimensions, le cercle n'est ni géodésique ni retournable et n'a qu'un centre; sur un espace sphérique à deux dimensions, il a deux centres et peut être géodésique et retournable. De même, dans un espace euclidien à trois dimensions, la sphère n'est pas retournable et a un centre unique; dans un espace sphérique à trois dimensions, la sphère a deux centres, et elle y est retournable lorsqu'elle a même géodésique que lui. *Or, dans l'un et l'autre cas, cercles et sphères sont bien identiques, puisque nous les avons obtenus en coupant les espaces sphériques à deux et trois dimensions par des espaces euclidiens à deux et trois dimensions : c'est la superposition sous sa forme la plus immédiate.*

La conclusion de tout cela est simple : les plans et sphères de Riemann sont des sphères identiques à celles d'Euclide, et ses

espaces à trois dimensions sont des espaces sphériques susceptibles d'entrer dans un espace euclidien à quatre dimensions.

M. Mansion, dans les lettres qu'il a bien voulu nous écrire, parle des espaces sphériques à trois dimensions euclidien, riemanniens et lobatchefskiens; mais il ne saurait les distinguer les uns des autres plus qu'il ne le fait pour les sphères : tout ce qui est possible, c'est de placer ces espaces sphériques dans des espaces à quatre dimensions euclidien, riemanniens et lobatchefskiens, ce qui fera sans doute apparaître des propriétés distinctes, mais propriétés relatives à ces divers espaces à quatre dimensions et n'établissant aucune distinction entre les espaces sphériques.

Si, dans un de ces derniers espaces, on prend cinq points quelconques, leurs dix distances vérifient la relation riemannienne, du moment qu'on les a mesurées dans cet espace, c'est-à-dire suivant les arcs de grand cercle qui en sont les géodésiques; mais, si on les mesure suivant des droites euclidiennes, lesquelles ne peuvent entrer dans cet espace sphérique, ces distances vérifient naturellement la relation euclidienne de Lagrange, puisqu'on s'est ainsi placé dans l'espace euclidien déterminé par ces cinq points.

Nous croyons avoir bien marqué en quel sens nous admettons cette proposition que « tout est euclidien dans un espace euclidien, riemannien dans un espace riemannien », comme nous l'a écrit M. Mansion. Il semble que, pour lui, cette proposition ait un sens beaucoup plus absolu et signifie qu'aucune figure euclidienne ne peut entrer dans un espace riemannien, et réciproquement. De là résulterait d'abord l'impossibilité de comparer les distances de deux points dans un espace riemannien et un espace euclidien, puisque, en l'absence d'une unité commune, ne pouvant être fournie que par une ligne entrant dans les deux espaces, l'application des formules correspondantes ne saurait fournir des résultats comparables. Logiquement d'ailleurs, cette interprétation, erronée selon nous, devrait être poussée beaucoup plus loin, la même impossibilité, comme nous l'a fait remarquer M. Mansion lui-même à la suite de la communica-

tion de la remarque précédente, devant être étendue aux figures de deux espaces riemanniens (ou lobatchefskiens) de paramètres différents (*).

De là, nous pensons qu'on devrait conclure l'impossibilité de distinguer deux espaces riemanniens, comme deux espaces lobatchefskiens, l'un de l'autre, car deux espaces de même nature ne diffèrent que par les valeurs données à un paramètre, et, ce paramètre étant une longueur (ou le carré d'une longueur suivant les formules adoptées), on ne peut le déterminer que par une mesure dans l'espace correspondant : si aucune communication n'existe d'un espace à l'autre, aucune comparaison n'est possible entre les paramètres. On ne saurait plus dès lors que prendre le paramètre pour unité, ainsi que l'a fait Lobatchefsky.

M. Mansion a trouvé une réponse ingénieuse, mais non démonstrative selon nous, à ces réflexions. Si, dit-il, on mesure sur une sphère euclidienne (**) les côtés d'un triangle rectangle isocèle, avec un arc de grand cercle quelconque pris pour unité, et si l'on trouve 45, 45 et 60 pour mesures des trois côtés, le paramètre ou rayon de la sphère doit vérifier la relation

$$\cos\left(\frac{45}{x}\right)\cos\left(\frac{45}{x}\right) = \cos\left(\frac{60}{x}\right),$$

d'où l'on tire :

$$x = \frac{180}{\pi}.$$

Si ensuite un autre observateur, mesurant le même triangle, trouve 45, 45, 59, le paramètre y sera donné par la relation

$$\cos\left(\frac{45}{y}\right)\cos\left(\frac{45}{y}\right) = \cos\left(\frac{59}{y}\right),$$

(*) L'espace euclidien étant la limite commune des espaces riemanniens et lobatchefskiens dont les paramètres croissent indéfiniment, il n'y aurait aucune raison pour poser l'exclusion de toute figure commune entre lui et les espaces de ces deux classes, si l'on admettait la communauté de figures entre les divers espaces d'une même classe malgré la différence de leurs paramètres.

(**) On sait que, pour nous, les sphères de tous les espaces sont identiques quand elles ont même courbure.

et sa valeur sera plus petite que x : de là l'idée de paramètres différents; mais nous pouvons être assurés que, cette idée ne pouvant avoir de base rationnelle dans l'hypothèse faite, une hypothèse contraire s'est glissée subrepticement dans le raisonnement. Or, on nous parle de rayon, ce qui suppose toute une théorie de la sphère dans un espace à trois dimensions où les rayons sont comparables; à supposer même qu'on ne parlât que de paramètres dont on cherche la valeur, l'interprétation en serait tout autre si l'on s'en tenait à la notion de sphères entre lesquelles toute comparaison de longueurs serait impossible.

A s'en tenir, en effet, à la sphère sur laquelle ils se trouvent, la recherche expérimentale de nos deux observateurs se réduit à ceci : trouver le rapport qui existe entre l'arc pris pour unité et la longueur x figurant dans les formules. S'ils obtiennent deux valeurs différentes, c'est que l'un au moins s'est trompé ; mais, dit-on, cela leur fait concevoir que, sur une autre surface, x pourrait avoir une autre valeur. Or, pour que x y eût une autre valeur, il faudrait que l'on pût comparer les longueurs de cette autre surface à notre unité, et c'est précisément ce que l'on s'est interdit. Cette unité n'a de sens que sur la surface où elle est prise : c'est une certaine fraction de la géodésique totale et ce n'est que cela; sur toute autre sphère, il en sera de même. La véritable conclusion à tirer par l'observateur maladroit et ne croyant pas l'être serait qu'il n'est pas sur une sphère, car il ne saurait concevoir d'autres sphères où son unité de mesure serait contenue dans la géodésique totale un plus ou moins grand nombre de fois.

En terminant cette discussion, nous dirons quelques mots d'une suite naturelle au désaccord sur les espaces de Riemann. Dans ceux de Lobatchefsky entrent des sphères de toute courbure, notamment des sphères de courbure nulle, qu'on appelle horisphères et dont la géométrie est exactement celle du plan euclidien, à l'exception des propriétés qui, supposant la retournabilité, sont relatives à l'espace à trois dimensions dans lequel on envisage ces surfaces. Pour nous, sphères et horisphères sont des sphères et des plans d'Euclide transportés dans un espace à

trois dimensions. On établirait d'ailleurs cette proposition par le procédé employé ci-dessus pour les plans de Riemann. Toutefois, comme certaines figures des espaces de Lobatchefsky, notamment leurs géodésiques, ne peuvent entrer dans un espace euclidien, quel que soit le nombre de ses dimensions, c'est dans un espace de Lobatchefsky à quatre dimensions qu'il faudrait placer un espace euclidien à trois dimensions, de même que, tout à l'heure, nous placions un espace sphérique à trois dimensions dans un espace euclidien à quatre dimensions.

On pourrait à ceci faire une objection : vous prenez un espace de Lobatchefsky à quatre dimensions, et vous y introduisez, dites-vous, un espace euclidien à trois dimensions où l'horisphère est retournable; en réalité, vous n'introduisez qu'un espace isométrique de l'espace euclidien. L'objection est irréfutable, en ce sens que nous ne pouvons distinguer un espace euclidien d'un autre espace ayant même géométrie; cela est si vrai qu'on n'arrive jamais qu'à faire des géométries générales, convenant à tous les espaces isométriques. Ce qu'on démontre donc, c'est l'identité deux à deux des sphères et des plans de tous les espaces qui vérifient la géométrie euclidienne avec les sphères et les horisphères de tous les espaces vérifiant la géométrie de Lobatchefsky. Il serait aisé de montrer que, de même, nous n'avons d'abord prouvé que l'identité deux à deux des surfaces sphériques des espaces vérifiant la géométrie d'Euclide avec les sphères et les plans de même courbure des espaces vérifiant la géométrie de Riemann.

SUR

LA NON-IDENTITÉ DU PLAN RIEMANNIEN

ET

DE LA SPHÈRE EUCLIDIENNE

PAR

P. MANSION,

Professeur à l'Universite de Gand.

Bien que nous trouvions irréprochables les calculs de M. Lechalas, dans sa note intitulée : *Identité des plans de Riemann et des sphères d'Euclide*, nous ne pouvons admettre la conclusion finale que l'auteur en tire. Pour faire comprendre la raison de notre dissentiment, nous devons remonter aux principes mêmes de la géométrie générale.

La droite euclidienne est, par définition, telle qu'elle vérifie à la fois les postulats 5 et 6 d'Euclide, savoir : « (5). Deux droites d'un plan se rencontrent si elles font d'un même côté avec une transversale des angles intérieurs dont la somme est inférieure à deux droits. (6). Deux droites ne peuvent enclore un espace. » Dans un triangle rectangle euclidien, on a entre les nombres a, b, c qui mesurent l'hypoténuse et les côtés, la relation fondamentale

$$a^2 = b^2 + c^2 \qquad \text{(E)}$$

L'espace euclidien est caractérisé par une relation de Lagrange, qui se déduit de (E) et que nous appellerons (E′), entre les dix distances mutuelles de cinq quelconques de ses points. On peut définir analytiquement de même un espace euclidien à quatre

dimensions, par une relation (E″) entre les quinze distances mutuelles de six quelconques de ces points.

La droite lobatchefskienne est, par définition, celle qui ne vérifie que le postulat 6 d'Euclide. Dans un triangle rectangle lobatchefskien, on a une relation de la forme

$$\mathrm{Ch}\left(\frac{a}{l}\right) = \mathrm{Ch}\left(\frac{b}{l}\right)\mathrm{Ch}\left(\frac{c}{l}\right), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{L})$$

où l est un paramètre numérique dont rien, en géométrie théorique, ne détermine la valeur. Un espace lobatchefskien à trois (ou quatre) dimensions est caractérisé par une relation qui se déduit de (L) et que nous appellerons (L′) [ou (L″)], entre les dix (ou les quinze) distances mutuelles de cinq (ou six) quelconques de ses points.

La droite riemannienne est, par définition, celle qui ne vérifie que le postulat 5 d'Euclide. Dans un triangle rectangle riemannien, on a une relation de la forme

$$\cos\left(\frac{a}{r}\right) = \cos\left(\frac{b}{r}\right)\cos\left(\frac{c}{r}\right), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{R})$$

où r (comme l dans le cas précédent) est un paramètre numérique dont rien, en géométrie théorique, ne détermine la valeur. Un espace riemannien à trois (ou quatre) dimensions est caractérisé par une relation qui se déduit de (R) et que nous appellerons (R′) [ou (R″)], entre les dix (ou les quinze) distances mutuelles de cinq (ou six) quelconques de ses points.

Cela posé, considérons dans un plan euclidien, lobatchefskien ou riemannien, deux axes rectangulaires. Soient α, β, ρ les distances d'un point du plan à ces axes et à leur point de rencontre. L'équation d'un cercle sera

$$x^2 + y^2 = \mathrm{R}^2,$$

dans les trois systèmes de géométrie, pourvu que l'on suppose

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad \mathrm{R} = \rho$$

en géométrie euclidienne;

$$x = \mathrm{Sh}\left(\frac{\alpha}{l}\right), \quad y = \mathrm{Sh}\left(\frac{\beta}{l}\right), \quad \mathrm{R} = \mathrm{Sh}\left(\frac{\rho}{l}\right)$$

en géométrie lobatchesfkienne;

$$x = \sin\left(\frac{\alpha}{r}\right), \quad y = \sin\left(\frac{\beta}{r}\right), \quad \mathrm{R} = \sin\left(\frac{\rho}{r}\right)$$

en géométrie riemannienne.

Dans ce dernier cas, si $\mathrm{R} = 1$, on obtient comme cercle-limite la droite riemannienne. La droite riemannienne jouit de la propriété d'avoir deux centres; la distance de l'un quelconque de ses points à l'un de ces centres (l'origine des coordonnées) est la même que la distance de ce point à l'autre centre (point opposé à l'origine).

Considérons, dans un espace euclidien, lobatchefskien ou riemannien, trois plans rectangulaires. Soient α, β, γ, ρ les distances d'un des points de cet espace à ces plans et à leur point d'intersection. L'équation d'une sphère sera

$$x^2 + y^2 + z^2 = \mathrm{R}^2,$$

pourvu que l'on suppose

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad z = \gamma, \quad \mathrm{R} = \rho,$$

en géométrie euclidienne;

$$x = \mathrm{Sh}\left(\frac{\alpha}{l}\right), \quad y = \mathrm{Sh}\left(\frac{\beta}{l}\right), \quad z = \mathrm{Sh}\left(\frac{\gamma}{l}\right), \quad \mathrm{R} = \mathrm{Sh}\left(\frac{\rho}{l}\right),$$

en géométrie lobatchefskienne;

$$x = \sin\left(\frac{\alpha}{r}\right), \quad y = \sin\left(\frac{\beta}{r}\right), \quad z = \sin\left(\frac{\gamma}{r}\right), \quad \mathrm{R} = \sin\left(\frac{\rho}{r}\right),$$

en géométrie riemannienne.

Dans ce dernier cas, si $\mathrm{R} = 1$, on obtient, comme sphère-limite, le plan riemannien. Le plan riemannien jouit de la propriété d'avoir deux centres. La distance de l'un quelconque de ses points à l'un de ces centres (l'origine des coordonnées) est

la même que la distance de ce point à l'autre centre (point opposé à l'origine).

On conçoit de même ce que signifie, en analyse, un espace sphérique à trois dimensions, situé dans un espace à quatre dimensions, euclidien, lobatchefskien ou riemannien, et défini par une relation de la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + v^2 = R^2,$$

x, y, z, v, R ayant encore une signification différente, dans les trois cas, que nous supprimons pour abréger. Dans le cas où $R = 1$, on obtient, comme espace sphérique limite riemannien, l'espace riemannien à trois dimensions, lequel a, dans l'espace riemannien à quatre dimensions, deux centres qui sont situés à la même distance d'un point quelconque de cet espace.

Les propriétés qui constituent la géométrie de la circonférence considérée sur la sphère de même rayon, celle de la sphère considérée dans l'espace sphérique de même rayon, sont les mêmes que celles de la droite dans le plan riemannien, du plan riemannien dans l'espace riemannien. En effet, ces propriétés ne dépendent pas de la valeur de R; elles subsistent donc pour $R = 1$. En particulier, un cercle de rayon R sur une sphère de rayon R a deux centres équidistants sur cette sphère, une sphère de rayon R, dans un espace sphérique de rayon R, a deux centres équidistants dans cet espace sphérique, les distances étant comptées sur des circonférences de rayon R. A cause de cela, M. Lechalas dit que le plan riemannien est *identique* à une sphère d'Euclide (ou de Lobatchefsky).

Nous ne pouvons admettre cette proposition de M. Lechalas, à moins qu'elle ne se réduise à une tautologie.

En effet, la définition d'une circonférence, d'une sphère, d'un espace sphérique d'Euclide ou de Lobatchefsky *implique* la considération du centre de cette circonférence, de cette sphère ou de cet espace sphérique, la distance de ce centre aux points de ces diverses figures étant comptée suivant des droites euclidiennes ou lobatchefskiennes, tandis que les distances, dans

la géométrie propre de ces figures, sont comptées suivant des circonférences. Or, la droite riemannienne, le plan riemannien, l'espace riemannien ont deux centres, symétriques par rapport à ces figures : les distances de ces centres aux points de ces figures sont comptées sur des droites riemanniennes, comme les distances considérées dans la géométrie propre de ces figures.

Ces propriétés sont différentes de celles des figures correspondantes d'Euclide ou de Lobatchefsky, si on les considère avec leur centre, et alors la proposition de M. Lechalas nous semble inexacte.

Si, au contraire, on considère ces figures sans leur centre, elle revient à cette identité : La géométrie du plan et de l'espace de Riemann est la même que celle de la sphère et de l'espace sphérique d'Euclide ou de Lobatchefsky, pourvu que, dans cette dernière géométrie, on mesure les distances sur certaines lignes tracées sur la sphère ou dans l'espace sphérique, ces lignes ayant dans cet espace les mêmes propriétés que les droites de Riemann. En réalité, dans ce cas, aucune propriété justifiant l'emploi des mots *d'Euclide* ou *de Lobatchefsky* n'intervient dans la définition de la sphère ou de l'espace sphérique considéré; au contraire, par définition, cette sphère et cet espace sphérique sont le plan et l'espace de Riemann (*).

En résumé, le plan riemannien peut être considéré comme identique à la sphère euclidienne, si l'on n'étudie que les propriétés intrinsèques de ces surfaces; mais par le fait qu'on les qualifie d'euclidienne et de riemannienne, on leur attribue des propriétés extrinsèques qui les différencient.

(*) On peut concevoir des espaces de Riemann et de Lobatchefsky de divers paramètres de la manière suivante : Si l'on connaît b, longueur rapportée à une certaine unité, du côté d'un triangle rectangle isoscèle déterminé, dont on ignore s'il est euclidien, riemannien ou lobatchefskien, on pourra supposer, avant toute mesure, que la longueur a de l'hypoténuse a n'importe quelle valeur, égale, inférieure ou supérieure à $b\sqrt{2}$. Cela implique la possibilité de valeurs en nombre infini pour r et l, mais non la possibilité de comparer des longueurs dans deux espaces différents.

RECHERCHES ANALYTIQUES

SUR

LA THÉORIE DES NOMBRES PREMIERS

PREMIÈRE PARTIE

LA FONCTION $\zeta(s)$ DE RIEMANN ET LES NOMBRES PREMIERS EN GÉNÉRAL

PAR

CH.-J. DE LA VALLÉE POUSSIN
Professeur a l'Université de Louvain.

CHAPITRE PREMIER.

OBJET DE LA PREMIÈRE PARTIE DU MÉMOIRE. RAPPEL DE QUELQUES FORMULES CONNUES (*).

1. *Première définition de la fonction* $\zeta(s)$. — La fonction dont nous allons nous occuper est la fonction définie par les relations

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \Pi \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

où la somme s'étend à tous les nombres entiers naturels, le produit à tous les nombres premiers successifs. Ces formules supposent que la partie réelle de s que nous désignerons par

(*) Riemann, *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.* Werke (Leipzig, 1866), pp. 136 et suiv. — Hadamard, *Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann.* Journal de mathématiques, 1893.

$\Re(s)$ est supérieure à l'unité. La somme et le produit infini sont alors absolument et uniformément convergents pour $\Re(s) > 1 + \varepsilon$, quelque petit que soit le nombre positif ε, et représentent, par conséquent, une fonction uniforme et synectique de s pour $\Re(s) > 1$.

2. *Objet de la première partie du mémoire.* — La formule

$$\zeta(s) = \Pi\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

montre déjà que la fonction $\zeta(s)$ ne peut s'annuler pour $\Re(s) > 1$, car le produit infini est convergent dans cette hypothèse. Mais on ne peut pas en conclure que la fonction ne puisse s'annuler pour une valeur de la forme

$$s = 1 + \beta i,$$

dans laquelle $\Re(s) = 1$, car, pour une valeur semblable, la série

$$\sum \frac{1}{p^{1+\beta i}},$$

étendue aux nombres premiers, n'est pas absolument convergente, et il devient difficile de reconnaître si elle a une valeur finie. Dès lors, on ne peut affirmer, sans démonstration nouvelle, que le produit infini ne tend pas vers zéro, quand on fait tendre s vers une valeur de cette forme. A notre connaissance même, cette démonstration n'a pas été faite jusqu'à présent. L'objet essentiel de cette partie du mémoire sera de la fournir. Nous établirons donc avec une entière rigueur que la fonction $\zeta(s)$ n'a pas de racines de la forme $1 + \beta i$, et nous en déduirons quelques conséquences asymptotiques importantes pour la théorie des nombres premiers.

Auparavant, nous allons rappeler quelques résultats bien connus aujourd'hui et qui seront indispensables dans la suite.

3. *Expression de* $\zeta(s)$ *pour* $\Re(s) > 0$. — Les formules (1) ne sont valables que pour $\Re(s) > 1$. Il convient donc d'en trouver d'autres capables de fournir le prolongement analytique de la fonction. On en obtient une qui peut être utile (*) par le raisonnement très élémentaire que voici :

On a par une simple intégration par parties, portant sur dx :

$$\int_0^1 \frac{dx}{(n+x)^s} = \frac{1}{(n+1)^s} + s\int_0^1 \frac{x\,dx}{(n+x)^{s+1}}.$$

La substitution de cette valeur de $(n+1)^{-s}$ dans l'expression de $\zeta(s)$ pour $\Re(s) > 1$, donne

$$\zeta(s) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^s} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^1 \frac{dx}{(n+x)^s} - s\int_0^1 \frac{x\,dx}{(n+x)^s}\right].$$

Cette expression se simplifie, parce que l'on a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 \frac{dx}{(n+x)^s} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1},$$

et il vient finalement

$$(2)\quad \cdot\ \cdot\quad \left\{\begin{aligned} &\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s\sum_1^{\infty}\int_0^1 \frac{x\,dx}{(n+x)^{s+1}}, \\ &\frac{\zeta(s)}{s} = -\left[\frac{1}{1-s} + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 \frac{x\,dx}{(n+x)^{s+1}}\right]. \end{aligned}\right.$$

La série du second membre est absolument convergente, pourvu que $\Re(s)$ soit plus grand que zéro. Le second membre de l'équation (2) nous fournit donc une définition de $\zeta(s)$ applicable à toute la portion du plan située à droite de l'axe imagi-

(*) J'ai déjà utilisé cette formule dans un mémoire présenté récemment à l'Académie royale de Belgique : *Démonstration simplifiée du théorème de Dirichlet sur la progression arithmétique.*

naire. On peut en déduire immédiatement plusieurs conséquences importantes :

1° La fonction $\zeta(s)$ est méromorphe pour $\mathcal{R}(s) > 0$ et possède, dans cette région, un pôle unique et simple $s = 1$;

2° Si l'on attribue à s une valeur réelle, positive, intermédiaire entre zéro et un, le second membre de l'équation (2) sera négatif et $\zeta(s)$ ne pourra s'annuler ;

3° Si $\zeta(s)$ possède des racines dont la partie réelle est plus grande que zéro, ces racines seront nécessairement imaginaires et conjuguées deux à deux.

4. *Relation fonctionnelle de Riemann* (*) *et Schlömilch. Définition de* $\zeta(s)$ *pour* $\mathcal{R}(s) < 0$. — La fonction $\zeta(s)$ satisfait à une relation fonctionnelle qui constitue la propriété la plus remarquable de cette fonction et qui est la suivante :

$$(3) \quad \ldots\ldots \zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s}\cos\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s)\zeta(s).$$

Cette relation, comme le remarque Riemann, peut s'exprimer par ce fait que la fonction

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$$

reste invariable par le changement de s en $1-s$.

La formule (3) achève de définir $\zeta(s)$ comme fonction uniforme de s dans tout le plan, car elle exprime $\zeta(s)$ pour $\mathcal{R}(s)$ négatif, en fonction de $\zeta(s)$ pour $\mathcal{R}(s)$ positif, qui est une fonction connue.

La formule (3) peut aussi se mettre sous la forme

$$\frac{\zeta(1-s)}{\zeta(s)} = \frac{2}{(2\pi)^s}\cos\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s),$$

(*) *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.* WERKE (Leipzig, 1876), pp. 136 et suiv.

et elle renferme des conséquences importantes relatives aux zéros de $\zeta(s)$. Le second membre de la dernière équation devient infini si s est égal à zéro ou à un nombre pair négatif $-2m$, et il ne le devient que dans ce cas. Donc si l'on suppose $\mathfrak{R}(s) < 0$, $\zeta(1-s)$ ne pouvant s'annuler, on voit que $\zeta(s)$ n'aura que des racines réelles comprises dans la formule

$$s = -2m.$$

Nous les appellerons les *racines réelles* de $\zeta(s)$. En dehors de celles-là, toute racine de $\zeta(s)$ devra être aussi une racine de $\zeta(1-s)$. Donc $\zeta(s)$ ne pourra plus avoir que des racines imaginaires conjuguées deux à deux (n° 3, 3°) et dont la partie réelle doit être comprise entre *zéro* et *un* (limites non exclues jusqu'à présent). Nous les appellerons les racines imaginaires de $\zeta(s)$ et nous y reviendrons dans un instant.

5. *Définition de la fonction* $\xi(t)$. — Riemann ramène la fonction $\zeta(s)$ à une fonction plus simple, qu'il désigne par $\xi(t)$. Celle-ci est *holomorphe* dans toute l'étendue du plan et elle est liée à $\zeta(s)$ par la relation

$$(4) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{aligned} & s = \frac{1}{2} + ti \\ & \xi(t) = \frac{s(s-1)}{2}\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}. \end{aligned} \right.$$

La fonction $\xi(t)$ peut être définie directement, pour toute valeur de t, par la formule

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & \xi(t) = \frac{1}{2} - \left(t^2 + \frac{1}{4}\right)\int_1^\infty \psi(x) x^{-\frac{3}{4}} \cos\left(\frac{t}{2}\log x\right) dx \\ & \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x}. \end{aligned} \right.$$

La formule (4) met aussi en pleine lumière le caractère analytique de $\zeta(s)$ et en fait connaître les principales propriétés. Elle

nous montre que si $\zeta(s)$ a des racines imaginaires, elles doivent correspondre à des racines de $\xi(t)$. Cette formule ramène donc l'étude des zéros de $\zeta(s)$ à celle des zéros de $\xi(t)$, sur lesquels nous allons porter maintenant notre attention.

6. *Existence des racines de* $\xi(t)$. — La fonction $\xi(t)$ possède une infinité de racines, que l'on désigne en général par la lettre α et dont l'existence a été mise hors de doute par M. Hadamard dans un mémoire fondamental (*).

La formule (5) montre que $\xi(t)$ est une fonction paire de t; par conséquent, les racines α de $\xi(t)$ seront deux à deux égales et de signes contraires. La loi de croissance des modules de ces racines est d'une extrême importance. Cette loi soupçonnée par Riemann a été rigoureusement démontrée par M. Hadamard et peut s'exprimer comme il suit :

Supposons que l'on range les racines α (deux à deux égales et de signes contraires) par ordre de modules croissants

$$(\alpha_1, -\alpha_1), \quad (\alpha_2, -\alpha_2), \quad \dots \quad (\alpha_p, -\alpha_p), \quad \dots$$

et désignons par ρ_p le module de α_p, ρ_p vérifiera une relation de la forme

$$\rho = k \frac{p}{\log p},$$

dans laquelle k reste compris entre deux limites positives indépendantes de p. On a, en particulier,

$$k > \frac{4 - \varepsilon}{e}.$$

Nous aurons à utiliser ce résultat, mais sous une forme un peu différente. On conclut de ce qui précède que la série

$$\frac{1}{\rho_1^m} + \frac{1}{\rho_2^m} + \dots + \frac{1}{\rho_p^m} + \dots,$$

(*) *Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann.* JOURNAL DE MATHÉMATIQUES, 1893.

étendue à tous les modules successifs des racines α, est *absolument* convergente pourvu que l'on ait $m > 1$ (l'égalité étant exclue). Or il est clair que ce résultat subsistera sans changement, si les quantités ρ_p au lieu d'être les modules des racines de $\xi(t)$ représentent les modules des racines correspondantes de $\zeta(s)$, car, ces racines étant liées par la relation

$$s = \frac{1}{2} + ti,$$

leurs modules seront des quantités du même ordre de grandeur.

7. *Genre de la fonction* $\xi(t)$. *Expressions de* $\xi(t)$ *en produit infini et de* $\log \xi(t)$ *en série.* — M. Hadamard déduit des résultats précédents que la fonction $\xi(t)$ est du genre zéro en t^2, c'est-à-dire qu'elle peut se développer en un produit de facteurs primaires

$$\xi(t) = \xi(0) \Pi \left(1 - \frac{t^2}{\alpha^2}\right),$$

sans aucun facteur exponentiel. On sait d'ailleurs que ce produit sera uniformément convergent dans toute région déterminée du plan.

On tire de l'équation précédente

$$(6) \quad . \; . \; . \; . \; \log \xi(t) = \log \xi(0) + \sum_\alpha \log \left(1 - \frac{t^2}{\alpha^2}\right).$$

Nous avons intérêt, pour simplifier l'écriture, à exprimer le second membre au moyen de la variable s, et la chose est facile. On a, en effet,

$$\log\left(1 - \frac{t^2}{\alpha^2}\right) = \log\left(1 + \frac{-t}{\alpha}\right) + \log\left(1 - \frac{-t}{\alpha}\right)$$
$$= \left[\log i(\alpha - t) - \log \alpha i\right] + \left[\log i(-\alpha - t) - \log(-\alpha i)\right],$$

et, par la substitution

$$-it = \frac{1}{2} - s,$$

cela se réduit à

$$\log\left(1-\frac{t^2}{\alpha^2}\right)=\log\left(\frac{1}{2}-s+\alpha i\right)+\log\left(\frac{1}{2}-s-\alpha i\right)-\log\alpha^2$$

$$=\log\left(1-\frac{s}{\frac{1}{2}+\alpha i}\right)+\log\left(1-\frac{s}{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)+\log\frac{\alpha^2+\frac{1}{4}}{\alpha^2}.$$

Substituons ce résultat dans la formule (6). Nous obtiendrons le développement suivant, qui sera absolument et uniformément convergent dans toute région ne contenant pas de racines :

$$(7)\qquad \log\xi(t)=C+\sum_{\alpha}\left[\log\left(1-\frac{s}{\frac{1}{2}+\alpha i}\right)+\log\left(1-\frac{s}{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)\right].$$

8. *Expression correspondante de* D log $\zeta(s)$. — Remarquons d'abord que la formule (7) peut se mettre sous une forme plus simple et beaucoup plus avantageuse au point de vue qui nous occupe. Les quantités $\left(\frac{1}{2}+\alpha i\right)$, $\left(\frac{1}{2}-\alpha i\right)$ ne sont autre chose que les racines imaginaires de $\zeta(s)$. Dans toute la suite du mémoire, nous conviendrons de représenter ces racines tout simplement par la lettre ρ. La formule (7) peut alors s'écrire

$$(8)\quad .\ .\ .\ .\quad \log\xi(t)=C+\sum_{\rho}\log\left(1-\frac{s}{\rho}\right),$$

pourvu que, dans cette somme, on range les racines ρ dans le même ordre que les racines α dans l'équation (7). Pour cela, il suffit de les ranger par ordre de modules croissants, de manière à introduire simultanément celles qui auraient le même module.

Revenons maintenant à la formule (4) qui s'écrit encore

$$\xi(t)=\frac{s-1}{2}\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}.$$

On en tire

$$\log\zeta(s)=\frac{s}{2}\log\pi-\log\frac{s-1}{2}-\log\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)+\log\xi(t),$$

et, par la formule (8),

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \log \zeta(s) = C + \frac{s}{2}\log \pi - \log \frac{s-1}{2} \\ - \log \Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right) + \sum_{\rho} \log\left(1-\frac{s}{\rho}\right). \end{aligned} \right.$$

Différentions cette équation, ce qui se fait sans difficulté à cause de l'uniformité de la convergence. Il vient

$$(10) \quad \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{1}{2}\log \pi - \frac{1}{s-1} - D \log \Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right) + \sum_{\rho} \frac{1}{s-\rho}.$$

C'est la formule qui va jouer le rôle essentiel dans notre démonstration, et il nous était indispensable de rappeler comment elle s'obtient. La somme Σ du second membre s'étend à toutes les racines imaginaires de $\zeta(s)$ rangées par ordre de modules croissants, et il s'agira plus tard de prouver qu'aucune de ces racines n'est de la forme $1+\beta i$.

9. *Racines multiples hypothétiques de* $\zeta(s)$. — Rien ne permet d'affirmer jusqu'à présent que la fonction $\zeta(s)$ n'a pas de racines multiples. S'il y avait une racine ρ multiple, il faudrait dans la somme Σ de la formule (10) répéter le terme $\frac{1}{s-\rho}$ un nombre de fois égal à l'ordre de multiplicité de cette racine.

On peut toutefois montrer, dès à présent, que si, par impossible, une racine ρ était de la forme $1+\beta i$, elle ne pourrait pas être multiple.

La formule (1) donne, en effet, pour $\mathcal{R}(s) > 1$,

$$D \log \zeta(s) = -\sum \frac{lp}{p^s - 1} = -\sum \frac{lp}{p^s} - \sum \frac{lp}{p^s(p^s-1)}.$$

D'autre part, la théorie des fonctions nous apprend que l'ordre de multiplicité λ d'une racine ρ est égal à l'expression

$$\lambda = \lim_{s=\rho} (s-\rho) D \log \zeta(s),$$

qui se réduit par la décomposition précédente, pour $\Re(s) > 1$, à

$$\lambda = \lim_{s=\rho}\left[-(s-\rho)\sum\frac{lp}{p^s}\right].$$

Si $\rho = 1 + \beta i$, on aura donc

$$\lambda = -\lim_{\varepsilon=0}\varepsilon\sum\frac{lp}{p^{1+\beta i+\varepsilon}}.$$

Nous savons aussi que le point $s=1$ est un pôle *simple* de $\zeta(s)$, et que, par conséquent,

$$1 = -\lim_{s=1}(s-1)\,\mathrm{D}\log\zeta(s) = \lim_{\varepsilon=0}\varepsilon\sum\frac{lp}{p^{1+\varepsilon}}.$$

Or, tous les termes de cette dernière somme sont les modules des termes de la somme qui intervient dans la valeur de λ. Donc λ ne peut surpasser cette somme, et comme celle-ci est égale à l'unité, $s=\rho$ ne peut être qu'un zéro simple.

CHAPITRE II.

CALCUL ET PROPRIÉTÉS DE PLUSIEURS INTÉGRALES DÉFINIES.

---

§ 1. — *Étude de l'intégrale* $\frac{1}{2\pi i}\int_{a-bi}^{a+bi} y^s\frac{ds}{s+k}$.

10. L'intégrale dont nous allons nous occuper dans le paragraphe actuel est bien connue, et ses propriétés, quand b tend vers l'infini, sont une source féconde de transformations analytiques dont nous allons profiter. Les géomètres qui les ont utilisées n'ont pas toujours pris les précautions nécessaires pour ne laisser flotter aucun doute sur l'exactitude des résultats qu'ils ont obtenus. C'est ainsi que l'on rencontre souvent des changements d'ordre d'intégration, et des intégrations de série terme

par terme, même entre des limites infinies, qui ne sont pas justifiées, et dont la justification, parfois inabordable, est souvent plus difficile que les auteurs ne semblent le supposer (*).

Afin de prévenir le même reproche, nous allons, dans ce paragraphe, déterminer les limites supérieures de l'intégrale en question dans différentes hypothèses qui se présenteront plus tard. Nous commencerons par la ramener à une autre, qui est étroitement liée à la théorie des séries de Fourier et dont les propriétés sont plus faciles à dégager.

11. Théorème. — *Désignons par* s *une variable imaginaire, par* a, b *et* y *des quantités réelles, enfin par* k *une quantité réelle ou imaginaire mais telle que l'on ait*

$$\Re(a+k) > 0;$$

je dis qu'on aura la relation

$$(1) \quad \ldots \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{a-bi}^{a+bi} y^{s}\frac{ds}{s+k} = \frac{1}{\pi}y^{-k}\int_{-\infty}^{ly} e^{(a+k)t}\frac{\sin bt}{t}\,dt.$$

Démonstration. Posons la relation

$$f(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-bi}^{a+bi} y^{s+k}\frac{ds}{s+k}.$$

On en tire, en différentiant,

$$f'(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-bi}^{a+bi} y^{s+k-1}ds = \frac{1}{\pi}y^{a+k-1}\frac{\sin bly}{ly}.$$

(*) Je vise tout particulièrement ici l'ouvrage de M. P. Bachmann, excellent à d'autres points de vue, *Die analytische Zahlentheorie*. Leipzig, 1894. — La thèse de M. Cahen *Sur la fonction* $\zeta(s)$ *de Riemann* (Paris, 1894) soulève les mêmes critiques.

Dans l'hypothèse faite sur $a + k$, $f(0) = 0$; par conséquent, la relation précédente donnera par intégration

$$f(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^y y^{a+k-1} \frac{\sin bly}{ly} \, dy.$$

Enfin, en changeant la variable d'intégration par la relation $ly = t$, il vient

$$f(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{ly} e^{(a+k)t} \frac{\sin bt}{t} \, dt,$$

et cette équation équivaut à l'équation (1).

12. On déduit sans peine du second théorème de la moyenne que l'on a

1° pour $y > 1$, $$\lim_{b=\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{ly} e^{(a+k)t} \frac{\sin bt}{t} \, dt = 1;$$

2° pour $y = 1$, $$\lim_{b=\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{ly} e^{(a+k)t} \frac{\sin bt}{t} \, dt = \frac{1}{2};$$

3° pour $y < 1$, $$\lim_{b=\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{ly} e^{(a+k)t} \frac{\sin bt}{t} \, dt = 0.$$

On en conclut que l'on a aussi

1° pour $y > 1$, $$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} y^s \frac{ds}{s+k} = y^{-k};$$

2° pour $y = 1$, $$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} y^s \frac{ds}{s+k} = \frac{1}{2} y^{-k};$$

3° pour $y < 1$, $$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} y^s \frac{ds}{s+k} = 0.$$

C'est là un résultat (*) bien connu et qui nous sera utile, mais qui s'obtient plus aisément par un calcul de résidu. Aussi ce n'est pas pour l'établir que nous avons fait la transformation exprimée par l'équation (1). C'est bien plutôt afin d'obtenir des limites supérieures du module de l'intégrale quand b varie. Ce sont ces limites que nous allons chercher maintenant.

13. Théorème. — *Si* a + k *est réel et positif, on peut assigner au second membre de l'équation* (1), *savoir*

$$\operatorname{mod} \frac{1}{\pi} y^{-k} \int_{-\infty}^{ly} e^{(a+k)t} \frac{\sin bt}{t} dt,$$

une limite supérieure indépendante de k *et de* b.

Démonstration. La fonction réelle $e^{(a+k)t}$ est constamment croissante avec t et l'on peut appliquer à l'intégrale le second théorème de la moyenne, de manière à faire sortir cette exponentielle du signe d'intégration (**). On aura donc, en désignant par ξ

(*) On voit que nous considérons ici *par définition* ces nouvelles intégrales comme étant la limite des intégrales prises entre les limites $a - bi$, $a + bi$ quand b tend vers l'infini. Cette convention n'est pas nécessaire pour obtenir les résultats indiqués ici, mais elle l'est pour toute la suite du mémoire et elle sera toujours observée.

(**) Ph. Gilbert, *Cours d'analyse* (4e édition, 1892), no 316. Équation (A). Le théorème est celui-ci : Si $\varphi(x)$ est constamment croissant, on a

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = \varphi(b-0)\int_\xi^b \psi(x)dx \qquad (b > \xi > a).$$

On peut aussi se servir de la formule

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = \varphi(b-0)\int_\xi^b \psi(x)dx + \varphi(a+0)\int_a^\xi \psi(x)dx,$$

qui donne ici le même résultat.

Cette formule subsiste pour a ou b infini. Voir sur ce point : C. Jordan, *Cours d'analyse*, t. II, no 219 (2e édition, Paris, 1894).

un nombre inconnu mais inférieur à ly,

$$\frac{1}{\pi}y^{-k}\int_{-\infty}^{ly} e^{(a+k)t}\frac{\sin bt}{t}\,dt = \frac{1}{\pi}y^{a}\int_{\xi}^{ly}\frac{\sin bt}{t}\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}y^{a}\int_{b\xi}^{bly}\frac{\sin t}{t}\,dt,$$

et on en conclut

$$\operatorname{mod}\frac{1}{\pi}y^{-k}\int_{-\infty}^{ly} e^{(a+k)t}\frac{\sin bt}{t}\,dt < \frac{1}{\pi}y^{a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{t}\,dt < y^{a}.$$

14. Théorème. — *Si* $a + k = \alpha + \beta i$ *est une quantité complexe donnée, et* y *une quantité réelle inférieure à l'unité et qui tend vers zéro, on peut assigner au second membre de l'équation* (1)

$$\operatorname{mod}\frac{1}{\pi}y^{-k}\int_{-\infty}^{ly} e^{(a+k)t}\frac{\sin bt}{t}\,dt$$

une limite supérieure indépendante de b, *qui tend vers zéro avec* y *et qui est du même ordre que* y^{a}. *On suppose dans ce théorème que* $b > \beta$ *ne peut pas tendre vers* β *et que* a *est* > 0.

Démonstration. Décomposons l'intégrale comme il suit :

$$\int_{-\infty}^{ly} e^{(a+k)t}\frac{\sin bt}{t}\,dt = \int_{-\infty}^{ly} e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)\frac{\sin bt}{t}\,dt$$

$$\int_{-\infty}^{ly} e^{(a+k)t}\frac{\sin bt}{t}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{ly} e^{\alpha t}\big[\sin(b+\beta)t + \sin(b-\beta)t\big]\frac{dt}{t}$$

$$+\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{ly} e^{\alpha t}\big[\cos(b-\beta)t - \cos(b+\beta)t\big]\frac{dt}{t}.$$

Puisque y est < 1, on a $ly < 0$. D'autre part, $e^{\alpha t}$ est une fonction croissante et l'on peut appliquer aux deux intégrales réelles

du second membre le second théorème de la moyenne. Désignons, à cet effet, par ξ et ξ' des quantités négatives inconnues, on pourra poser, en remarquant que $e^{\alpha l y} = y^\alpha$,

$$\int_{-\infty}^{ly} e^{(\alpha+\beta i)t} \frac{\sin bt}{t}\, dt = \frac{1}{2} y^\alpha \int_{\xi}^{ly} \left[\sin(b+\beta)t + \sin(b-\beta)t\right] \frac{dt}{t}$$

$$+ \frac{i}{2} y^\alpha \int_{\xi'}^{ly} \left[\cos(b-\beta)t - \cos(b+\beta)t\right] \frac{dt}{t},$$

$$\int_{-\infty}^{ly} e^{(\alpha+\beta i)t} \frac{\sin bt}{t}\, dt = \frac{1}{2} y^\alpha \left[\int_{(b+\beta)\xi}^{(b+\beta)ly} + \int_{(b-\beta)\xi}^{(b-\beta)ly} \frac{\sin t}{t}\, dt\right]$$

$$+ \frac{i}{2} y^\alpha \left[\int_{(b-\beta)\xi'}^{(b-\beta)ly} - \int_{(b+\beta)\xi'}^{(b+\beta)ly} \frac{\cos t}{t}\, dt\right].$$

Les deux premières intégrales du second membre sont respectivement moindres que

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t}\, dt < \pi.$$

La différence des deux suivantes se met sous la forme

$$\int_{(b+\beta)ly}^{(b-\beta)ly} \frac{\cos t}{t}\, dt - \int_{(b+\beta)\xi'}^{(b-\beta)\xi'} \frac{\cos t}{t}\, dt.$$

On voit ainsi qu'elle est inférieure à

$$\int_{(b+\beta)ly}^{(b-\beta)ly} + \int_{(b+\beta)\xi'}^{(b-\beta)\xi'} \frac{dt}{t} = 2 \log \frac{b+\beta}{b-\beta},$$

quantité qui décroît quand $b > \beta$ augmente.

Notre première intégrale vérifie donc une relation de la forme

$$\int_{-\infty}^{ly} e^{(a+k)t} \frac{\sin bt}{t} dt = Ay^{\alpha} = Ay^{a+k-\beta i},$$

dans laquelle A reste compris entre des limites finies indépendantes de b. On a donc aussi

$$\frac{1}{\pi} y^{-k} \int_{-\infty}^{ly} e^{(a+k)t} \frac{\sin bt}{t} dt = [Ay^{-\beta i}] y^{a} = My^{a},$$

où M reste compris entre des limites finies indépendantes de b et de y, et c'est le résultat que nous voulions démontrer.

15. Théorème. — *Soient* a *et* y *deux nombres positifs donnés supérieurs à l'unité, et soit*

$$a + k = \alpha \pm \beta i$$

un nombre complexe variable, dans lequel α *et* β *sont des nombres positifs qui peuvent croître indéfiniment mais où l'on suppose que* α *ne peut pas tendre vers zéro ; je dis qu'on peut assigner au second membre de l'équation* (1)

$$\operatorname{mod} \frac{y^{-k}}{\pi} \int_{-\infty}^{ly} e^{(a+k)t} \frac{\sin bt}{t} dt$$

une limite supérieure indépendante de b *et de* α. *Cette limite devra dépendre de* β, *mais ne devra pas être d'un ordre supérieur à* $\sqrt{\beta}$ (*ni* à fortiori *à* $\sqrt{\operatorname{mod} k}$).

Nous supposerons dans la démonstration β précédé du signe +, la démonstration étant la même dans les deux cas.

On peut négliger, dans la démonstration, le facteur

$$\frac{1}{\pi} y^{\alpha - k} = \frac{1}{\pi} y^{a-\beta i},$$

qui conserve toujours une valeur finie, et, par conséquent, se borner à démontrer le théorème pour l'intégrale

$$y^{-\alpha}\int_{-\infty}^{ly} e^{(\alpha+\beta i)t}\frac{\sin bt}{t}\,dt.$$

Pour faire cette démonstration, nous décomposons l'intégrale en plusieurs autres vérifiant séparément les conditions de l'énoncé.

Elle se décompose d'abord en deux autres

$$y^{-\alpha}\int_{-\infty}^{ly} e^{\alpha t}\cos\beta t\,\frac{\sin bt}{t}\,dt + iy^{-\alpha}\int_{-\infty}^{ly} e^{\alpha t}\sin\beta t\,\frac{\sin bt}{t}\,dt.$$

La première reste inférieure à une limite assignable indépendante de b et de β, car, par la relation

$$2\cos\beta t\sin bt = \sin(b+\beta)t + \sin(b-\beta)t,$$

elle se décompose encore en deux autres à chacune desquelles le théorème du n° 13 est applicable.

Il ne reste donc à examiner que la seconde intégrale

$$y^{-\alpha}\int_{-\infty}^{ly} e^{\alpha t}\sin\beta t\,\frac{\sin bt}{t}\,dt.$$

Choisissons une constante c assez grande pour qu'on ait

$$\frac{1}{\sqrt{c}} < ly,$$

et décomposons l'intégrale en trois autres

$$y^{-\alpha}\left[\int_{-\infty}^{-\frac{1}{\sqrt{\beta+c}}} + \int_{-\frac{1}{\sqrt{\beta+c}}}^{\frac{1}{\sqrt{\beta+c}}} + \int_{\frac{1}{\sqrt{\beta+c}}}^{ly} e^{\alpha t}\sin\beta t\sin bt\,\frac{dt}{t}\right].$$

Je dis que chacune de ces trois intégrales vérifie les conditions de l'énoncé :

Dans les deux intégrales extrêmes, on a constamment

$$\left| \sin\beta t \sin bt \frac{1}{t} \right| < \left| \frac{1}{t} \right| < \sqrt{\beta + c}.$$

Par conséquent, la première est inférieure à

$$y^{-\alpha}\sqrt{\beta + c}\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t}dt < \sqrt{\beta + c}\,\frac{1}{\alpha}\,y^{-\alpha} < \frac{\sqrt{\beta + c}}{\alpha},$$

et la dernière à

$$y^{-\alpha}\sqrt{\beta + c}\int_{0}^{ly} e^{\alpha t}dt < \frac{\sqrt{\beta + c}}{\alpha}.$$

Dans l'intégrale du milieu, on a

$$\left| \frac{\sin bt \sin \beta t}{t} \right| < \left| \frac{\sin \beta t}{t} \right| < \beta;$$

et, par l'hypothèse faite sur c,

$$e^{\alpha t} < e^{\frac{\alpha}{\sqrt{\beta+c}}} < e^{\alpha l y} = y^{\alpha};$$

donc cette intégrale est inférieure à

$$\beta y^{-\alpha}\int_{-\frac{1}{\sqrt{\beta+c}}}^{\frac{1}{\sqrt{\beta+c}}} e^{\alpha t}dt < \beta\int_{-\frac{1}{\sqrt{\beta+c}}}^{\frac{1}{\sqrt{\beta+c}}} dt < 2\sqrt{\beta}.$$

Ces trois dernières limites sont de l'ordre de $\sqrt{\beta}$, par conséquent le théorème est démontré.

§ 2. — *Étude de l'intégrale* $\frac{1}{2\pi i}\int_{a-bi}^{a+bi} \varphi(s)\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)}$.

16. Dans l'étude que nous allons faire de cette intégrale, nous admettrons toujours que l'on a

$$\Re(a-u) > 0, \quad \Re(a-v) > 0.$$

Cette hypothèse est nécessaire, pour que la condition analogue exprimée dans le théorème du n° 11 soit réalisée dans les applications que nous allons avoir à faire de ce théorème.

17. Premier cas. $\varphi(s)$ *est une constante.* — Posons d'abord

$$\varphi(s) = C,$$

C étant une constante. On aura la formule de décomposition

$$\frac{C}{(s-u)(s-v)} = \frac{C}{u-v}\frac{1}{s-u} - \frac{C}{u-v}\frac{1}{s-v}.$$

En vue des applications ultérieures, nous mettrons cette formule sous la forme

$$\frac{\varphi(s)}{(s-u)(s-v)} = \frac{\varphi(u)}{u-v}\frac{1}{s-u} - \frac{\varphi(v)}{u-v}\frac{1}{s-v},$$

et nous aurons ainsi :

$$\int_{a-bi}^{a+bi} \varphi(s)\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)} = \frac{\varphi(u)}{u-v}\int_{a-bi}^{a+bi}\frac{y^s ds}{s-u} - \frac{\varphi(v)}{u-v}\int_{a-bi}^{a+bi}\frac{y^s ds}{s-v}.$$

Cette relation se transforme par l'équation (1) dans la suivante :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_{a-bi}^{a+bi}\varphi(s)\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)} &= \frac{\varphi(u)y^u}{u-v}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{ly} e^{(a-u)t}\frac{\sin bt}{t}dt \\ &\quad - \frac{\varphi(v)y^v}{u-v}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{ly} e^{(a-v)t}\frac{\sin bt}{t}dt. \end{aligned}\right.$$

Si l'on fait tendre b vers l'infini, on aura, par les formules du n° **12** :

1° pour $y > 1$, $$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\varphi(s)\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)} = \frac{\varphi(u)y^u - \varphi(v)y^v}{u-v};$$

2° pour $y < 1$, $$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\varphi(s)\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)} = 0.$$

18. Deuxième cas. *$\varphi(s)$ est une fraction simple.* — Posons ensuite

$$\varphi(s) = \frac{1}{s+k}$$

et supposons qu'on ait toujours la relation $\mathfrak{R}(a+k) > 0$. On aura la formule de décomposition (on suppose u et v différents de k)

$$\frac{1}{(s+k)(s-u)(s-v)} = \frac{A}{s-u} + \frac{B}{s-v} + \frac{C}{s+k},$$

les coefficients ayant pour valeur

$$A = \frac{1}{(u+k)(u-v)} = \frac{\varphi(u)}{u-v}, \quad B = \frac{1}{(v+k)(v-u)} = \frac{\varphi(v)}{v-u},$$

$$C = \frac{1}{(u+k)(v+k)}.$$

D'après cela, nous pourrons écrire l'équation

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-bi}^{a+bi}\varphi(s)\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)}=\frac{\varphi(u)}{u-v}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{a-bi}^{a+bi}\frac{y^s ds}{s-u}$$

$$+\frac{\varphi(v)}{v-u}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{a-bi}^{a+bi}\frac{y^s ds}{s-v}$$

$$+\frac{1}{(u+k)(v+k)}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{a-bi}^{a+bi}\frac{y^s ds}{s+k}.$$

En transformant ces intégrales par l'équation (1), il viendra

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-bi}^{a+bi}\varphi(s)\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)}&=\frac{\varphi(u)y^u}{u-v}\,\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{ly}e^{(a-u)t}\frac{\sin bt}{t}dt\\&+\frac{\varphi(v)y^v}{v-u}\,\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{y}e^{(a-v)t}\frac{\sin bt}{t}dt\\&+\frac{y^{-k}}{(u+k)(v+k)}\,\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{ly}e^{(a+k)t}\frac{\sin bt}{t}dt.\end{aligned}\right.$$

Si l'on fait tendre b vers l'infini, on trouvera donc par les relations du n° **11** :

$$\text{pour } y>1,\quad\left\{\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\varphi(s)\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)}&=\frac{\varphi(u)y^u-\varphi(v)y^v}{u-v}\\&+\frac{y^{-k}}{(u+k)(v+k)}.\end{aligned}\right.$$

Il y a donc maintenant un terme de plus que dans le cas précédent.

19. Si l'on fait en particulier $k=-1$, dans la formule précé-

dente, on obtiendra, pour $y > 1$,

$$(4) \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{1}{s-1}\,\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)} &= \frac{1}{u-v}\left[\frac{y^u}{u-1} - \frac{y^v}{v-1}\right] \\ &+ \frac{y}{(u-1)(v-1)}. \end{aligned} \right.$$

20. *Combinaison des cas précédents.* — Supposons maintenant que $\varphi(s)$ soit la somme d'une constante et d'un nombre *limité* de fractions simples, soit

$$\varphi(s) = \mathrm{C} + \sum_n \frac{1}{s + k_n}.$$

Il est clair que l'on obtiendra par l'application répétée des formules de l'un des deux cas précédents à chacun des termes de cette somme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_{a-bi}^{a+bi} \varphi(s)\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)} &= \frac{\varphi(u)\,y^u}{u-v}\,\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{ly} e^{(a-u)t}\frac{\sin bt}{t}\,dt \\ &- \frac{\varphi(v)\,y^v}{u-v}\,\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{ly} e^{(a-v)t}\frac{\sin bt}{t}\,dt \\ &+ \sum_n \frac{y^{-k_n}}{(u+k_n)(v+k_n)}\,\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{ly} e^{(a+k_n)t}\frac{\sin bt}{t}\,dt. \end{aligned}$$

Par conséquent, si l'on fait tendre b vers l'infini, il viendra, pour $y > 1$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \varphi(s)\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)} &= \frac{\varphi(u)\,y^u - \varphi(v)\,y^v}{u-v} \\ &+ \sum_n \frac{y^{-k_n}}{(u+k_n)(v+k_n)}. \end{aligned}$$

Il est bien entendu que dans cette formule on doit supposer u

et v différents de k, et, en outre,

$$\mathfrak{R}(a-u)>0,\quad \mathfrak{R}(a-v)>0,\quad \mathfrak{R}(a+k_n)>0.$$

21. *Extension au cas où $\varphi(s)$ a un développement illimité.* — Passons maintenant au cas où

$$\varphi(s)=C+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{s+k_n}$$

se développe en une somme illimitée de fractions simples. On ne peut pas généraliser, sans examen, les dernières formules, et il faut étudier les choses d'un peu plus près. On peut cependant énoncer le théorème général suivant où l'on verra l'utilité des calculs précédents :

THÉORÈME. — *Si la quantité, variable avec* n, $\mathfrak{R}(a+k_n)$ *reste toujours comprise entre deux limites positives indépendantes de* n *(la limite zéro étant exclue), si, d'autre part, la série à termes positifs*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{mod}\left(\frac{1}{k_n}\right)^{\frac{3}{2}}$$

est convergente; enfin, si la série

$$\varphi(s)=C+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{s+k_n}$$

est uniformément convergente dans toute région finie du plan s *qui ne renferme pas de pôles* $-k_n$, *on aura, pour* $y>1$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\varphi(s)\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)}=\frac{\varphi(u)y^u-\varphi(v)y^v}{u-v}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^{-k_n}}{(u+k_n)(v+k_n)}.$$

On suppose que u *et* v *ne sont pas des pôles et que les relations* $\mathfrak{R}(a-u)>0$, $\mathfrak{R}(a-v)>0$ *sont vérifiées.*

Démonstration. A cause de l'uniformité supposée de la convergence, on peut intégrer sans difficulté la série *pour toute valeur finie de* b. On trouve donc, comme dans le cas précédent,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-bi}^{a+bi} \varphi(s)\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)} = \frac{\varphi(u)y^u}{u-v}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{ly} e^{(a-u)t}\frac{\sin bt}{t}dt$$

$$-\frac{\varphi(v)y^v}{u-v}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{ly} e^{(a-v)t}\frac{\sin bt}{t}dt$$

$$+\sum_n \frac{y^{-k_n}}{(u+k_n)(v+k_n)}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{ly} e^{(a+k_n)t}\frac{\sin bt}{t}dt.$$

Je dis maintenant que, considérée comme fonction de b, la série du second membre converge uniformément alors même que b peut croître indéfiniment.

Pour le montrer, posons $a + k_n = \alpha_n + \beta_n i$. La partie réelle α_n variera entre des limites finies par hypothèse (la limite zéro étant exclue). Par conséquent, on peut appliquer le théorème du n° 15 : la quantité

$$\operatorname{mod} \frac{1}{\pi} y^{-k_n}\int_{-\infty}^{ly} e^{(a+k_n)t}\frac{\sin bt}{t}dt$$

ne pourra pas surpasser, quand b et k_n varient, une quantité de la forme

$$M\sqrt{\beta_n}$$

ou, ce qui revient au même, une quantité de la forme

$$M\sqrt{k_n}$$

dans laquelle M est une constante donnée. Notre série aura donc tous ses termes moindres que ceux d'une série de la forme

$$M\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{k_n}}{(u+k_n)(v+k_n)},$$

qui est absolument convergente par hypothèse et dont les termes ne dépendent pas de b. Donc sa convergence uniforme est assurée.

On peut donc en toute rigueur faire tendre b vers l'infini et passer à la limite dans chaque terme. On obtient alors la relation énoncée dans le théorème et celui-ci est par conséquent démontré.

22. *Application.* — Le théorème précédent s'applique, en particulier, à la fonction

$$\varphi(s) = \sum_\rho \frac{1}{s-\rho},$$

dans laquelle la sommation s'étend à toutes les racines imaginaires de la fonction $\zeta(s)$ rangées par ordre de modules croissants (n° 8). En effet, toutes les racines ρ ont leur partie réelle comprise entre *zéro* et *un*, et par conséquent, pourvu que l'on prenne $a > 1$, la partie réelle $\Re(a-k)$ ne pourra pas s'annuler et restera finie. D'autre part, la série

$$\sum \operatorname{mod}\left(\frac{1}{\rho}\right)^{\frac{3}{2}}$$

est convergente (n° 6). On aura donc, dans ce cas particulier,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \varphi(s)\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)} = \frac{\varphi(u)y^u - \varphi(v)y^v}{u-v} + \sum_\rho \frac{y^\rho}{(u-\rho)(v-\rho)},$$

et cette équation suppose que l'on a

$$y > 1, \quad a > 1, \quad \Re(a-u) > 0, \quad \Re(a-v) > 0.$$

Il est encore important de remarquer que dans la dernière série

$$\sum_\rho \frac{y^\rho}{(u-\rho)(v-\rho)}$$

la convergence est absolue, car les termes de cette série décrois-

sent comme ceux de la série $\Sigma \frac{1}{\rho^2}$ qui est absolument convergente. Il n'y a donc plus aucune attention à prendre à l'ordre dans lequel les termes sont rangés.

23. Nouvelle extension du théorème précédent. — *Soit* F (s) *une fonction entière du genre zéro ou du genre un. Désignons en général par* ρ_i $(i=1, 2, \dots n, \dots)$ *les zéros de cette fonction. Si ces zéros* ρ *sont tous situés à gauche d'une droite* $x=h$, *et si la série*

$$\Sigma \frac{1}{\rho^{\frac{s}{2}}}$$

est absolument convergente, on aura, pour $a > h$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \mathrm{D} \log F(s) \frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)} = \frac{1}{u-v}\left[y^u \frac{F'(u)}{F(u)} - y^v \frac{F'(v)}{F(v)}\right]$$
$$+ \sum_{\rho} \frac{y^{\rho_i}}{(u-\rho_i)(v-\rho_i)}.$$

Si la fonction F (s) est du genre zéro, on retombe immédiatement sur le théorème du n° 21. Supposons donc que F (s) soit du genre *un*. On peut poser par la formule de Weierstrass

$$F(s) = F(0)\, e^{\alpha s}\, \Pi\left(1 - \frac{s}{\rho_i}\right) e^{\frac{s}{\rho_i}},$$

et l'on sait que ce produit est uniformément convergent dans toute région finie du plan s. Prenons les dérivées logarithmiques, il vient

$$\frac{F'(s)}{F(s)} = \alpha + \sum_{\rho}\left[\frac{1}{s-\rho_i} - \frac{1}{\rho_i}\right],$$

et cette série est uniformément convergente dans toute région ne contenant pas de racines ρ_i, donc, en particulier, pour $\mathfrak{R}(s) \overline{\gtrless} a$.

Désignons par $\varphi_n(s)$ la somme des n premiers termes de la série [supposée illimitée, car on retomberait sur un théorème antérieur (20) dans le cas contraire]

$$\varphi_n(s) = \alpha + \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{s - \rho_i} - \frac{1}{\rho_i} \right];$$

on aura sans difficulté pour toute valeur finie de b, comme au n° 20,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-bi}^{a+bi} \varphi_n(s) \frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)} = \frac{\varphi_n(u)}{u-v} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{ly} e^{(a-u)t} \frac{\sin bt}{t} dt$$

$$- \frac{\varphi_n(v)}{u-v} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{ly} e^{(a-v)t} \frac{\sin bt}{t} dt$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{y^{\rho_i}}{(u-\rho_i)(v-\rho_i)} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{ly} e^{(a-\rho_i)t} \frac{\sin bt}{t} dt.$$

Si l'on fait tendre n d'abord vers l'infini, $\varphi_n(s)$ converge uniformément vers sa limite D log F (s) sous le signe d'intégration au premier membre, et il vient, sans difficulté pour toute valeur finie de b,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-bi}^{a+bi} \mathrm{D} \log \mathrm{F}(s) \frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)} = \frac{y^u}{u-v} \frac{\mathrm{F}'(u)}{\mathrm{F}(u)} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{ly} e^{(a-u)t} \frac{\sin bt}{t} dt$$

$$- \frac{y^v}{u-v} \frac{\mathrm{F}'(v)}{\mathrm{F}(v)} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{ly} e^{(a-v)t} \frac{\sin bt}{t} dt$$

$$+ \sum_{\rho} \frac{y^{\rho_i}}{(u-\rho_i)(v-\rho_i)} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{ly} e^{(a-\rho_i)t} \frac{\sin bt}{t} dt.$$

Si l'on fait maintenant tendre b vers l'infini, je dis que cette dernière série converge uniformément.

En effet, on sait (n° 15) que l'expression

$$\frac{y^{\rho_i}}{\pi}\int_{-\infty}^{iy} e^{(a-\rho_i)x}\frac{\sin bt}{t}\,dt,$$

dans laquelle b et ρ_i varient et où $\mathfrak{R}\,(a - \rho_i)$ ne peut tendre vers zéro, admet une limite supérieure de la forme

$$M\sqrt{\operatorname{mod}\rho_i}$$

où M est une constante indépendante de b et de ρ. Donc tous les termes de la série qui nous occupe sont inférieurs en valeur absolue aux termes correspondants de la série

$$M\sum\frac{\sqrt{\rho_i}}{(u-\rho_i)(v-\rho_i)},$$

qui est absolument convergente par hypothèse et dont les termes ne dépendent pas de b.

L'uniformité de la convergence est donc établie, b variant arbitrairement. Si on fait tendre b vers l'infini, on peut, dans la dernière équation, passer rigoureusement à la limite dans chaque terme, et l'on obtient ainsi l'équation qui figure dans l'énoncé du théorème.

Application. — On peut poser, dans le théorème précédent,

$$F(s)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}.$$

Cette fonction remplit toutes les conditions du théorème et les zéros ρ sont de la forme

$$\rho = -2m \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

On trouve ainsi, en changeant les signes,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \mathrm{D}\log\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)} = \frac{y^u}{u-v}\mathrm{D}\log\Gamma\left(\frac{u}{2}+1\right)$$
$$-\frac{y^v}{u-v}\mathrm{D}\log\Gamma\left(\frac{v}{2}+1\right)$$
$$-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y^{-2m}}{(2m+u)(2m+v)}.$$

Cette équation suppose qu'on a

$$a > 0, \quad \Re(a-u) > 0, \quad \Re(a-v) > 0.$$

§ 3. — *Application des résultats précédents à la fonction* D log $\zeta(s)$.

24. *Forme particulière de l'intégrale du paragraphe précédent pour* $\varphi(s) = \mathrm{D}\log\zeta(s)$. — Rappelons la formule établie au n° 8 :

$$\mathrm{D}\log\zeta(s) = \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{\log\pi}{2} - \frac{1}{s-1} - \mathrm{D}\log\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)$$
$$+\sum_{\rho}\frac{1}{s-\rho}.$$

Appliquons-lui respectivement les formules des n°s 17, 19, 22 et 23, nous obtiendrons, pour $y > 1$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \mathrm{D}\log\zeta(s)\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)} = \frac{1}{u-v}\left[y^u\frac{\zeta'(u)}{\zeta(u)} - y^v\frac{\zeta'(v)}{\zeta(v)}\right]$$
$$-\frac{y}{(u-1)(v-1)} + \sum_{\rho}\frac{y^{\rho}}{(u-\rho)(v-\rho)}$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y^{-2m}}{(2m+u)(2m+v)}.$$

Dans cette formule on doit d'abord supposer que u ou v n'est ni un pôle ni un zéro de $\zeta(s)$. On doit admettre que a est > 1 et supérieur aux parties réelles de u et de v.

Enfin, nous rappellerons que y est une variable réelle positive et plus grande que *un*. La formule cesserait d'être vraie dans le cas contraire (*).

25. *Nouvelle expression de la même intégrale.* — Nous allons chercher maintenant une autre expression de la même intégrale. Elle se déduit de l'expression de $\zeta(s)$ en produit infini pour $\Re(s) > 1$ (n° 1). On trouve

$$\begin{aligned} D \log \zeta(s) &= -\sum \frac{lp}{p^s - 1} \\ &= -\sum \frac{lp}{p^s} - \sum \frac{lp}{p^{2s}} - \sum \frac{lp}{p^{3s}} - \cdots . \end{aligned}$$

On en conclut sans difficulté pour toute valeur finie de b, et pour $a > 1$,

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_{a-bi}^{a+bi} D \log \zeta(s) \frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)} = &-\frac{1}{2\pi i}\sum lp \int_{a-bi}^{a+bi} \left(\frac{y}{p}\right)^s \frac{ds}{(s-u)(s-v)} \\ &-\frac{1}{2\pi i}\sum lp \int_{a-bi}^{a+bi} \left(\frac{y}{p^2}\right)^s \frac{ds}{(s-u)(s-v)} \\ &- \cdots . \end{aligned} \right.$$

On peut transformer les intégrales du second membre par les formules (2) du n° 17. On y fera d'abord $\varphi(s) = 1$, puis on changera successivement y en $\left(\frac{y}{p}\right)$, $\left(\frac{y}{p^2}\right)$, ... Une quelconque des intégrales du second membre se décompose alors comme il suit :

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_{a-bi}^{a+bi} \left(\frac{y}{p^m}\right)^s \frac{ds}{(s-u)(s-v)} = &\frac{1}{u-v}\left(\frac{y}{p^m}\right)^u \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{l\left(\frac{y}{p^m}\right)} e^{(a-u)t} \frac{\sin bt}{t} dt \\ &-\frac{1}{u-v}\left(\frac{y}{p^m}\right)^v \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{l\left(\frac{y}{p^m}\right)} e^{(a-v)t} \frac{\sin bt}{t} dt. \end{aligned} \right.$$

(*) La vérification de la formule est facile en remarquant que le second membre est la somme des résidus de la fonction sous le signe d'intégration, relatifs aux pôles situés à gauche de la droite $x = a$.

Lorsque l'on fait tendre b vers l'infini, la limite du second membre de cette dernière équation est nulle (n° 11) pour $y < p^m$; pour $y > p^m$, au contraire, cette limite est égale à

$$\frac{1}{u - v}\left(\frac{y}{p^m}\right)^u - \frac{1}{u - v}\left(\frac{y}{p^m}\right)^v.$$

Pour $y = p^m$, cette limite serait encore différente, mais nous supposerons que y n'est pas une puissance d'un nombre premier.

Faisons maintenant tendre b vers l'infini et passons à la limite. Je dis que dans le second membre de l'équation (5) on pourra remplacer chaque terme par sa limite. Pour justifier cette assertion, il faut montrer que le second membre converge uniformément quand b varie de cette manière.

C'est ce qui a lieu. En effet, en vertu du théorème du n° 14, l'expression

$$\mathrm{mod}\,\frac{1}{\pi}\left(\frac{y}{p^m}\right)^u \int_{-\infty}^{l\left(\frac{y}{p^m}\right)} e^{(a-u)t}\,\frac{\sin bt}{t}\,dt$$

reste inférieure, quel que soit b, à une quantité de la forme

$$\mathrm{M}\left(\frac{y}{p^m}\right)^a$$

où M est une constante convenable indépendante de b, de p et de m. On peut affirmer la même chose de l'intégrale

$$(u - v)\,\frac{1}{2\pi i}\int_{a-bi}^{a+bi}\left(\frac{y}{p^m}\right)^s \frac{ds}{(s - u)(s - v)},$$

qui se décompose par la formule (6) en deux expressions de cette nature. Donc, les termes du second membre de l'équation (5) sont inférieurs à ceux d'une série de forme

$$\mathrm{M}\,\frac{y^a}{u - v}\left[\sum \frac{lp}{p^a} + \sum \frac{lp}{p^{2a}} + \cdots\right],$$

qui est absolument convergente pour $a > 1$, et dont les termes ne dépendent pas de b. Donc, le second membre de l'équation (5) est uniformément convergent, comme nous voulions l'établir.

On peut donc passer à la limite dans chaque terme de cette équation et l'on trouve

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} D\log\zeta(s)\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)} = -\frac{y^u}{u-v}\left[\sum_{p<y}\frac{lp}{p^u}+\sum_{p^2<y}\frac{lp}{p^{2u}}+\cdots\right]$$
$$+\frac{y^v}{u-v}\left[\sum_{p<y}\frac{lp}{p^v}+\sum_{p^2<y}\frac{lp}{p^{2v}}+\cdots\right].$$

Pour ne pas compliquer inutilement les formules, nous écrirons en abrégé

$$\sum_{p^m<y}\frac{lp}{p^{mu}} = \sum_{p<y}\frac{lp}{p^u}+\sum_{p^2<y}\frac{lp}{p^{2u}}+\sum_{p^3<y}\frac{lp}{p^{3u}}+\cdots.$$

Au second membre, les sommes s'étendent respectivement aux nombres premiers $< y$, puis aux nombres premiers dont le carré est $< y$, ... et ainsi de suite jusqu'à ce que les sommes s'annulent d'elles-mêmes.

26. *Comparaison des deux résultats. Formule générale.* — En comparant ce dernier résultat à celui du n° 24, on trouve l'équation

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} y^u\sum_{p^m<y}\frac{lp}{p^{mu}} - y^v\sum_{p^m<y}\frac{lp}{p^{mv}} &= -\left[y^u\frac{\zeta'(u)}{\zeta(u)} - y^v\frac{\zeta'(v)}{\zeta(v)}\right] \\ &+\frac{u-v}{(u-1)(v-1)}y \\ &-(u-v)\sum_{\rho}\frac{y^\rho}{(u-\rho)(v-\rho)} \\ &-(u-v)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y^{-2m}}{(2m+u)(2m+v)}. \end{aligned}\right.$$

Les sommes du premier membre s'étendent à toutes les puissances des nombres premiers qui sont inférieures à y, comme on l'a défini au numéro précédent.

Cette équation a été établie en supposant que y n'était pas une puissance d'un nombre premier. Mais il est facile de s'assurer que cette restriction peut disparaître. Nous allons montrer, en effet, que *les deux membres de l'équation sont des fonctions continues de* y, pour $y > 1$.

Le second membre est une fonction continue de y pour $y > 1$. En effet, la série

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{y^{-2m}}{(2m + u)(2m + v)}$$

est une série potentielle qui converge très rapidement. D'autre part, la somme étendue aux racines ρ

$$\sum_{\rho} \frac{y^{\rho}}{(u - \rho)(v - \rho)}$$

a tous ses termes inférieurs à ceux de la série

$$y \sum_{\rho} \frac{1}{(u - \rho)(v - \rho)},$$

qui est absolument convergente, parce que la série $\Sigma \frac{1}{\rho^2}$ jouit de cette propriété. Donc la série étendue aux racines ρ qui nous intéresse est uniformément convergente et a pour somme une fonction continue de y. Donc enfin le second membre de l'équation est une fonction continue de y.

Le premier membre de l'équation est aussi une fonction continue de y, car les deux sommes

$$y^{u} \sum_{p^m < y} \frac{lp}{p^{mu}}, \quad y^{v} \sum_{p^m < y} \frac{lp}{p^{mv}}$$

présentent les mêmes discontinuités : elles augmentent brusquement l'une et l'autre de lp chaque fois que y passe par une valeur de la forme p^m égale à une puissance entière d'un nombre premier. Donc ces discontinuités se détruisent dans le premier membre de l'équation, qui reste continu pour toute valeur de y.

Voici encore une remarque importante. Les quantités u et v

ont été précédemment assujetties à certaines conditions, mais toute restriction disparaît dans l'équation (7). En effet, le second membre est une fonction uniforme de u et de v dans toute l'étendue du plan et il en est de même du premier membre. Donc l'égalité doit subsister pour toute valeur de u et de v. On remarquera de plus que le premier membre, composé d'un nombre limité de termes, est holomorphe dans toute l'étendue du plan ; donc toutes les discontinuités apparentes du second membre doivent disparaître en se détruisant entre elles. Il conviendra donc, pour les valeurs de u et de v qui rendent discontinus certains termes, de modifier la disposition du second membre de manière à mettre cette circonstance capitale en pleine lumière. C'est ce que nous allons faire dans les cas particuliers qui vont suivre.

27. *Premier cas particulier* : $v=0$. — Posons $v=0$ et divisons par y^u, la formule (7) deviendra

$$(8)\quad\ldots\quad \left\{\begin{aligned} \sum_{p^m<y}\frac{lp}{p^{mu}}-\frac{1}{y^u}\sum_{p^m<y} lp = & -\left[\frac{\zeta'(u)}{\zeta(u)}-\frac{1}{y^u}\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}\right] \\ & +\frac{u}{1-u}\,y^{1-u}-u\sum_{\rho}\frac{y^{\rho-u}}{\rho(\rho-u)} \\ & -u\sum_{m}\frac{y^{-2m-u}}{2m(2m+u)}. \end{aligned}\right.$$

Il ne faut pas oublier que, d'après son origine (25),

$$\sum_{p^m<y} lp = \sum_{p<y} lp + \sum_{p^2<y} lp + \sum_{p^3<y} lp + \cdots,$$

et les sommes du second membre s'étendent respectivement aux nombres premiers qui sont $<y$, puis à ceux dont le carré est $<y$ et ainsi de suite jusqu'à ce que les sommes s'annulent d'elles-mêmes.

28. *Deuxième cas particulier* : $u=1$. — Dans la formule (8) du numéro précédent, on peut faire encore tendre u vers l'unité. Mais, pour les raisons indiquées à la fin du n° 26, il convient,

avant de passer à la limite, de modifier la disposition des termes du second membre.

On remarquera les relations suivantes, dont la seconde s'obtient par l'application de la règle de L'Hôpital :

$$\frac{u}{1-u} y^{1-u} = \frac{u}{1-u} + \frac{u}{1-u}(y^{1-u} - 1),$$

$$\lim_{u=1} \frac{y^{1-u} - 1}{1-u} = ly.$$

En tenant compte de ces relations, l'équation du numéro précédent devient, pour $u = 1$,

$$(9) \quad \begin{cases} \sum_{p^m<y} \frac{lp}{p^m} - \frac{1}{y} \sum_{p^m<y} lp = ly - \lim_{u=1} \left[\frac{\zeta'(u)}{\zeta(u)} + \frac{u}{u-1}\right] + \frac{1}{y}\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} \\ \qquad + \sum_\rho \frac{y^{\rho-1}}{\rho(\rho-1)} - \sum_m \frac{y^{-2m-1}}{2m(2m+1)}. \end{cases}$$

29. *Remarques sur la formule précédente.* — La formule que nous venons d'obtenir fournit des conséquences asymptotiques remarquables, sur lesquelles nous aurons à revenir. Nous allons dès maintenant en signaler une qui nous sera utile un peu plus loin.

Si l'on fait tendre y vers l'infini, les termes du second membre

$$\frac{1}{y}\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} \quad \text{et} \quad \sum_m \frac{y^{-2m-1}}{2m(2m+1)}$$

tendent très rapidement vers zéro.

D'autre part, comme $\mathcal{R}(\rho - 1) \overline{\overline{<}} 0$, la somme $\sum_\rho$ de ce second membre converge plus rapidement que la série

$$\sum_\rho \frac{1}{\rho(\rho-1)},$$

qui est absolument convergente; cette somme a donc une limite supérieure indépendante de y.

Donc, dans le second membre de l'équation, il n'y a qu'un seul terme qui puisse croître indéfiniment avec y, c'est le terme ly.

Dans le premier membre de l'équation, le rapport

$$\frac{1}{y}\sum_{p^m<y} lp$$

conserve toujours une valeur voisine de l'unité, comme l'a montré M. Tchebichef dans un mémoire célèbre (*) et comme on peut d'ailleurs le voir plus facilement (**). Il résulte de là, en divisant toute l'équation par ly, que l'on aura

$$\lim_{y=\infty}\frac{1}{ly}\sum_{p^m<y}\frac{lp}{p^m}=1.$$

Ce résultat est connu depuis longtemps et a déjà été utilisé bien des fois. On peut aussi l'obtenir d'une manière élémentaire.

30. *Troisième cas particulier*. — Cherchons maintenant ce que devient la formule du n° 27, quand on fait tendre u vers un zéro imaginaire simple de $\zeta(s)$ que nous désignerons par ρ_1.

Commençons par isoler de la somme $\sum_\rho$ le terme relatif à ce zéro; ce terme (avec un signe contraire de celui qu'il a dans l'équation) peut se décomposer comme il suit :

$$\frac{uy^{\rho_1-u}}{\rho_1(\rho_1-u)}=\frac{u}{\rho_1(\rho_1-u)}+\frac{uy^{\rho_1-u}-u}{\rho_1(\rho_1-u)}$$

$$=\left(\frac{1}{\rho_1-u}-\frac{1}{\rho_1}\right)+\frac{u}{\rho_1}\frac{y^{\rho_1-u}-1}{\rho_1-u}.$$

On remarque encore que l'on a, par la règle de L'Hôpital,

$$\lim_{u=\rho_1}\frac{u}{\rho_1}\frac{y^{\rho_1-u}-1}{\rho_1-u}=ly;$$

(*) Mémoire reproduit dans le *Cours d'algèbre supérieure* de SERRET. Voir 3e édit. (1866) t. II, p. 212, formule (8). Le rapport $\frac{1}{y}\sum_{p^m<y} lp$ est représenté dans cet ouvrage par $\psi(y)$.

(**) BACHMANN, *Die analytische Zahlentheorie* (Leipzig, 1894), pp. 361 et suiv.

de sorte que la formule du n° 27 deviendra, pour $u = \rho_1$,

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} \sum_{p^m<y} \frac{lp}{p^{m\rho_1}} - \frac{1}{y^{\rho_1}} \sum_{p^m<y} lp = & - ly + \frac{1}{\rho_1} - \lim_{u=\rho_1} \left[\frac{\zeta'(u)}{\zeta(u)} - \frac{1}{u-\rho_1}\right] \\ & + \frac{1}{y^{\rho_1}} \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} + \frac{\rho_1}{1-\rho_1} y^{1-\rho_1} \\ & - \rho_1 \sum_\rho{}' \frac{y^{\rho-\rho_1}}{\rho(\rho-\rho_1)} - \rho_1 \sum_m \frac{y^{-2m-\rho_1}}{2m(2m+\rho_1)}. \end{aligned}\right.$$

Dans le second membre, nous avons accentué la somme $\sum_\rho$ pour rappeler que le terme relatif à ρ_1 en a été éliminé : il faudra se garder d'oublier cette circonstance dans la suite.

31. *Combinaison des deux derniers cas particuliers.* — Si l'on considère la dernière équation, on n'y trouve que des puissances de y, à part un terme unique $- ly$. Mais ce terme perturbateur peut être éliminé, car il se trouve en signe contraire dans l'équation (9) obtenue précédemment pour $u = 1$ (n° 28).

Ajoutons, à cette fin, les deux équations entre elles, en observant que l'on a

$$\lim_{u=1} \left[\frac{\zeta'(u)}{\zeta(u)} + \frac{u}{u-1}\right] = 1 + \lim_{u=0}\left[\frac{\zeta'(1+u)}{\zeta(1+u)} + \frac{1}{u}\right],$$

$$\lim_{u=\rho_1} \left[\frac{\zeta'(u)}{\zeta(u)} - \frac{1}{u-\rho_1}\right] = \lim_{u=0} \left[\frac{\zeta'(\rho_1+u)}{\zeta(\rho_1+u)} - \frac{1}{u}\right];$$

nous trouverons l'équation importante

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} & \sum_{p^m<y} lp\left(\frac{1}{p^m} + \frac{1}{p^{m\rho_1}}\right) - \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y^{\rho_1}}\right) \sum_{p^m<y} lp \\ & \quad = \frac{1}{\rho_1} - 1 - \lim_{u=0} \left[\frac{\zeta'(1+u)}{\zeta(1+u)} + \frac{\zeta'(\rho_1+u)}{\zeta(\rho_1+u)}\right] \\ & \quad + \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y^{\rho_1}}\right) \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} + \frac{\rho_1}{1-\rho_1} y^{1-\rho_1} \\ & \quad - \sum_\rho \frac{y^{\rho-1}}{\rho(\rho-1)} - \rho_1 \sum_\rho{}' \frac{y^{\rho-\rho_1}}{\rho(\rho-\rho_1)} \\ & \quad - \sum_m \frac{y^{-2m-1}}{2m(2m+1)} - \rho_1 \sum_m \frac{y^{-2m-\rho_1}}{2m(2m+\rho_1)}. \end{aligned}\right.$$

§ 4. — *Forme particulière de la dernière équation dans l'hypothèse (impossible) d'une racine de la forme $\rho = 1 + \beta i$.*

32. *Forme particulière du second membre.* — L'équation 11 du numéro précédent va servir de base à la démonstration de l'impossibilité d'une racine $\rho = 1 + \beta i$. Cette démonstration sera faite au chapitre suivant. Mais l'équation du n° 31 est assez compliquée, et il importe d'en simplifier l'écriture, pour en dégager ce qui sera essentiel à la démonstration.

Supposons, par impossible, qu'il y ait des racines ρ de la forme $1 + \beta i$, et prenons pour ρ_1 l'une d'elles. Posons donc implicitement $\rho_1 = 1 + \beta i$ dans l'équation du n° 31 et examinons, dans cette hypothèse, comment se comporte le second membre quand y augmente indéfiniment.

On trouve dans ce second membre : 1° Une constante finie

$$C = \frac{1}{\rho_1} - 1 - \lim_{u=0}\left[\frac{\zeta'(1+u)}{\zeta(1+u)} + \frac{\zeta'(\rho_1+u)}{\zeta(\rho_1+u)}\right];$$

2° Trois termes qui tendent très rapidement vers zéro quand y augmente, savoir :

$$\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y^{\rho_1}}\right)\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \sum_m \frac{y^{-2m-1}}{2m(2m+1)} - \rho_1 \sum_m \frac{y^{-2m-1}}{2m(2m+\rho_1)};$$

3° Un terme purement périodique

$$\frac{\rho_1}{1-\rho_1} y^{1-\rho_1} = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} y^{-\beta i};$$

4° Enfin, deux sommes étendues aux racines ρ qui sont

$$-\sum_\rho \frac{y^{\rho-1}}{\rho(\rho-1)} - \rho_1 \sum_\rho{}' \frac{y^{\rho-\rho_1}}{\rho(\rho-\rho_1)}.$$

Dans ces sommes, les exposants de y ne peuvent pas avoir (pour $\rho_1 = 1 + \beta i$) leur partie réelle plus grande que zéro. Ces

sommes convergent donc plus rapidement, quel que soit y (supposé > 1), que les séries correspondantes

$$\sum_\rho \frac{1}{\rho(\rho-1)}, \quad \rho_1 \sum_\rho' \frac{1}{\rho(\rho-\rho_1)},$$

qui sont absolument convergentes et dont les termes ne dépendent pas de y. Ces sommes sont donc *absolument* et *uniformément* convergentes, y variant sans restriction. Nous pouvons, par conséquent, les partager d'abord en deux autres : deux premières sommes que nous désignerons avec une lettre nouvelle S pour les reconnaître des précédentes,

$$-\underset{\rho}{\mathrm{S}} \frac{y^{\rho-1}}{\rho(\rho-1)}, \quad -\rho_1 \underset{\rho}{\mathrm{S}}' \frac{y^{\rho-\rho_1}}{\rho(\rho-\rho_1)},$$

étendues à toutes les racines ρ de la forme $1+\beta i$ seulement; deux autres sommes analogues étendues aux autres racines.

Dans ces deux dernières, l'exposant de y aura sa partie réelle négative, et tous les termes tendront sans exception vers zéro quand y tendra vers l'infini. Il en sera de même pour ces sommes elles-mêmes, à cause de l'uniformité de la convergence. Les deux premières sommes, au contraire, seront formées de termes purement périodiques.

En définitive, on peut partager le second membre en trois parties :

Une constante C;

Une partie évanouissante pour y infini : ε;

Une partie formée de termes périodiques : P.

$$\mathrm{P} = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} y^{1-\rho_1} - \underset{\rho}{\mathrm{S}} \frac{y^{\rho-1}}{\rho(\rho-1)} - \rho_1 \underset{\rho}{\mathrm{S}}' \frac{y^{\rho-\rho_1}}{\rho(\rho-\rho_1)}.$$

L'équation du n° 31 prendra alors la forme

$$(12) \qquad \sum_{p^m<y} lp\left(\frac{1}{p^m}+\frac{1}{p^{m\rho_1}}\right) - \left(\frac{1}{y}+\frac{1}{y^{\rho_1}}\right)\sum_{p^m<y} lp = \mathrm{C}+\varepsilon+\mathrm{P}.$$

Dans l'expression de P, il ne faut pas perdre de vue que la

somme $\underset{\rho}{S}$ s'étend à toutes les racines ρ de la forme $1+\beta i$, la somme $\underset{\rho}{S'}$ aux mêmes racines, sauf ρ_1. Si ces deux sommes renferment une infinité de termes, elles seront certainement *absolument* et *uniformément* convergentes, comme les sommes Σ d'où elles sont extraites : c'est là un point essentiel. Nous dirons au chapitre suivant qu'une expression composée comme le second membre de notre équation est une expression de la forme L + P, en désignant par L la partie convergente (C + ε) et par P la partie périodique du développement.

33. *Forme particulière du premier membre.* — Portons notre attention sur le premier membre de l'équation (12) que nous venons d'écrire. On y trouve deux termes que nous allons examiner séparément.

Le premier terme a pour valeur, en développant la somme Σ (voir n° 25 à la fin),

$$\sum_{p<y} lp\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p^{\rho_1}}\right)+\sum_{p^2<y} lp\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^{2\rho_1}}\right)+\sum_{p^3<y} lp\left(\frac{1}{p^3}+\frac{1}{p^{3\rho_1}}\right)+\cdots.$$

Rappelons maintenant que $\rho_1=1+\beta i$ et que, par conséquent, les deux séries

$$\sum\frac{lp}{p^2}+\sum\frac{lp}{p^3}+\cdots=\sum\frac{lp}{p(p-1)},$$

$$\sum\frac{lp}{p^{2\rho_1}}+\sum\frac{lp}{p^{3\rho_1}}+\cdots=\sum\frac{lp}{p^{\rho_1}(p^{\rho_1}-1)},$$

étendues à tous les nombres premiers, sont absolument convergentes ; il en résultera immédiatement que la somme

$$\sum_{p^2<y} lp\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^{2\rho_1}}\right)+\sum_{p^3<y} lp\left(\frac{1}{p^3}+\frac{1}{p^{3\rho_1}}\right)+\cdots$$

est une quantité L qui tend vers une limite finie quand y tend vers l'infini, et l'on pourra poser

$$(13)\quad .\ .\ .\ \sum_{p^m<y} lp\left(\frac{1}{p^m}+\frac{1}{p^{m\rho_1}}\right)=\sum_{p<y} lp\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p^{\rho_1}}\right)+\mathrm{L},$$

la nouvelle somme s'étendant seulement aux nombres premiers $< y$.

Le second terme du premier membre est susceptible d'une réduction analogue. Eu égard à la relation $\rho_1 = 1 + \beta i$, il se met d'abord sous la forme suivante :

$$\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y^{\rho_1}}\right) \sum_{p^m < y} lp = (1 + y^{-\beta i}) \left[\frac{1}{y} \sum_{p<y} lp + \frac{1}{y} \sum_{p^2<y} lp + \cdots\right].$$

Mais quand y tend vers l'infini, la quantité entre crochets se réduit à son premier terme, car les autres peuvent s'écrire :

$$\sum_{p^2<y} \left(\frac{p^2}{y}\right) \frac{lp}{p^2} + \sum_{p^3<y} \left(\frac{p^3}{y}\right) \frac{lp}{p^3} + \cdots.$$

Cette somme tend visiblement vers zéro quand y tend vers l'infini, car tous ses termes s'obtiennent en multipliant ceux de la série absolument convergente

$$\sum \frac{lp}{p^2} + \sum \frac{lp}{p^3} + \cdots$$

par des facteurs tous nuls ou plus petits que *un* et qui tendent *tous* vers zéro quand y tend vers l'infini.

En définitive, le second terme de notre équation peut donc s'écrire, le facteur imaginaire $(1 + y^{-\beta i})$ étant essentiellement fini,

$$(14) \quad . \quad . \quad . \quad \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y^{\rho_1}}\right) \sum_{p^m<y} lp = \varepsilon + \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y^{\rho_1}}\right) \sum_{p<y} lp,$$

où ε est une quantité évanouissante pour y infini.

34. *Forme définitive de l'équation dont il faut démontrer l'impossibilité.* — Remplaçons dans le premier membre de l'équation finale (12) du n° 32 les deux termes du premier membre par leurs nouvelles expressions (13) et (14), calculées au numéro précédent. Puis faisons passer dans le second membre les con-

stantes et les termes évanouissants pour y infini. L'équation prendra la forme définitive

$$(15) \quad . \quad . \sum_{p<y} lp\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p^{\rho_1}}\right)-\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{y^{\rho_1}}\right)\sum_{p<y} lp = \mathrm{L}+\mathrm{P}. \quad .$$

Dans cette équation, L est une quantité qui converge vers une limite finie que nous n'avons pas besoin de connaître, et P est une série périodique absolument convergente et qui a pour valeur (32) :

$$(16) \qquad \mathrm{P}=\frac{\rho_1}{1-\rho_1}\, y^{1-\rho_1}-\underset{\rho}{\mathrm{S}}\,\frac{y^{\rho-1}}{\rho(\rho-1)}-\rho_1\underset{\rho}{\mathrm{S}'}\,\frac{y^{\rho-\rho_1}}{\rho(\rho-\rho_1)}.$$

Le chapitre suivant sera consacré à établir que l'équation (15) renferme une contradiction. Pour cela, nous avons d'abord à établir les propriétés générales des développements de la forme L + P.

CHAPITRE III.

LA FONCTION $\zeta(s)$ N'A PAS DE RACINES DE LA FORME $\rho = 1 + \beta i$.

---

§ 1. — *Propriétés générales des développements de la forme* L + P.

35. Nous allons nous occuper pour le moment des propriétés remarquables de certains développements, propriétés qui vont jouer un rôle essentiel dans la suite du chapitre.

Désignons par $\varphi(y)$ une fonction simple d'une variable réelle y représentable, pour toute valeur de y supérieure à l'unité, par un développement de la forme

$$\varphi(y) = \mathrm{L} + \mathrm{P},$$

où L est une quantité qui tend vers une limite finie A quand y

tend vers l'infini, tandis que P est une série périodique de la forme

$$P = \sum_n \left[a_n \cos(\alpha_n ly) + b_n \sin(\alpha_n ly)\right].$$

Quand P renferme une infinité de termes, on suppose, en outre, que les séries

$$\sum_n \alpha_n, \quad \sum_n b_n$$

sont absolument convergentes et que les coefficients α_n ne tendent pas vers zéro quand n tend vers l'infini.

Cela posé, nous disons que L est la partie convergente du développement, tandis que P en est la partie périodique.

Lorsqu'une fonction $\varphi(y)$ admettra un développement de cette nature, nous dirons que $\varphi(y)$ est une fonction de la forme L + P, et nous écrirons

$$\varphi(y) = L + P.$$

Dans cette relation, les lettres L et P seront uniquement relatives à la *nature* des développements et aucunement aux valeurs particulières de la partie convergente et de chacun des termes de la partie périodique. C'est ainsi que nous écrirons simultanément

$$\varphi(y) = L + P, \quad \psi(y) = L + P,$$

sans exprimer ainsi que $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ soient identiques, mais en désignant par là seulement que $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ admettent des développements de même nature. Cette convention ne donnera lieu à aucune obscurité.

36. Théorème I. — *Si* $\varphi(y) = L + P$ *et si* β *est un nombre quelconque, on aura encore les deux relations*

$$\varphi(y) \sin(\beta ly) = L + P,$$
$$\varphi(y) \cos(\beta ly) = L + P.$$

Démonstration. La démonstration étant la même dans les deux

cas, nous établirons la première relation seulement. Posons l'équation (où tout est déterminé)

$$\varphi(y) = (A + \varepsilon) + \sum_n (a_n \cos \alpha_n ly + b_n \sin \alpha_n ly).$$

Il peut se présenter deux cas :

1° S'il n'y a pas de terme en $\cos \beta ly$ dans la série, on aura

$$\varphi(y) \cos \beta ly = \varepsilon \cos \beta ly + \left[A \cos \beta ly + \sum_n (a_n \cos \alpha_n ly + b_n \sin \alpha_n ly) \cos \beta ly \right].$$

Mais à cause des décompositions :

$$2 \cos \alpha_n ly \cos \beta ly = \cos (\alpha_n + \beta) ly + \cos (\alpha_n - \beta) ly,$$
$$2 \sin \alpha_n ly \cos \beta ly = \sin (\alpha_n + \beta) ly + \sin (\alpha_n - \beta) ly,$$

la quantité entre crochets est encore une expression de la forme P. Le premier terme $\varepsilon \cos \beta ly$, tendant vers zéro quand y tend vers l'infini, est de la forme L. Par conséquent, le théorème est démontré.

2° Si le cosinus $\cos \beta ly$ figure dans la série, celle-ci contiendra, après la multiplication par ce cosinus, un seul terme, par exemple

$$b_n \cos^2 \beta ly = \frac{b_n}{2}(1 + \cos 2\beta ly),$$

renfermant le carré d'une ligne trigonométrique. En isolant ce terme, on pourra écrire

$$\varphi(y) \cos \beta ly = \left(\frac{b_n}{2} + \varepsilon \cos \beta ly \right) + \left[\frac{b_n}{2} \cos 2\beta ly + \sum_n{}' (a_n \cos \alpha_n ly + b_n \sin \alpha_n ly) \cos \beta ly \right],$$

et cette expression est encore de la forme L + P.

On remarquera que le nouveau terme convergent a pour valeur

$$L = \frac{b_n}{2} + \varepsilon \cos \beta l y.$$

Nous aurons besoin de ce résultat tout à l'heure.

37. Théorème II. — *Si* $\varphi(y) = L + P$, *on a aussi*

$$\frac{1}{y}\int^{\cdot} \varphi(y)\, dy = L + P.$$

Démonstration. En remplaçant les lignes trigonométriques par des exponentielles imaginaires, on peut mettre $\varphi(y)$ sous la forme

$$\varphi(y) = (A + \varepsilon) + \sum a y^{\alpha i}.$$

La série Σa est absolument convergente par hypothèse; la série $\Sigma a y^{\alpha i}$ l'est donc uniformément. Par suite, l'intégration terme à terme ne peut soulever aucune critique, et il vient, C désignant la constante d'intégration,

$$\frac{1}{y}\int \varphi(y) dy = \frac{1}{y}\left(C + \int^{\cdot} (A + \varepsilon) dy\right) + \sum \frac{a}{\alpha i + 1} y^{\alpha i}.$$

Au second membre, le premier terme tend visiblement vers A quand y tend vers l'infini; d'autre part, la nouvelle série est de même nature que l'ancienne. Le théorème est donc démontré.

38. Théorème III. — *Si* $\varphi(y) = L + P$, *on a*

$$A = \lim_{y=\infty} L = \lim_{y=\infty} \frac{1}{ly}\int_1^y \varphi(y) \frac{dy}{y}.$$

Démonstration. Écrivons, comme au numéro précédent,

$$\varphi(y) = (A + \varepsilon) + \sum a y^{\alpha i}.$$

On peut intégrer terme à terme comme ci-dessus; donc

$$\int_1^y \varphi(y)\frac{dy}{y} = \int_1^y (\mathrm{A}+\varepsilon)\frac{dy}{y} + \sum a \int_1^y y^{\alpha i-1}dy$$
$$= (\mathrm{A}+\varepsilon')ly + \sum a \frac{y^{\alpha i}-1}{\alpha i}.$$

Comme α ne peut pas tendre vers zéro par hypothèse (35), la série $\Sigma\frac{a}{\alpha}$ est absolument convergente comme Σa. La somme, au second membre de l'équation précédente, conserve donc toujours une valeur finie. D'autre part, ε' tend vers zéro comme ε. Il vient donc à la limite

$$\lim_{y=\infty} \frac{1}{ly}\int_1^y \varphi(y)\frac{dy}{y} = \mathrm{A},$$

ce qu'il fallait démontrer.

39. Théorème IV. — *Si* $\varphi(y) = \mathrm{L} + \mathrm{P}$, *et si la partie périodique* P *renferme un terme tel que*

$$a_n \cos(\alpha_n ly) + b_n \sin(\alpha_n ly),$$

les deux coefficients seront donnés par les relations

$$a_n = 2\lim_{y=\infty}\frac{1}{ly}\int_1^y \varphi(y)\cos(\alpha_n ly)\frac{dy}{y},$$

$$b_n = 2\lim_{y=\infty}\frac{1}{ly}\int_1^y \varphi(y)\sin(\alpha_n ly)\frac{dy}{y}.$$

Démonstration. Comme on l'a montré dans la démonstration du théorème I (2°), $\varphi(y)\cos(\alpha_n ly)$ est une fonction de la forme L + P, dans laquelle L a pour limite $\frac{1}{2}a_n$. De même $\varphi(y)\sin(\alpha_n ly)$ est une fonction de la forme L + P, dans laquelle L a pour limite $\frac{1}{2}b_n$. Le théorème actuel se ramène donc au précédent.

40. Théorème V. — *Si* $\varphi(y) = L + P$, *et si* P *n'a pas de terme en* cos βly (*ou en sin* βly), *on aura*

$$\lim_{y=\infty} \frac{1}{ly}\int_1^y \varphi(y)\cos(\beta ly)\frac{dy}{y} = 0, \quad \text{ou} \quad \lim_{y=\infty} \frac{1}{ly}\int_1^y \varphi(y)\sin(\beta ly)\frac{dy}{y} = 0.$$

Démonstration. Comme on l'a montré dans la démonstration du théorème I (1°), la fonction $\varphi(y)\cos(\beta ly)$ est une fonction de la forme L + P, dans laquelle L a pour limite zéro. La même chose a lieu pour $\varphi(y)\sin(\beta ly)$. Le théorème actuel se ramène donc encore au théorème III.

41. Théorème VI. — *Si la fonction* $\varphi(y)$ *peut être représentée par un développement de la forme* L + P, *elle ne peut l'être que d'une seule manière.*

Démonstration. Il s'agit d'établir que si l'on a

$$\begin{aligned}\varphi(y) &= (A + \varepsilon) + \sum (a_n \cos \alpha_n ly + b_n \sin \alpha_n ly)\\ &= (A' + \varepsilon') + \sum (a'_n \cos \alpha'_n ly + b'_n \sin \alpha'_n ly),\end{aligned}$$

les parties convergentes et les parties périodiques des deux développements sont identiques terme pour terme. C'est ce qui a lieu par les théorèmes précédents.

D'une part, $A = A'$ en vertu du théorème III; d'autre part, les parties périodiques renfermeront les lignes trigonométriques des mêmes arcs avec les mêmes coefficients, en vertu des théorèmes IV et V. C'est là ce qu'exprime l'énoncé du théorème.

42. *Remarques.* — Les théorèmes précédents vont servir à démontrer que $\zeta(s)$ n'a pas de racines de la forme $1 + \beta i$. On peut déjà prévoir comment ce résultat sera atteint. Nous montrerons que l'hypothèse d'une racine $\rho = 1 + \beta i$ conduit à exprimer une même fonction de deux manières différentes par un développement de la forme L + P. Ce résultat, contredisant les théorèmes précédents, doit faire rejeter l'hypothèse initiale.

Naturellement, l'équation qui va servir de point de départ est

celle du n° 34. Celle-ci en contient en réalité deux distinctes par la séparation des parties réelles et imaginaires. On obtient de cette manière deux développements de la nature de ceux que nous venons d'étudier, savoir (puisque $\rho_1 = 1 + \beta i$) :

$$(1) \quad . \quad . \begin{cases} \sum_{p<y} \frac{lp}{p}(1 + \cos\beta lp) - \frac{1+\cos\beta ly}{y} \sum_{p<y} lp = \mathrm{L} + \mathrm{P}, \\ \sum_{p<y} \frac{lp}{p}\sin\beta lp - \frac{\sin\beta ly}{y}\sum_{p<y} lp = \mathrm{L} + \mathrm{P}. \end{cases}$$

Les valeurs définies des parties périodiques P s'obtiennent facilement et nous en aurons besoin plus tard. Mais nous allons commencer par déduire des équations précédentes deux conséquences fondamentales qui tiennent à la nature seule des développements et vont permettre de simplifier davantage encore ces deux équations. Ce sera l'objet du paragraphe suivant.

§ 2. — *Deux conséquences des équations* (1) *du paragraphe précédent.*

43. Première conséquence. - *La somme étendue aux nombres premiers* $< y$

$$\sum_{p<y} \frac{lp}{p}(1 + \cos\beta lp)$$

converge vers une limite finie quand y *tend vers l'infini.*

Démonstration. Remarquons que ($1 + \cos\beta lp$) ne peut être négatif; que dès lors la somme $\sum_{p<y}$ de l'énoncé croît sans cesse avec y; donc, de deux choses l'une : ou bien cette somme tendra vers l'infini avec y, ou bien elle convergera vers une limite finie quand y tendra vers l'infini. Mais l'équation

$$\sum_{p<y} \frac{lp}{p}(1 + \cos\beta lp) - \frac{1+\cos\beta ly}{y}\sum_{p<y} lp = \mathrm{L} + \mathrm{P}$$

prouve que cette somme ne peut pas croître indéfiniment, car

L et P sont finis par leur nature même, et le rapport $\frac{1}{y}\sum_{p<y} lp$ conserve toujours une valeur voisine de l'unité, comme l'a montré M. Tchebichef (n° 29). Donc la somme en question doit être convergente.

44. Corollaire I. — *Si l'on partage les nombres premiers en deux classes, les nombres* p_1 *pour lesquels*

$$1 + \cos\beta l p_1 > \varepsilon,$$

et les nombres p_2 *pour lesquels*

$$1 + \cos\beta l p_2 < \varepsilon,$$

quelque petit que soit le nombre positif ε, *la somme*

$$\sum_{p_1<y} \frac{lp_1}{p_1}$$

composée des seuls nombres premiers p_1 *convergera vers une limite finie quand on fera croître* y *indéfiniment.*

Démonstration. Tous les termes étant positifs, il suffit de montrer que la somme ne peut pas croître indéfiniment. Pour cela on remarque l'inégalité évidente

$$\sum_{p<y} \frac{lp}{p}(1 + \cos\beta lp) > \sum_{p_1<y} \frac{lp_1}{p_1}(1 + \cos\beta l p_1),$$

parce que le premier membre renferme tous les termes du second plus d'autres termes positifs. Mais on a dans cette inégalité $(1 + \cos\beta l p_1) > \varepsilon$; on en tire donc

$$\sum_{p_1<y} \frac{lp_1}{p_1} < \frac{1}{\varepsilon}\sum_{p<y} \frac{lp}{p}(1 + \cos\beta lp),$$

et, comme le second membre a une valeur finie pour y infini quelque petit que soit ε, le théorème est établi.

45. Corollaire II. — *Si l'on fait tendre* y *vers l'infini, on a*

$$\lim_{y=\infty} \frac{1}{y} \sum_{p<y} lp(1 + \cos \beta lp) = 0.$$

Démonstration. Si l'on met l'expression ci-dessus sous la forme suivante :

$$\sum_{p<y} \left(\frac{p}{y}\right) \frac{lp}{p}(1 + \cos \beta lp),$$

on reconnait que tous ses termes s'obtiennent en multipliant les termes correspondants de la série convergente à termes positifs

$$\sum \frac{lp}{p}(1 + \cos \beta lp),$$

étendue à tous les nombres premiers, par des facteurs nuls ou de la forme $\left(\frac{p}{y}\right)$ qui sont tous plus petits que *un*, et qui tendent tous vers zéro quand y tend vers l'infini. Donc cette somme tend vers zéro quand y tend vers l'infini.

46. Corollaire III. — *Si* y *tend vers l'infini, on a aussi*

$$\lim_{y=\infty} \frac{1}{y} \sum_{p<y} lp \mid \sin \beta lp \mid = 0.$$

Démonstration. Soit ε un nombre positif arbitrairement petit et décomposons la somme précédente en deux autres : l'une relative aux nombres premiers p_1 pour lesquels

$$1 + \cos \beta lp_1 > \varepsilon,$$

l'autre aux nombres p_2 pour lesquels

$$1 + \cos \beta lp_2 < \varepsilon.$$

On aura

$$\frac{1}{y} \sum_{p<y} lp \mid \sin \beta lp \mid = \frac{1}{y} \sum_{p_1<y} lp_1 \mid \sin \beta lp_1 \mid + \frac{1}{y} \sum_{p_2<y} lp_2 \mid \sin \beta lp_2 \mid.$$

Dans le second membre, le premier terme peut se mettre sous la forme

$$\sum_{p_1<} \left| \frac{p_1 \sin \beta l p_1}{y} \right| \frac{lp_1}{p_1},$$

et il tendra vers zéro quand y tendra vers l'infini, car tous ses termes s'obtiennent en multipliant ceux de la série convergente à termes positifs (corollaire I)

$$\sum \frac{lp_1}{p_1}$$

par des facteurs nuls ou de la forme $\left|\frac{p_1 \sin \beta l p_1}{y}\right|$ qui sont tous plus petits que *un* et tendent tous vers zéro quand y tend vers l'infini.

Enfin, dans le second terme, on a

$$|\sin \beta l p_2| = \sqrt{1 + \cos \beta l p_2}\sqrt{1 - \cos \beta l p_2} < \sqrt{2\varepsilon},$$

et, par conséquent, ce second terme vérifie l'inégalité

$$\frac{1}{y} \sum_{p_2<y} lp_2 \, |\sin \beta l p_2| < \sqrt{2\varepsilon}\, \frac{1}{y} \sum_{p_2<y} lp_2.$$

D'ailleurs, comme nous le savons, le rapport $\frac{1}{y} \sum_{p_2<y} lp_2$ ne peut pas surpasser une limite voisine de l'unité. Donc ce second terme est aussi petit que l'on veut avec ε.

Il résulte de là que l'expression

$$\lim_{y=\infty} \frac{1}{y} \sum_{p<y} lp \, |\sin \beta l p|$$

est aussi petite que l'on veut avec ε, et est, par conséquent, rigoureusement nulle.

47. Corollaire IV. — *Si* y *tend vers l'infini, on a*

$$\lim_{y=\infty} \frac{1}{ly} \sum_{p<y} \frac{lp}{p} \, |\sin \beta l p| = 0.$$

Démonstration. Décomposons les nombres premiers dans les deux mêmes classes p_1 et p_2 qu'au numéro précédent. On a

$$\sum_{p<y} \frac{lp}{p} \mid \sin \beta lp \mid < \sum_{p_1<y} \frac{lp_1}{p_1} + \sum_{p_2<y} \frac{lp_2}{p_2} \mid \sin \beta lp_2 \mid .$$

Quand y tend vers l'infini, la première somme du second membre tend vers une limite finie (corollaire I), donc le quotient de cette somme par ly aura pour limite zéro. En ce qui concerne la seconde somme, on peut poser les inégalités

$$\frac{1}{ly} \sum_{p_2<y} \frac{lp_2}{p_2} \mid \sin \beta lp_2 \mid < \sqrt{2\varepsilon} \frac{1}{ly} \sum_{p_2<y} \frac{lp_2}{p_2} < \sqrt{2\varepsilon} \frac{1}{ly} \sum_{p^m<y} \frac{lp}{p^m}.$$

Donc ce quotient est aussi petit que l'on veut avec ε, car nous avons démontré au n° 29 que le rapport $\frac{1}{ly} \sum_{p^m<y} \frac{lp}{p^m}$ a pour limite l'unité.

En résumé donc, le rapport dont il est question dans l'énoncé du corollaire décroît au-dessous de toute limite donnée $\sqrt{2\varepsilon}$ et a par conséquent pour limite zéro.

48. Deuxième conséquence. — *La somme étendue aux nombres premiers* $< y$

$$\sum_{p<y} \frac{lp}{p} \sin \beta lp$$

tend vers une limite déterminée quand y *tend vers l'infini.*

Démonstration. Il ne sera pas inutile de remarquer que cette deuxième conséquence est moins apparente que la première et que l'on ne peut plus établir que la convergence soit absolue. La convergence n'a lieu que quand les termes s'introduisent dans l'ordre indiqué, c'est-à-dire dans l'ordre des nombres premiers. Il est bien vrai sans doute que $\sin \beta lp$ est infiniment petit en même temps que $1 + \cos \beta lp$, mais il est infiniment petit de

l'ordre de $\sqrt{1 + \cos\beta lp}$ seulement et l'ordre de décroissance des termes des deux sommes

$$\sum \frac{lp}{p} \sin\beta lp \quad \text{et} \quad \sum \frac{lp}{p}(1 + \cos\beta lp)$$

n'est pas le même.

Pour démontrer le théorème, nous devons avoir de nouveau recours aux équations (1) du n° 42. On peut déjà, dans la première, faire passer du premier au second membre le terme

$$\sum_{p<y} \frac{lp}{p}(1 + \cos\beta lp)$$

qui est convergent et peut être compris dans la partie L du second membre. Les équations (1) deviennent alors plus simplement, en changeant les signes,

$$(2) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1 + \cos\beta ly}{y} \sum_{p<y} lp = \mathrm{L} + \mathrm{P}, \\ & \frac{\sin\beta ly}{y} \sum_{p<y} lp - \sum_{p<y} \frac{lp}{p} \sin\beta lp = \mathrm{L} + \mathrm{P}. \end{aligned} \right.$$

Nous commencerons par déduire de ces deux équations que la somme $\sum\limits_{p<y} \frac{lp}{p} \sin\beta lp$ doit admettre un développement de la forme L + P.

Appliquons, à cet effet, le théorème II du paragraphe précédent, il viendra en intégrant la seconde équation

$$(3) \quad \frac{1}{y}\int_1^y dy\left[\frac{\sin\beta ly}{y}\sum_{p<y} lp\right] - \frac{1}{y}\int_1^y dy\left[\sum_{p<y}\frac{lp}{p}\sin\beta lp\right] = \mathrm{L} + \mathrm{P}.$$

Nous allons calculer successivement ces deux intégrales et nous commencerons par la première. On a par décomposition

$$\int_1^y dy\left[\frac{\sin\beta ly}{y}\sum_{p<y} lp\right] = \sum_{p<y} lp \int_p^y \frac{\sin\beta ly}{y}\, dy.$$

On remarque, en effet, que dans le second membre la limite inférieure de l'intégrale qui multiplie lp doit être p, car le terme qui renferme lp ne s'introduit dans la somme qu'à partir de la valeur $y = p$. En effectuant les intégrations, on trouve donc

$$\int_1^y dy \left[\frac{\sin \beta l y}{y} \sum_{p<y} lp\right] = -\frac{1}{\beta}\sum_{p<y} lp(\cos \beta l y - \cos \beta l p)$$

$$= -\frac{1 + \cos \beta l y}{\beta} \sum_{p<y} lp + \frac{1}{\beta}\sum_{p<y} lp(1 + \cos \beta l p).$$

Si l'on divise par y, il vient par le corollaire II (n° 45)

$$\lim_{y=\infty} \frac{1}{\beta y}\sum_{p<y} lp(1 + \cos \beta l p) = 0.$$

On a donc une relation de la forme

$$(4) \qquad \frac{1}{y}\int_1^y dy\left[\frac{\sin \beta l y}{y}\sum_{p<y} lp\right] = -\frac{1 + \cos \beta l y}{\beta y}\sum_{p<y} lp + \mathrm{L},$$

le terme convergent L tendant ici vers zéro quand y tend vers l'infini.

Mais si l'on remonte à la première des équations (2) du numéro actuel, on voit qu'elle exprime que le premier terme du second membre de l'équation (4) est de la forme L + P. Par suite l'équation (4) est aussi de la forme

$$(5) \quad \ldots \quad \frac{1}{y}\int_1^y dy\left[\frac{\sin \beta l y}{y}\sum_{p<y} lp\right] = \mathrm{L} + \mathrm{P}.$$

Passons à la seconde intégrale de l'équation (3). On a comme ci-dessus

$$\int_1^y dy \sum_{p<y} \frac{lp}{p} \sin \beta l p = \sum_{p<y}\left[\frac{lp}{p}\sin \beta l p \int_p^y dy\right],$$

$$\frac{1}{y}\int_1^y dy \sum_{p<y}\frac{lp}{p}\sin \beta l p = \sum_{p<y}\frac{lp}{p}\sin \beta l p - \frac{1}{y}\sum_{p<y} lp \sin \beta l p.$$

Mais le dernier terme de cette équation tend vers zéro pour y infini en vertu du corollaire III (n° 46), il est donc de la forme L, et l'équation elle-même prend la forme

$$(6) \quad . \; . \; . \; \frac{1}{y}\int_1^y dy \sum_{p<y} \frac{lp}{p} \sin \beta lp = \sum_{p<y} \frac{lp}{p} \sin \beta lp + \mathrm{L}.$$

Remplaçons dans l'équation (3) les intégrales par leurs valeurs (5) et (6) et faisons passer au second membre les termes des types L et P; il vient un résultat de la forme

$$(7) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; \sum_{p<y} \frac{lp}{p} \sin \beta lp = \mathrm{L} + \mathrm{P}.$$

C'est le premier point que nous voulions établir. La démonstration s'achève maintenant facilement. Je dis que la partie périodique P doit être identiquement nulle.

Supposons, en effet, qu'elle renferme un terme tel que

$$a \sin \alpha ly.$$

Le coefficient a sera donné par la formule (théor. IV, n° 39)

$$\frac{1}{2} a = \lim_{y=\infty} \frac{1}{ly}\int_1^y \frac{dy}{y}\left[\sum_{p<y} \frac{lp}{p} \sin \beta lp\right] \sin \alpha ly$$

$$= \lim_{y=\infty} \frac{1}{ly} \sum_{p<y} \frac{lp}{p} \sin \beta lp \int_p^y \frac{\sin \alpha ly}{y} dy$$

$$= - \lim_{y=\infty} \frac{1}{\alpha ly} \sum_{p<y} \left[\frac{lp}{p} (\cos \alpha ly - \cos \alpha lp) \sin \beta lp\right].$$

On en conclut

$$\frac{1}{2} \bmod a < \frac{2}{\alpha} \lim_{y=\infty} \frac{1}{ly} \sum_{p<y} \frac{lp}{p} \mid \sin \beta lp \mid,$$

et par conséquent a est nul en vertu du corollaire IV (n° 47).

On prouverait exactement de même que P ne peut pas renfermer de cosinus et par conséquent l'équation (7) doit se réduire à

$$\sum_{p<y} \frac{lp}{p} \sin \beta lp = \mathrm{L}.$$

C'est la seconde conséquence qu'il s'agissait d'établir.

§ 3. — *Simplification définitive de l'équation du n° 34 et contradiction qui en résulte.*

49. Nous venons de démontrer dans le précédent paragraphe que les deux sommes

$$\sum_{p<y} \frac{lp}{p}(1 + \cos \beta lp) \quad \text{et} \quad \sum_{p<y} \frac{lp}{p} \sin \beta lp$$

convergent vers des limites finies quand y tend vers l'infini. Il en sera de même pour la somme algébrique

$$\sum_{p<y} lp \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^{\rho_1}}\right) = \sum_{p<y} \frac{lp}{p}(1 + \cos \beta lp) - i \sum_{p<y} \frac{lp}{p} \sin \beta lp.$$

Donc, si nous nous reportons à l'équation (15) du n° 34, nous reconnaîtrons qu'il est permis de faire passer du premier au second membre le premier terme qui est de la forme L. On obtient ainsi, en changeant les signes,

$$(8) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y^{\rho_1}}\right) \sum_{p<y} lp = \mathrm{L} + \mathrm{P},$$

et P, ayant changé de signe, a pour valeur (34) (form. 16)

$$\mathrm{P} = -\frac{\rho_1}{1-\rho_1} y^{1-\rho_1} + \underset{\rho}{\mathrm{S}} \frac{y^{\rho-1}}{\rho(\rho-1)} + \rho_1 \underset{\rho}{\mathrm{S}'} \frac{y^{\rho-\rho_1}}{\rho(\rho-\rho_1)}.$$

Dans l'équation (8) on peut égaler séparément les parties

réelles et imaginaires. Mais afin d'éviter d'écrire des termes inutiles, nous remarquerons dès maintenant que la somme

$$\underset{\rho}{\mathrm{S}}\,\frac{y^{\rho-1}}{\rho(\rho-1)}$$

est réelle, parce que les racines ρ sont conjuguées deux à deux (n° 3).

50. Pour simplifier l'écriture, désignons avec les lettres $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{J}$ respectivement la partie réelle et la partie imaginaire d'une quantité complexe, c'est-à-dire que l'on aura, u et v étant réels,

$$\mathfrak{R}(u+iv)=u,\quad \mathfrak{J}(u+iv)=v.$$

Cela posé, égalons séparément les parties réelles et imaginaires des deux membres de l'équation (8), il viendra, eu égard à la remarque finale du numéro précédent,

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1+\cos\beta ly}{y}\sum_{p<y} lp=\mathfrak{R}\left[\mathrm{L}-\frac{\rho_1}{1-\rho_1}y^{1-\rho_1}+\underset{\rho}{\mathrm{S}}\,\frac{y^{\rho-1}}{\rho(\rho-1)}+\rho_1\underset{\rho}{\mathrm{S}'}\,\frac{y^{\rho-\rho_1}}{\rho(\rho-\rho_1)}\right]\\ &-\frac{\sin\beta ly}{y}\sum_{p<y} lp=\mathfrak{J}\left[\mathrm{L}-\frac{\rho_1}{1-\rho_1}y^{1-\rho_1}+\rho_1\underset{\rho}{\mathrm{S}'}\,\frac{y^{\rho-\rho_1}}{\rho(\rho-\rho_1)}\right].\end{aligned}\right.$$

Les termes $\mathfrak{R}\mathrm{L}$ et $\mathfrak{J}\mathrm{L}$ sont les parties convergentes des deux développements. Leur valeur peut se calculer, mais il est inutile de les connaître.

Je vais maintenant démontrer que les deux équations (9) sont en contradiction l'une avec l'autre.

Pour cela, multiplions la seconde équation par dy et intégrons, en remarquant que par rapport à la variable réelle y on peut intégrer sous le signe $\mathfrak{J}$; puis divisons encore toute l'équation par y. Il viendra, en désignant par L′ une nouvelle quantité convergente quand y tend vers l'infini,

$$-\frac{1}{y}\int_1^y dy\left[\frac{\sin\beta ly}{y}\sum_{p<y} lp\right]$$

$$=\mathfrak{J}\left[\mathrm{L}'-\frac{\rho_1}{(1-\rho_1)(2-\rho_1)}y^{1-\rho_1}+\rho_1\underset{\rho}{\mathrm{S}'}\,\frac{y^{\rho-\rho_1}}{\rho(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_1+1)}\right].$$

Mais nous avons déjà calculé au paragraphe précédent (n° 48, form. 4) l'intégrale du premier membre. Nous avons trouvé (page 54)

$$-\frac{1}{y}\int_1^y dy\left[\frac{\sin\beta ly}{y}\sum_{p<y} lp\right] = \frac{1+\cos\beta ly}{\beta y}\sum_{p<y} lp + \mathrm{L}.$$

Remplaçons donc l'intégrale par sa valeur et multiplions l'équation par β, nous trouverons, en désignant par L″ une nouvelle quantité convergente pour y infini,

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1+\cos\beta ly}{y}\sum_{p<y} lp \\ &= \beta\mathfrak{J}\left[\mathrm{L}'' - \frac{\rho_1}{(1-\rho_1)(2-\rho_1)}y^{1-\rho_1} + \rho_1\underset{\rho}{\mathrm{S}'}\frac{y^{\rho-\rho_1}}{\rho(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_1+1)}\right].\end{aligned}\right.$$

En vertu du théorème VI (n° 41), ce nouveau développement doit être identique à celui que fournit le second membre de la première équation (9). Or c'est ce qui est impossible, comme nous allons le montrer.

Identifions, en effet, les deux parties périodiques. Il vient

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathfrak{R}\left[-\frac{\rho_1}{1-\rho_1}y^{1-\rho_1} + \underset{\rho}{\mathrm{S}}\frac{y^{\rho-1}}{\rho(\rho-1)} + \rho_1\underset{\rho}{\mathrm{S}'}\frac{y^{\rho-\rho_1}}{\rho(\rho-\rho_1)}\right] \\ &= \beta\mathfrak{J}\left[-\frac{\rho_1}{(1-\rho_1)(2-\rho_1)}y^{1-\rho_1} + \rho_1\underset{\rho}{\mathrm{S}'}\frac{y^{\rho-\rho_1}}{\rho(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_1+1)}\right].\end{aligned}\right.$$

Les deux membres, toutes réductions faites, doivent être composés des lignes trigonométriques des mêmes arcs affectées des mêmes coefficients. Cette identité de composition est la seule chose qui nous intéresse pour le moment. Elle doit persister si l'on différentie les deux membres par rapport à y, sans qu'il y ait lieu de se demander si les sommes restent ou ne restent pas convergentes. Multiplions donc l'équation (11) qui précède par y, différentions-la deux fois de suite et multiplions-la ensuite par y.

Il viendra, sans calcul, si l'on remarque que ces opérations se font sous les signes $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{I}$,

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} &\mathfrak{R}\left[-(2-\rho_1)\rho_1 y^{1-\rho_1} + \underset{\rho}{\mathrm{S}}\, y^{\rho-1} + \rho_1 \underset{\rho}{\mathrm{S}}' \frac{\rho-\rho_1+1}{\rho} y^{\rho-\rho_1}\right] \\ &\qquad = \beta\mathfrak{I}\left[-\rho_1 y^{1-\rho_1} + \underset{\rho}{\mathrm{S}}' \frac{\rho_1}{\rho} y^{\rho-\rho_1}\right]. \end{aligned} \right.$$

Je dis d'abord que l'identité est impossible si ρ prend une infinité (*) de valeurs dans cette relation. Comparons, en effet, dans cette hypothèse, les cosinus qui figurent dans les deux membres. Dans le premier membre, les cosinus de la première somme $\underset{\rho}{\mathrm{S}}\, y^{\rho-1}$ ont tous pour coefficients $+1$; les coefficients des cosinus réels de la seconde somme tendent visiblement vers ce même nombre $+1$ quand ρ croît indéfiniment, comme le montre la décomposition

$$\rho_1 \frac{\rho-\rho_1+1}{\rho} y^{\rho-\rho_1} = (1+\beta i) y^{\rho-\rho_1} + \frac{\rho_1(1-\rho_1)}{\rho} y^{\rho-\rho_1},$$

dans laquelle le second terme est évanouissant. Par conséquent, le premier membre renferme une infinité de cosinus avec des coefficients finis. Dans le second membre, au contraire, tous les coefficients tendent vers zéro quand ρ croît indéfiniment. L'égalité des coefficients devient donc impossible à partir d'un certain rang. Il ne peut y avoir, par conséquent, qu'un nombre limité de valeurs de ρ.

Mais j'ajoute, d'autre part, qu'il est également impossible que ρ ne prenne qu'un nombre limité de valeurs. En effet, dans ce cas, je choisirais pour ρ_1 la racine $1+\beta i$ dans laquelle β a la plus grande valeur possible. Cela posé, il y aura dans la somme $\underset{\rho}{\mathrm{S}}'$ de chacun des deux membres de l'équation (12) un terme qui existera toujours et ne peut se réduire avec aucun autre du même membre. C'est celui dans lequel $\rho = 1-\beta i$ est

(*) Il ne faut pas oublier que ρ représente successivement dans les sommes $\underset{\rho}{\mathrm{S}}$ toutes les racines de la forme $1+\beta i$, et celles-là seulement. (Voir n° 32.)

le conjugué de ρ_1, car $\rho - \rho_1$ a, dans ce terme, une valeur $\rho - \rho_1 = -2\beta i$ qui n'est atteinte dans aucun autre. On doit donc avoir identiquement, pour $\rho_1 = 1 + \beta i$, $\rho = 1 - \beta i$,

$$\mathfrak{R}(\rho - \rho_1 + 1)\frac{\rho_1}{\rho} y^{\rho - \rho_1} = \beta\mathfrak{J}\frac{\rho_1}{\rho} y^{\rho - \rho_1}.$$

Cette identité se réduit, pour $y = 1$, à

$$(13) \quad \ldots\ldots \quad \mathfrak{R}(1 - 2\beta i)\frac{1+\beta i}{1-\beta i} = \beta\mathfrak{J}\frac{1+\beta i}{1-\beta i}.$$

Mais, comme on a

$$1 - 2\beta i = (1 - \beta i) - \beta i,$$

la dernière identité (13) se transforme encore dans la suivante

$$\mathfrak{R}(1 + \beta i) - \beta\mathfrak{R}\, i\,\frac{1+\beta i}{1-\beta i} = \beta\mathfrak{J}\frac{1+\beta i}{1-\beta i}.$$

Enfin, par la relation $\mathfrak{R}(u + iv)\, i = -\mathfrak{J}(u + iv)$, on trouve

$$\mathfrak{R}(1 + \beta i) = 0,$$

ce qui est absurde. Donc l'hypothèse qui nous a conduit à cette contradiction doit être rejetée, et nous pouvons énoncer ce théorème important :

51. Théorème. — *La fonction* $\zeta(s)$ *n'a pas de racines de la forme* $1 + \beta i$ *et par conséquent toutes les racines de* $\zeta(s)$ *sans exception ont leur partie réelle plus petite que l'unité.*

CHAPITRE IV.

Conséquences asymptotiques relatives a la théorie des nombres premiers.

§ 1. — *Expression asymptotique de l'équation fondamentale du n° 28.*

52. Revenons, maintenant que nous sommes en possession de connaissances nouvelles, à l'équation du n° 28,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \sum_{p^m<y}\frac{lp}{p^m}-\frac{1}{y}\sum_{p^m<y}lp &= ly-\lim_{u=1}\left[\frac{\zeta'(u)}{\zeta(u)}+\frac{u}{u-1}\right]\\ &\quad+\frac{1}{y}\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}-\sum_{\rho}\frac{y^{\rho-1}}{\rho(\rho-1)}\\ &\quad-\sum_{m}\frac{y^{-2m-1}}{2m(2m+1)}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on fait tendre y vers l'infini, ainsi que nous l'avons déjà remarqué pour la seconde, les deux sommes

$$\sum_{\rho}\frac{y^{\rho-1}}{\rho(\rho-1)},\quad \sum_{m}\frac{y^{-2m-1}}{2m(2m+1)}$$

convergent vers zéro. La chose est claire pour la seconde, mais elle est aussi rigoureusement vraie pour la première, car dans tous les termes sans exception $\rho-1$ a sa partie réelle négative, donc tous les termes convergent vers zéro, et comme la série converge uniformément, la somme de la série doit aussi tendre vers zéro. Il est bien certain que la série converge uniformé-

ment, car elle a tous ses termes moindres que la série absolument convergente

$$\sum_\rho \frac{1}{\rho(\rho-1)},$$

dont les termes ne dépendent plus de y.

Il est utile toutefois de remarquer que nous ne sommes pas en état d'apprécier avec quelle rapidité la somme

$$\sum_\rho \frac{y^{\rho-1}}{\rho(\rho-1)}$$

converge vers zéro quand y tend vers l'infini. Il peut se faire que cette somme converge vers zéro moins rapidement qu'aucune puissance négative de y. C'est ce qui arriverait si les racines de $\zeta(s)$ se rapprochaient indéfiniment de la droite $x = 1$ pour des valeurs indéfiniment croissantes de leur module. Or il n'est pas démontré jusqu'à présent qu'il en soit autrement.

Quoi qu'il en soit, en désignant par ε une quantité qui tend vers zéro quand y augmente indéfiniment, nous pouvons mettre l'équation (1) sous la forme

$$(2)\qquad \sum_{p^m<y} \frac{lp}{p^m} - \frac{1}{y}\sum_{p^m<y} lp = ly - 1 - \lim_{s=1}\left[\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1}\right] + \varepsilon,$$

et le second membre nous fournit la valeur asymptotique du premier quand y augmente indéfiniment.

53. Cette équation (2) peut d'ailleurs se simplifier. En effet, la différence

$$\sum_{p<y} \frac{lp}{p-1} - \sum_{p^m<y} \frac{lp}{p^m} = \sum_{p<y} \frac{lp}{p^2} - \sum_{p^2<y} \frac{lp}{p^2} + \sum_{p<y} \frac{lp}{p^3} - \sum_{p^3<y} \frac{lp}{p^3} + \cdots$$

tend visiblement vers zéro quand y tend vers l'infini.

De même la différence

$$\frac{1}{y}\sum_{p^m<y} lp - \frac{1}{y}\sum_{p<y} lp = \sum_{p^2<y}\left(\frac{p^2}{y}\right)\frac{lp}{p^2} + \sum_{p^3<y}\left(\frac{p^3}{y}\right)\frac{lp}{p^3} + \cdots$$

tend, par un raisonnement connu (33), vers zéro quand y tend vers l'infini.

L'équation (2) peut donc s'écrire $\left(\text{en remarquant : } \frac{s}{s-1} = \frac{1}{s-1} + 1\right)$

$$(3) \quad \sum_{p<y}\frac{lp}{p-1} - \frac{1}{y}\sum_{p<y} lp = ly - 1 - \lim_{s=1}\left[\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1}\right] + \varepsilon.$$

Les nouvelles sommes sont simplement étendues maintenant aux nombres premiers $< y$, et ε tend toujours vers zéro pour y infini.

54. Nous allons encore montrer que la constante, indiquée sous forme de limite dans l'équation (3),

$$\lim_{s=1}\left[\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1}\right] = C,$$

n'est autre chose que la constante d'Euler.

On a, pour $s > 1$,

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{2}{2^s}}\left(1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \cdots\right),$$

d'où en égalant les dérivées logarithmiques

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{\frac{l2}{2^s} - \frac{l3}{3^s} + \cdots}{1 - \frac{1}{2^s} + \cdots} - \frac{2l2}{2^s - 2}.$$

On tire de là

$$(4)\ .\ .\ \left\{\begin{aligned}\lim_{s=1}\left[\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}+\frac{1}{s-1}\right] &= \frac{\frac{l2}{2}-\frac{l3}{3}+\frac{l4}{4}-\cdots}{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots}\\ &\quad+\lim_{s=1}\left[\frac{1}{s-1}-\frac{2l2}{2^s-1}\right].\end{aligned}\right.$$

Le dernier terme se calcule aisément par la règle de L'Hôpital. On a, pour $s=1$,

$$\frac{2^s-1-(s-1)2l2}{(s-1)(2^s-1)}=\frac{2^s l2-2l2}{2^s-1+(s-1)2^s l2}$$

$$=\frac{2^s(l2)^2}{2^s l2+2^s l2+(s-1)2^s(l2)^2}=\frac{l2}{2}.$$

On peut aussi calculer le premier terme. On a d'abord au dénominateur

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots=l2.$$

Pour calculer le numérateur, posons l'identité

$$1-\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}-\frac{1}{4^s}\cdots-\frac{1}{(2n)^s}=\left(1-\frac{2}{2^s}\right)\sum_1^n\frac{1}{n^s}+\sum_{n+1}^{2n}\frac{1}{n^s}.$$

Il vient, en différentiant,

$$\frac{l2}{2^s}-\frac{l3}{3^s}+\frac{l4}{4^s}-\cdots+\frac{l2n}{(2n)^s}=\frac{2l2}{2^s}\sum_1^n\frac{1}{n^s}-\left(1-\frac{2}{2^s}\right)\sum_1^n\frac{ln}{n^s}$$
$$-\sum_{n+1}^{2n}\frac{ln}{n^s}.$$

Faisons $s=1$ dans cette relation, nous trouverons l'équation

$$\frac{l2}{2}-\frac{l3}{3}+\frac{l4}{4}\cdots+\frac{l2n}{2n}=l2\sum_1^n\frac{1}{n}-\sum_{n+1}^{2n}\frac{ln}{n}.$$

Soit C la constante d'Euler, on a les équations asymptotiques pour n infiniment grand

$$\sum_{1}^{n} \frac{1}{n} = ln + C,$$

$$\sum_{n+1}^{2n} \frac{ln}{n} = \int_{n}^{2n} \frac{lx}{x}\, dx = \frac{1}{2}\left[(lx)^2\right]_{n}^{2n} = lnl2 + \frac{(l2)^2}{2},$$

et en substituant ces valeurs au second membre de l'équation précédente, on trouve

$$\frac{l2}{2} - \frac{l3}{3} + \frac{l4}{4} - \dots = Cl2 - \frac{(l2)^2}{2}.$$

Tout est maintenant calculé dans le second membre de l'équation (4), et cette équation nous donne

$$\lim_{s=1} \left[\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1}\right] = \frac{Cl2 - \frac{1}{2}(l2)^2}{l2} + \frac{l2}{2} = C,$$

comme nous l'avions annoncé.

En conséquence, l'équation (3) peut se mettre sous la forme

$$(5) \quad . \; . \; . \quad \sum_{p<y} \frac{lp}{p-1} - \frac{1}{y}\sum_{p<y} lp = ly - C - 1 + \varepsilon.$$

§ 2. — *Conséquences asymptotiques de cette équation.*

55. Reprenons l'équation (5), où C est la constante d'Euler,

$$(5) \quad . \; . \; . \quad \sum_{p<y} \frac{lp}{p-1} - \frac{1}{y}\sum_{p<y} lp = ly - C - 1 + \varepsilon,$$

multiplions-la par dy, puis intégrons les deux membres et divisons par y, on aura, en désignant par ε' une quantité qui tend vers zéro comme ε quand y tend vers l'infini,

$$(6) \quad \frac{1}{y}\int^{y} dy \sum_{p<y} \frac{lp}{p-1} - \frac{1}{y}\int_{1}^{y} \frac{dy}{y} \sum_{p<y} lp = \frac{1}{y}\int_{1}^{y} ly\, dy - C - 1 + \varepsilon'.$$

Calculons la première de ces intégrales, on trouve

$$\frac{1}{y}\int_1^y dy \sum_{p<y} \frac{lp}{p-1} = \frac{1}{y}\sum_{p<y}\frac{lp}{p-1}\int_p^y dy = \sum_{p<y}\frac{lp}{p-1} - \frac{1}{y}\sum_{p<y}\frac{p}{p-1}\,lp$$
$$= \sum_{p<y}\frac{lp}{p-1} - \frac{1}{y}\sum_{p<y} lp + \frac{1}{y}\sum_{p<y}\frac{lp}{p-1}.$$

On remarque que $\sum_{p<y}\frac{lp}{p-1}$ étant de l'ordre de ly à cause de l'équation (5), le dernier terme $\frac{1}{y}\sum_{p<y}\frac{lp}{p-1}$ tend vers zéro quand y croît indéfiniment. D'autre part, les deux termes précédents sont ceux du premier membre de l'équation (5); en leur substituant leur valeur donnée par cette équation, on trouve donc

$$(7) \quad \ldots \quad \frac{1}{y}\int_1^y dy \sum_{p<y}\frac{lp}{p-1} = ly - C - 1 + \varepsilon.$$

L'intégrale du second membre de l'équation (6) se calcule aussi sans difficulté :

$$(8) \quad \ldots \quad \frac{1}{y}\int_1^y ly\,dy = \frac{1}{y}\left[y(ly-1)\right]_1^y = ly - 1 + \frac{1}{y}.$$

L'équation (6) se réduira donc, en substituant ces valeurs (7) et (8), en supprimant les termes communs dans les deux membres et en changeant les signes, à la suivante :

$$(9) \quad \ldots\ldots \quad \frac{1}{y}\int_1^y \frac{dy}{y}\sum_{p<y} lp = 1 + \varepsilon,$$

ε tendant vers zéro quand y tend vers l'infini.

56. Nous allons déduire maintenant de l'équation (9) que le rapport

$$\frac{1}{y}\sum_{p<y} lp$$

tend vers l'unité quand y tend vers l'infini.

En changeant, pour plus de clarté, la variable d'intégration, l'équation (9) peut s'écrire

$$\int_1^y \frac{dx}{x} \sum_{p<x} lp = (1+\varepsilon)y.$$

Soit k un nombre positif donné, indépendant de y et arbitrairement petit. Changeons y en $(1+k)y$ dans l'équation précédente, et désignons par ε' une quantité qui tend vers zéro quand y tend vers l'infini, on aura

$$\int_1^{(1+k)y} \frac{dx}{x} \sum_{p<x} lp = (1+\varepsilon')(1+k)y.$$

On soustrait de cette équation celle qui la précède et l'on trouve

$$\int_y^{(1+k)y} \frac{dx}{x} \sum_{p<x} lp = ky + \varepsilon y + \varepsilon'(1+k)y,$$

et en divisant par ky,

$$\frac{1}{ky}\int_y^{(1+k)y} \frac{dx}{x} \sum_{p<x} lp = 1 + \frac{\varepsilon + \varepsilon'(1+k)}{k}.$$

Faisons maintenant tendre y vers l'infini, ε et ε' tendent vers zéro, et il vient, quelque petit que soit k,

$$\lim_{y=\infty} \frac{1}{ky}\int_y^{(1+k)y} \frac{dx}{x} \sum_{p<x} lp = 1.$$

Remarquons que la fonction $\sum_{p<x} lp$ est constamment constante ou croissante sous le signe d'intégration et que l'on a, par suite,

es inégalités

$$\frac{1}{ky}\int_y^{(1+k)y}\frac{dx}{x}\sum_{p<x} lp \geqq \frac{1}{ky}\sum_{p<y} lp\int_y^{(1+k)y}\frac{dx}{x} \geqq \frac{l(1+k)}{ky}\sum_{p<y} lp,$$

$$\frac{1}{ky}\int_y^{(1+k)y}\frac{dx}{x}\sum_{p<x} lp \leqq \frac{1}{ky}\sum_{(p<(1+k)y)} lp\int_y^{(1+k)y}\frac{dx}{x} \leqq \frac{l(1+k)}{ky}\sum_{p<(1+k)y} lp.$$

Par conséquent, si l'on fait tendre y vers l'infini, on aura, sans présupposer l'existence d'une limite déterminée (les inégalités pouvant n'être que des limites d'indétermination),

$$\lim_{y=\infty}\frac{l(1+k)}{ky}\sum_{p<y} lp \leqq 1,$$

$$\lim_{y=\infty}\frac{(1+k)l(1+k)}{k(1+k)y}\sum_{p<(1+k)y} lp \geqq 1.$$

D'ailleurs on peut changer y en $\frac{y}{1+k}$ dans la seconde inégalité et l'on trouve, par la combinaison des deux inégalités,

$$\frac{k}{l(1+k)} \geqq \lim_{y=\infty}\frac{1}{y}\sum_{p<y} lp \geqq \frac{k}{(1+k)l(1+k)}.$$

Dans ces relations, k est aussi petit que l'on veut; on peut le faire tendre vers zéro, et les deux membres extrêmes tendent alors vers l'unité. On a par conséquent

$$\lim_{y=\infty}\frac{1}{y}\sum_{p<y} lp = 1,$$

et l'existence de la limite est en même temps démontrée.

Nous pouvons donc énoncer le théorème important dont la démonstration rigoureuse n'avait pas encore été obtenue jusqu'à présent (*) :

(*) Le résultat a été affirmé sans démonstration par M. Stieltjes. — M. Cahen a essayé de l'établir dans sa *Thèse* de 1894, mais il y a une lacune dans sa démonstration. M. Cahen affirme (au bas de la page 44) la convergence d'une série dont tous les termes s'obtiennent en intégrant tous les termes d'une série convergente entre des limites infinies. La convergence de cette série ne repose sur rien et serait beaucoup plus difficile à démontrer que le théorème que M. Cahen veut établir.

THÉORÈME. — *La somme des logarithmes naturels des nombres premiers inférieurs à* y *est asymptotique à* y *quand* y *tend vers l'infini*

Ce théorème en donne immédiatement un autre, déjà énoncé mais non démontré jusqu'à présent.

THÉORÈME. — *Quelque petit que soit* k, *le nombre des nombres premiers compris entre* y *et* $(1 + k)y$ *augmente indéfiniment avec* y.

57. Les résultats trouvés au numéro précédent vont nous fournir une nouvelle loi asymptotique peut-être plus curieuse encore. Revenons à l'équation (5) écrite en tête du n° 55. On peut y supprimer respectivement dans les deux membres les deux termes

$$-\frac{1}{y}\sum_{p<y} lp \quad \text{et} \quad -1,$$

qui se détruisent à la limite, de telle sorte que cette équation se réduit à la relation

$$\sum_{p<y}\frac{lp}{p-1} = ly - C + \varepsilon;$$

de là le théorème remarquable que voici :

THÉORÈME. — *La différence des deux quantités indéfiniment croissantes*

$$ly - \sum_{p<y}\frac{lp}{p-1},$$

a pour limite la constante d'Euler quand y *tend vers l'infini.*

Ce théorème appelle un rapprochement. Formons les différences

$$ly - \sum_{p<y}\frac{lp}{p-1} \quad \text{et} \quad \sum_{n<y}\frac{1}{n} - ly,$$

la somme s'étendant dans la première aux nombres premiers et dans la seconde aux nombres naturels, on voit que ces deux différences ont la même valeur asymptotique, la constante d'Euler, quand on fait tendre y vers l'infini.

APPENDICE A LA PREMIÈRE PARTIE.

Réflexions applicables a une formule donnée par Riemann.

Rappelons d'abord la formule de Riemann, dont on se sert pour exprimer combien il y a de nombres premiers inférieurs à une limite donnée

$$f(x) = Li(x) + \sum_{\alpha} \left[Li(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}) + Li(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}) \right]$$
$$+ \int_x^{\infty} \frac{1}{x^2 - 1} \frac{dx}{x \log x} + \log \xi(0).$$

La fonction $f(x)$ de cette formule est définie par l'équation

$$f(x) = \sum \frac{1}{n} F(x^{\frac{1}{n}}),$$

où $F(x)$ désigne combien il y a de nombres premiers inférieurs à x. La somme $\sum_{\alpha}$ s'étend à toutes les racines α de $\xi(t)$ associées deux à deux.

Certains auteurs ont cru trouver dans ces derniers temps (*) une démonstration plus ou moins indirecte de cette formule. On nous permettra à cette occasion de faire ici quelques réflexions qui ne seront peut-être pas sans importance.

Seulement, au lieu de raisonner sur la formule de Riemann, qui ne figure pas dans notre Mémoire, nous allons raisonner sur une formule plus simple, qui est entièrement de même nature, donne lieu

(*) La dernière tentative est due à M. von Mangoldt : *Auszug aus einer Arbeit unter dem Titel: Zu Riemann's Abhandlung, über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grosse*, Sitzungsberichte der König. Preuss. Akademie der Wiss. zu Berlin, t. XXXVI, 1894.

Il y a, dans cette démonstration, une erreur irrémédiable. M. von Mangoldt admet (en haut de la page 892, p. 10 de l'extrait) qu'une somme d'un nombre H de termes, qui tendent vers zéro, tend aussi vers zéro. Mais, en même temps H augmente indéfiniment, ce que l'auteur paraît oublier. — L'article de M. von Mangoldt vient d'être traduit par M. Laugel dans les Annales de l'École normale supérieure, t. XIII, 1896.

aux mêmes difficultés et représenterait comme celle de Riemann une fonction discontinue.

Pour obtenir cette formule, supposons qu'il soit permis de différentier l'équation du n° 28 pour une valeur de y différente d'un nombre premier ou d'une puissance d'un nombre premier. Les sommes devront être traitées comme des constantes, et en multipliant ensuite par y, on trouvera l'équation

$$(2) \quad . \quad . \quad \frac{1}{y}\sum_{p^m<y} lp = 1 - \frac{1}{y}\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \sum_{\rho}\frac{y^{\rho-1}}{\rho} + \sum_{m}\frac{y^{-2m-1}}{2m}.$$

On sait d'ailleurs que la valeur asymptotique du premier membre est l'unité, premier terme du second membre, mais cela ne résulte pas de cette relation.

Je vais faire sur cette équation quelques remarques applicables sans changement à la formule de Riemann et à d'autres du même genre qui représentent ou devraient représenter des fonctions discontinues.

Le second membre de la formule (2) renferme une série qui n'est pas absolument convergente, savoir

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \sum_{\rho}\frac{y^{\rho-1}}{\rho},$$

parce qu'il résulte de la loi de croissance des racines ρ que la série

$$\sum_{\rho} \operatorname{mod}\frac{1}{\rho}$$

a une valeur infinie. Dès lors, si la série (3) est convergente, cette convergence est due aux changements de signes de ses termes, et sa valeur dépend de l'ordre dans lequel ses termes sont rangés. On peut tirer de là la conséquence suivante :

Toute appréciation de l'ordre de grandeur de la série supposée convergente

$$\sum\frac{y^{\rho-1}}{\rho},$$

tirée de la considération de la série elle-même, est dépourvue de valeur, si elle ne tient pas compte de l'ordre dans lequel les termes

sont rangés, et si elle ne repose pas sur une connaissance précise des valeurs successives des racines ρ, valeurs qui déterminent les changements de signes des termes de la série. Or l'obscurité qui enveloppe ces racines est impénétrable à l'heure actuelle, et rend, par conséquent, toute tentative d'évaluation impossible. Il résulte de là qu'alors même qu'on admettrait que la série

$$\sum_{\rho} \frac{y^{\rho-1}}{\rho}$$

est convergente et que l'équation (2) est exacte, cette équation serait pratiquement chimérique et il n'y aurait rien à en conclure.

Mais nous avons supposé ici gratuitement l'exactitude de la formule (2). Pour que la dérivation qui l'a fournie fût légitime, il faudrait pouvoir démontrer que la série (3) converge uniformément dans le voisinage de la valeur considérée de y. Pour se rendre compte de la difficulté contre laquelle toute tentative de démonstration va venir se heurter, il suffit de jeter les yeux sur le premier membre de l'équation (2). On y trouve une fonction discontinue qui change brusquement de valeur quand y devient égal à une puissance d'un nombre premier. Il résulte de là que si la formule (2) est exacte, la série

$$\sum_{\rho} \frac{y^{\rho-1}}{\rho}$$

ne peut converger uniformément que dans les intervalles de ces puissances. Donc toute preuve de l'uniformité de la convergence devra commencer par se restreindre à ces intervalles, dont la loi nous est aujourd'hui complètement inconnue.

On répondra peut-être à cette objection qu'on peut démontrer la formule par une autre voie, sans devoir se baser sur l'uniformité de la série (3).

Il y a, en effet, deux manières encore de démontrer la formule (2) ou les formules analogues.

La première consiste à considérer la série (3) comme limite d'une somme (certainement convergente)

$$\sum_{\mu} u_{\mu}(y, m),$$

dont les termes $u_p(y, m)$ dépendent d'un paramètre variable m et tendent respectivement vers ceux de la série (3) quand m tend vers une certaine limite, par exemple a. Le nombre des termes de la somme $\sum_p$ peut être illimité quel que soit m, ou seulement croître indéfiniment quand m tend vers a. Au fond, cela revient au même. Dans les deux cas, pour que le passage à la limite fût rigoureux, il faudrait pouvoir établir, d'une manière ou d'une autre, le point suivant :

Si l'on partage la somme en deux parties

$$\sum_{p=1}^{n} u_p(y, m) + \sum_{p=n+1}^{\infty} u_p(y, m),$$

l'une bornée aux n premiers termes, l'autre étendue à tous les termes suivants, il faudra pouvoir prendre n assez grand pour que la seconde somme soit aussi petite que l'on veut, quel que soit m, au moins dans le voisinage de $m = a$. Cette démonstration est certainement impossible, si on laisse y indéterminé. En effet, quelque grand que soit n, la somme

$$\sum_{p=n}^{\infty} u_p(y, m)$$

admettra, y et m variant, toutes les mêmes discontinuités que le premier membre de l'équation (2). On retombe donc au fond sur la même difficulté que tout à l'heure.

Il ne reste donc plus qu'une seule méthode, la seule, croyons-nous, qui ne soit pas irréalisable, c'est de sommer directement la série. C'est ainsi que l'on procède pour démontrer la convergence des séries de Fourier. Que l'on songe maintenant aux difficultés que l'on rencontre déjà dans la théorie de cette série où la loi de formation des termes périodiques est la plus simple qu'il soit possible d'imaginer, on sera tenté de se dire qu'alors même que l'on aurait la connaissance exacte de la composition des termes de la série (3), le problème de sommer cette série pourrait encore se heurter à des difficultés insurmontables. Que faut-il en penser tant que la loi de formation des termes est inconnue ?

Enfin, le rapprochement avec la série de Fourier appelle une dernière remarque On sait que la série de Fourier peut servir par un choix convenable de ses coefficients à la représentation d'une fonction

arbitraire. Or la série (3), comme aussi la série de Riemann écrite plus haut, comme toutes les séries analogues, n'est au fond qu'une série trigonométrique dont les éléments nous sont inconnus. Quelle lumière peut-on espérer tirer d'une pareille représentation?

La seule conclusion qu'il y ait à tirer de là, c'est que la preuve de la formule de Riemann paraît être actuellement au-dessus de toutes les ressources de l'analyse.

NOTE

SUR

L'ÉTAT INTÉRIEUR DU GLOBE TERRESTRE

PAR

Eug. FERRON

Commissaire du Gouvernement près les chemins de fer
du Grand-Duché de Luxembourg.

Dans notre travail *Sur la température du globe terrestre*, qui a paru dans le compte rendu du Congrès international des catholiques de Paris (1891), nous avons présenté et développé plusieurs arguments nouveaux, en faveur de l'hypothèse de la fluidité ignée de l'intérieur de notre planète; et à la fin de notre exposé, nous avons fait voir la possibilité physique de réaliser en partie l'hypothèse de Poisson, d'après laquelle on pourrait concevoir au centre l'existence d'un noyau solidifié, malgré une température excessivement élevée correspondante.

Peu de temps après la publication du compte rendu, il m'est parvenu une certaine confirmation partielle de cette dernière manière de voir, au sujet de laquelle je me fais un devoir d'entretenir mes confrères de la deuxième section de la Société scientifique, vu qu'elle touche à des recherches d'un éminent savant français du dernier demi-siècle et qu'elle a trait à une question scientifique longtemps controversée. A la date du 28 avril 1892, nous avons reçu, de la part de M. A. Roche, professeur de mathématiques au Lycée Louis le Grand de Paris, une lettre gracieuse et fort bienveillante, dont nous reproduirons les passages suivants, touchant la question discutée :

« Monsieur, dans le compte rendu du Congrès scientifique » des catholiques de 1891, qui m'est récemment arrivé, j'ai lu » avec le plus vif intérêt votre mémoire *Sur la température du* » *globe terrestre*. Par une voie toute différente, vous arrivez aux » mêmes résultats que mon regretté frère, feu Ed. Roche, cor- » respondant de l'Institut de France, professeur de mathéma- » tiques à la Faculté des sciences de Montpellier. Mais la lecture » même de votre Note me montre que vous n'avez pas eu con- » naissance de son travail, qui a paru dans le tome X des » *Mémoires de l'Académie des sciences et lettres de Montpellier* » (1881).

. . . .

» Je suis heureux que par la théorie mathématique de la » chaleur vous arriviez à peu près aux mêmes conclusions que » lui par les méthodes de la mécanique céleste, aidées des » inductions prudentes qui caractérisaient ses recherches. J'ai » même été frappé que la figure schématique, par laquelle vous » représentez la succession des couches de diverses densités du » sphéroïde terrestre, reproduit sensiblement celle qui résul- » terait de ses conclusions et que M. Flammarion a construite » dans l'un des Mémoires, postérieurs à la mort de mon frère, » de la *Revue d'astronomie*. »

Cette lettre, éminemment bienveillante et trop flatteuse pour moi, était accompagnée de trois brochures, parmi lesquelles se trouvait le Mémoire précité de feu Ed. Roche, *Sur l'état intérieur du globe terrestre*.

Je me plais à réitérer ici l'expression de ma vive reconnaissance à M. A. Roche, mon excellent confrère du Congrès international des catholiques, pour sa précieuse communication. Malheureusement, mes occupations ne m'ont permis que récemment d'étudier le Mémoire précité de M. Ed. Roche, *Sur l'état intérieur du globe terrestre*, qui me parut imposer un travail d'analyse assez laborieux, autrement il eût été indiqué et je me serais peut-être trouvé en situation de soumettre la présente Note au dernier Congrès tenu à Bruxelles.

Pour procéder de la manière la plus simple, relevons d'abord

les passages suivants, placés au début de son exposé : « Je me » propose de faire voir que l'hypothèse de la fluidité est incom- » patible avec la valeur de l'aplatissement superficiel, qui, » d'après les plus récentes déterminations, est supérieur à $^1/_{295}$.

. . . .

» Si l'on fait abstraction de l'écorce purement superficielle, » ainsi que d'une légère condensation vers le centre, voici » quelle serait la constitution du globe : un bloc dont la densité » est de 7 à 7,5; une couche extérieure, de densité 3, dont » l'épaisseur égale un sixième du rayon entier. »

Dans l'intérêt de la science, je dois regretter ne pouvoir partager en entier cette manière de voir, et d'être obligé de montrer, que l'accord entre cette doctrine et la théorie développée dans mon Mémoire, n'est pas aussi complet que mon honorable confrère du Congrès a bien voulu le dire dans sa communication rappelée plus haut. Et je juge d'autant plus de mon devoir d'en agir ainsi, que le Mémoire d'Ed. Roche soulève des objections, non pas à première vue, mais après mûre réflexion, objections qui me paraissent de nature à donner un nouveau et éclatant relief à la grande probabilité de l'hypothèse de Fourier.

Il est bien vrai, comme le dit l'auteur dans son « Exposé du sujet », qu'en dehors de toute considération géologique, il existe des conditions assez précises auxquelles doit satisfaire la constitution intérieure de la terre, à savoir, la densité moyenne, l'aplatissement de la surface des mers, enfin la valeur numérique d'une certaine constante, déterminée par le phénomène astronomique de la précession des équinoxes; mais, en ce qui touche le premier point, on peut se demander, pour quelles raisons l'auteur considère la loi des densités et la formule de Legendre, comme étant plus propre que la sienne à caractériser à fort peu près l'hypothèse de la fluidité complète des masses intérieures de la terre, alors que cependant la loi de Ed. Roche, savoir

$$\rho = \rho_0 (1 - \beta a^2),$$

est loin d'être une fonction discontinue; à tel point, qu'elle a été

considérée par plusieurs auteurs comme étant suffisamment continue pour se laisser appliquer au cas de notre globe, envisagé comme composé d'une masse entièrement fluide. Citons entre autres savants, M. Théodore Wand, membre du Parlement du Royaume de Bavière, auteur d'un ouvrage fort apprécié, ayant pour titre : *Die Principien der mathematischen Physik, und die Potentialtheorie* (Verlag von B.-G. Teubner, Leipzig, 1871). Au paragraphe 40 de ce livre, on trouve une détermination détaillée de la valeur de l'aplatissement de la terre, déduite des éléments numériques caractérisant la précession et la nutation, et dans l'hypothèse de sa fluidité complète.

Appliquant la loi des densités ci-dessus de Ed. Roche, M. Wand arrive à une valeur, pour l'aplatissement, égale à $^1/_{275}$, et fait observer que cette fraction concorde avec celle que l'on a déduite des résultats fournis par les expériences, qui avaient pour objet la détermination de la longueur du pendule simple sous diverses latitudes, et où l'on a trouvé pour cet aplatissement, $^1/_{283}$.

Voilà des valeurs autrement grandes que les rapports $^1/_{294}$ et $^1/_{292}$ qu'Ed Roche a cru devoir substituer à la fraction consacrée $^1/_{296}$.

Il résulte d'ailleurs de là, que, s'il est permis de trouver concordants les rapports $^1/_{275}$ et $^1/_{283}$, il doit en être de même des fractions

$$\frac{1}{296}, \quad \frac{1}{294} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{292},$$

dont les différences doivent aussi être du même ordre de grandeur que les erreurs d'observation. Et l'on peut affirmer qu'il se passera encore bien des années, peut-être des siècles, avant que quelque savant puisse prouver d'une façon absolument rigoureuse, que la valeur de l'aplatissement réel de la terre est plutôt représentée par la fraction $^1/_{294}$ que par $^1/_{296}$. A l'appui de notre assertion, citons le passage suivant du deuxième Mémoire de M. Elie Ritter, *Sur la détermination de la figure de la terre*, inséré au tome XVI (1re partie) des Mémoires de la Société de physique et d'histoire naturelle de Genève, année

1861 : « Il est important de faire remarquer ici que le problème
» de la figure de la terre est en théorie un problème de méca-
» nique, et que les solutions purement géodésiques sont toujours
» plus ou moins des solutions empiriques. »

A la vérité, cet auteur a déjà fait voir dans le travail cité, qu'en appliquant le méridien de Legendre aux mesures géodésiques, effectuées sur onze arcs de méridiens terrestres, on arrivait à la valeur

$$\frac{1}{\mu} = 292,204 \pm 2,59 \ldots \text{ (page 193)}$$

pour l'inverse de l'aplatissement; donc pour l'aplatissement lui-même

$$\mu = \frac{1}{292,204 \pm 2,59},$$

valeur plus rapprochée de $^1/_{294}$ que de $^1/_{296}$.

Mais, n'est-il pas possible, qu'une autre loi des densités, intermédiaire entre celle de Legendre et celle de M. Ed. Roche, convienne mieux au cas de la terre, dont l'aplatissement pourra différer alors notablement des chiffres auxquelles est arrivé le savant suisse, ainsi que les calculateurs plus modernes sur les résultats desquels s'appuie le Mémoire d'Ed. Roche?

D'ailleurs, les différences entre les chiffres discutés sont tellement faibles, qu'il doit paraître pour le moins risqué d'en faire dépendre une conclusion aussi grave et aussi décisive sur la question de l'état intérieur de la terre. Les sciences appliquées nous offrent beaucoup d'exemples, où certaines grandeurs, différant beaucoup plus entre elles que les chiffres ci-dessus de l'aplatissement, ont néanmoins été traitées comme équivalentes : c'est ainsi que, à la page 286 de son *Traité élémentaire de mécanique céleste*, M. Résal observe, que la différence entre les fractions $^1/_{19530}$ et $^1/_{19190}$, représentatives du rapport $\frac{dg}{g_1}$, est inférieure à l'erreur probable d'observation. Notons que ces deux fractions là sont entre elles comme $^1/_{296}$ est à $^1/_{290}$.

Le passage ci-dessus reproduit du Mémoire de M. Elie Ritter

est précédé de l'alinéa suivant qui n'est pas favorable non plus à la théorie de Roche :

« Les déterminations auxquelles je suis parvenu laissent » subsister, entre le calcul et les observations, des différences » qui témoignent que le problème n'est encore résolu que d'une » manière approximative. Les données qui se réduisent au fond » à 75 latitudes observées, comprenant 64 arcs ou sections » d'arcs distinctes, paraissent trop peu nombreuses, et en partie, » trop affectées par des causes locales pour donner un poids » suffisant au résultat. Cependant, il me semble que la conclu- » sion qui se déduit de ce calcul, c'est que la figure de la terre » s'écarte de celle d'un ellipsoïde de révolution, et que le méri- » dien réel, comparé au méridien elliptique construit sur les » mêmes axes, présente vers le 45e degré de latitude un renfle- » ment dont la valeur ne peut pas, il est vrai, être déterminée » d'une manière bien précise, mais dont l'existence parait » incontestable. »

L'ellipse altérée réelle a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\left\{\frac{1}{15297}\mp\frac{1}{17269}\right\}\frac{x^2}{a^2}\cdot\frac{y^2}{b^2}.$$

On voit quelle grande incertitude présente le terme indiquant l'altération. Et puis ce méridien correspond aux continents où l'on a pu opérer les mesures géodésiques. Reste-t-il encore le même pour l'énorme surface, occupée par les Océans, où l'on ne peut pas effectuer des levés de cette nature? Voilà certes une grande cause d'incertitude pour la valeur du moment d'inertie de la terre, lequel affecte la quantité E, à laquelle Roche a fait jouer un rôle prédominant pour la fixation de la valeur de son aplatissement.

Il importe de constater, que les vues et conclusions qui précèdent, sont corroborées par l'opinion émise à ce même sujet par Tisserand, dans sa *Mécanique céleste*, t. II, chap. XXI, pp. 368-369 :

« L'examen des valeurs obtenues par diverses méthodes et

avec des données numériques de sources différentes montre qu'on n'en est pas encore arrivé au point de pouvoir affirmer que l'aplatissement (1 : 293,5) de M. Clarke doit être préféré à l'une des valeurs (1 : 299,26), (1 : 297,8) auxquelles est parvenu M. Helmert. On remarquera d'ailleurs que les erreurs probables des dénominateurs de ces dernières sont de 1 ou 2 unités. La théorie de Clairaut néglige du reste les quantités du second ordre et ne permet pas de distinguer entre l'ellipticité et l'aplatissement, de sorte qu'on ne peut pas prétendre à déterminer le dénominateur en question à moins d'une unité près.

« Il s'agirait donc de savoir si l'aplatissement $^1/_{298}$ ou $^1/_{299}$ doit, dès à présent être remplacé par $^1/_{293}$ ou $^1/_{294}$. Nous ne pensons pas que la chose puisse être regardée comme démontrée. Cela entrainerait, comme on l'a vu, des conséquences assez graves, car il y aurait contradiction entre l'aplatissement $^1/_{293}$ et la valeur numérique de la constante $\frac{A-C}{A}$, fournie par la théorie de la précession. Il n'en est plus ainsi quand on adopte $^1/_{297}$ ou un aplatissement plus petit. M. Roche, regardant la contradiction comme bien établie, en avait conclu que l'intérieur de la terre doit être solide (*Mémoire sur l'état intérieur du globe terrestre*, Paris, 1881). Cette conclusion, qui serait d'une importance capitale pour la géologie, ne peut donc pas encore être considéré comme certaine (*) ».

Enfin, en allant même jusqu'à supposer qu'il soit possible de fournir la preuve rigoureuse du fait que l'aplatissement de la surface des mers, prolongée par la pensée tout autour du globe, soit représenté par la fraction

$$\frac{1}{294} \quad \text{ou même} \quad \frac{1}{292},$$

rien ne s'opposerait à admettre que la masse interne entièrement fluide, séparée de la croûte solide extérieure par une atmosphère

(*) C'est au moment de mettre sous presse que cet accord d'idées nous a été signalé par notre confrère, M. P. Mansion, auquel nous adressons nos meilleurs remerciements pour cette communication.

gazeuse, présente à sa surface un aplatissement moindre, égal, par exemple, à la fraction

$$\frac{1}{296}.$$

Dans ce nouvel ordre d'idées, on pourrait concevoir les deux systèmes de constitution indiqués dans les figures ci-jointes, également possibles *a priori :* D'après la figure 1, le quart du globe terrestre se composerait de la croûte solide *abdc*, de l'atmosphère gazeuse *cdfe*, et du noyau fluide igné *efo*; d'après la figure 2, l'espace occupé par l'atmosphère gazeuse aurait moins de capacité, et se terminerait en un point *g*, point de raccordement de CD et ED, le noyau fluide étant alors représenté par E*g*DO. Dans les deux cas, la surface extérieure *ab* et AB aurait un aplatissement $= {}^1/_{294}$ ou ${}^1/_{292}$, tandis que la surface limite *ef* et E*g*D présenterait l'aplatissement plus faible ${}^1/_{296}$.

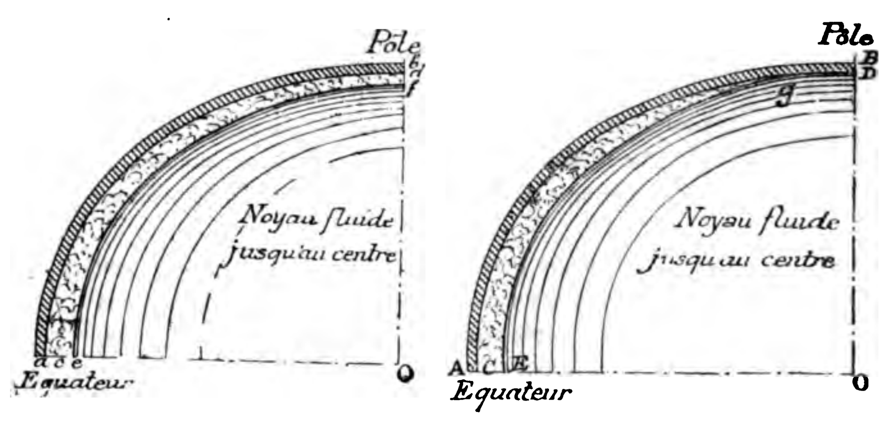


Fig. 1. Fig. 2.

Quand on songe que la majeure partie des régions volcaniques se trouvent répandues dans la zone équatoriale et dans la première moitié des deux zones tempérées, alors on doit trouver le second des deux systèmes plus probable. Et pour justifier la coexistence des deux sortes d'aplatissement dans chacun d'eux, on n'aurait qu'à se rappeler ce fait, qu'à l'origine de la période

de formation de l'enveloppe solide extérieure, la contraction ou le retrait des masses dû au refroidissement devait être plus fort dans les régions polaires que partout ailleurs.

Au n° 2 de son « Exposé du sujet », Ed. Roche observe, qu'en admettant la fluidité initiale de la terre, on pouvait faire sur son état actuel les deux suppositions contraires suivantes : Ou bien qu'elle soit encore fluide, ou bien, en la supposant en grande partie solidifiée, qu'elle soit formée d'un bloc solide, recouvert par une couche fluide d'un volume relativement faible. Visiblement, rien n'empêche de formuler une troisième hypothèse, intermédiaire entre les deux précédentes, à savoir, que le bloc solide ait un volume beaucoup moindre que la couche concentrique fluide qui l'enveloppe de toutes parts. De cette manière, on rentrerait dans l'un des systèmes, dont nous avons démontré la grande probabilité (voir le compte rendu du Congrès international des catholiques de Paris en 1891), et qui comporterait parfaitement la valeur numérique connue de l'aplatissement de la surface du globe.

Au n° 13 et suivants de son Mémoire, Ed. Roche a cherché à déterminer l'influence d'une diminution de la durée du jour depuis le moment où le bloc se serait solidifié, sur la valeur de l'aplatissement. D'après M. Résal (*Traité élémentaire de mécanique céleste*), qui a calculé la dite diminution de la durée du jour due au refroidissement de la terre, en se basant sur l'hypothèse de Roche relativement à la loi des densités, le jour moyen n'aurait diminué que de 0,03 de seconde depuis dix siècles.

Voilà des considérations d'un ordre fort délicat qui, envisagées d'une façon plus complète, pourraient bien conduire à des résultats contraires à ceux qu'on s'est plû à viser. En effet, le jour moyen terrestre, est-il resté *invariable*, ou bien a-t-il *augmenté* ou *diminué* depuis une série de siècles?

Sur cette question-là les avis des savants sont singulièrement divergents. Rappelons d'abord que certains phénomènes, tels que le refroidissement lent du globe, entraineraient une *diminution* de la durée du jour; d'autres, au contraire, ne peuvent

trouver d'explication satisfaisante qu'en admettant une légère *augmentation* de cette même durée : telle est, entre autres, l'accélération séculaire du moyen mouvement de la lune.

A ce sujet, le bel ouvrage de Hirn, intitulé : *Constitution de l'espace céleste*, nous apprend que les deux analystes Adams et Delaunay ont trouvé, pour cause du phénomène, le flux et le reflux des océans terrestres : d'après ces savants, la montagne fluide que soulève l'attraction lunaire, restant continuellement en arrière de la ligne de jonction des centres de gravité de la terre et de la lune, tend à accélérer le moyen mouvement de la lune et à retarder le mouvement de rotation de la terre sur elle-même, en d'autres termes, à augmenter la durée du jour.

Contrairement à ce qu'avait pensé Laplace, qui admettait la constance parfaite du jour, Adams a montré qu'il suffit que le jour ait augmenté de 0,012 secondes en 2,000 ans, pour que le restant de l'accélération lunaire due au phénomène des marées, ajouté à l'effet dû aux causes étudiées par Laplace, conduise à une concordance parfaite entre les résultats de l'observation et ceux de l'analyse.

Comment peut-on concilier ces faits et opinions avec le texte des n°s 13 à 17 du Mémoire de Ed. Roche, où il est dit, entre autres choses, ce qui suit : « Le rapport de la force centrifuge à la pesanteur équatoriale a augmenté peu à peu, » depuis sa valeur primitive q_0 jusqu'à sa valeur actuelle q, à » mesure que la rotation s'accélérait, et cette augmentation est » essentiellement liée à la grandeur de l'aplatissement superficiel, etc. »

Et que devient ainsi toute l'analyse exposée dans son chapitre III, intitulé : *Développement de la solution*, laquelle est basée sur l'hypothèse que la durée du jour ait diminuée depuis des siècles?

D'ailleurs, au § 179 de sa *Mécanique céleste*, M. Résal a montré que l'on pouvait arriver à établir une diminution de la durée du jour par suite du refroidissement de la terre, sans devoir admettre l'existence d'un bloc solide intérieur.

Au surplus, il est à noter que ce même auteur n'est arrivé

à resserrer la valeur de l'aplatissement du globe qu'entre les limites

$$\frac{1}{274} \text{ et } \frac{1}{578},$$

après avoir tenu compte de tous les éléments astronomiques possibles et conclut à la page 395 de sa *Mécanique céleste :*

« Nous avons donc deux limites entre lesquelles se trouve
» compris l'aplatissement. La limite supérieure diffère peu de la
» valeur $^1/_{300}$, que l'on attribue généralement à l'aplatissement
» de la terre. »

Nous concluons, de tout ce qui précède, que le Mémoire d'Ed. Roche n'a en aucune façon infirmé l'hypothèse de la fluidité complète des masses intérieures du globe terrestre.

Et cette hypothèse n'exclut pas la possibilité d'un noyau plus ou moins pâteux, ou plus ou moins solidifié, ayant un volume *relativement petit*, comme nous l'avons montré dans notre Mémoire *Sur la température du globe terrestre.*

LES CHASSES HYMÉNOPTÉROLOGIQUES AUX ENVIRONS DE BRUXELLES

PAR

Fernand MEUNIER.

DEUXIÈME PARTIE

FOUISSEURS

INTRODUCTION

Les Hyménoptères aculeata de Belgique appartenant à la famille des fouisseurs (*grabwespen*) ont été étudiés par Vanderlinden et Wesmael.

Toutes les espèces dont il est question dans cette liste ont été capturées aux environs de Bruxelles.

J'indique par la lettre H, les insectes de ce groupe qui sont signalés par Snellen Van Vollenhoven (*).

(*) *Naamlijst van Nederlandsche vliesvleugelige insekten* (*Bouwstoffen voor eene fauna van Nederland, bijeenverzameld door Herklots*, p. 221. Leiden, 1858).

Pour les Mellifères, voir *Annales de la Soc. scientifique de Bruxelles*, t. XIX, 2e partie, 1895.

I. CRABRONIDAE.

1. CRABRO, Dahlb.

1er sous-genre SOLENIUS, Dahlb.

1. *Sexcinctus*, Vanderl.
   Le ♂ à Forest, la ♀ à Mousty (Ottignies). H.
2. *Lapidarius*, Panz.
   Le ♂ au parc de Saint-Gilles.

2e sous-genre ECTEMNIUS, Dahlb.

3. *Vagus*, Linné.
   ♂ et ♀ à Uccle-Stalle. H.
4. *Dives*, H. Sch.
   Comme le précédent.

3e sous-genre THYREOPUS, Dahlb.

5. *Cribrarius*, Linné.
   Commun aux environs de Bruxelles, Forest, parc de Saint-Gilles. H.
6. *Pterotus*, Vanderl.
   Une ♀ à Uccle-Stalle. H.
7. *Patellatus*, Vanderl.
   Uccle-Stalle, Forest. H.

4e sous-genre CERATOCOLUS, Dahlb.

8. *Subterraneus*, Dahlb.
   4 ♀ à Forest. H.
9. *Vexillatus*, Vanderl.
   Une ♀ à Uccle-Stalle.

5e sous-genre CROSSOCERUS, Dahlb.

10. *Capitosus*, Schuck.
    Deux ♀ au parc de Saint-Gilles.

11. *Leucostoma*, Fabr.
♂ et ♀ aux environs de Bruxelles (Forest et Stalle.) H.

12. *Scutatus*, Dahlb.
En fauchant les herbes des prairies près des broussailles et des talus ensoleillés, on capture fréquemment cette espèce. Forest, Stalle, Calevoet, Waterloo. H.

13. *Palmipes*, Vanderl.
Comme le précédent.

14. *Elongatulus*, Vanderl.
Très commun dans tout le Brabant.

15. *Quadrimaculatus*, Spin.
4 ♀ à Uccle-Stalle. H.

2. LINDENIUS, Lepelletier.

16. *Albilabris*, Fabr.
4 ♀ et 1 ♂ à Uccle-Stalle. H.

3. ENTOMOGNATHUS, Dahlb.

17. *Brevis*, Vanderl.
Quelques ♀ à Uccle-Stalle.

4. OXYBELUS, Latreille.

18. *Uniglumis*, Dahlb.
On capture souvent cette espèce sur les Carduacées. H.

19. *Bipunctatus*, Olivier, ♀ (*Haemorrhoidalis*, Dahlb., ♂♀).
Uccle-Stalle (*).

II. PEMPHREDONIDAE.

5. PEMPHREDON, Latreille.

20. *Lugubris*, Vanderl.
Parc de Saint-Gilles, Uccle-Stalle. H.

(*) J'ai aussi capturé plusieurs *Oxybelus furcatus*, Lepelletier (*mucronatus*, Vanderl. ♂) à Uccle, sur les Carduacées.

6. CEMONUS, Jurine.

21. *Unicolor*, Latreille.
Forest, Uccle-Stalle, Calevoet. H.

7. DIODONTUS, Curtis.

22. *Tristis*, Vanderl.
Très commun partout. Forest, Uccle, Waterloo.

23. *Minutus*, Vanderl.
Comme le précédent. Très commun en août et septembre.
OBSERVATION : H. Schenck place les Trypoxylon avec les Pemphredonidae (*) et Wesmael avec les Cerceridae (**) (Philanthidae, Auct.). Ces insectes me semblent être intermédiaires entre ces deux sous-familles de fouisseurs.

III. TRYPOXYLONIDAE (mihi).

8. TRYPOXYLON, Latreille.

24. *Figulus*, Linné.
Commun. Parc de Saint-Gilles, Uccle-Stalle, Forest. H.

IV. PHILANTHIDAE.

9. PHILANTHUS, Latreille.

25. *Triangulum*, Fabr.
J'ai capturé une vingtaine d'individus de cette espèce sur un talus ensoleillé (♂ et ♀). H. Forest.

10. CERCERIS, Latreille.

26. *Variabilis*, Dahlb. (*Ornata*, Vanderl).
Très commun dans tout le Brabant. H. Forest, Uccle-Stalle, Saint-Gilles, Linkebeek. Sur les Carduacées.

(*) SCHENCK, *Beschreibung der in Nassau aufgefundenen Grabwespen*, p. 131. Wiesbaden, 1857.

(**) WESMAEL, *Revue critique des Hyménoptères fouisseurs de Belgique*, p. 106. Bruxelles, 1851-1852.

27. *Arenaria*, Linné.
Commun. Forest, Uccle-Stalle, Linkebeek, parc de Saint-Gilles. H.

28. *4-cincta*, Vanderl.
Assez rare. Forest. H.

29. *Nasuta*, Dahlb (*5-fasciata*, Wesm.).
Comme *C. arenaria*, Lin.

30. *Labiata*, Vanderl.
Tout le Brabant. Forest, Uccle-Stalle, Linkebeek.

V. NYSSONIDAE.

11. NYSSON, Latreille.

31. *Spinosus*, Panz.
Commun aux environs de Bruxelles. Uccle-Stalle, parc de Saint-Gilles.

32. *Maculatus*, Vanderl.
Assez rare. Uccle-Stalle. D'après Wesmael, le *Gorytes campestris*, Dahlb. est commun aux environs de Bruxelles. Je ne l'ai jamais capturé.

12. GORYTES, Dahlb.

33. *Mystaceus*, Linné.
Commun partout dans le Brabant. Uccle-Stalle, Groenendael, Ottignies, Waterloo. H.

13. HOPLISUS, Dahlb.

34. *4-fasciatus*, Wesmael.
2 ♀ à Uccle-Stalle. H.

35. *5-cinctus*, Wesmael.
Rare. Uccle-Stalle. H.

14. HARPACTES, Dahlb.

36. *Laevis*, Latreille.
3 ♀ à Uccle-Stalle.

15. ALYSON, Jurine.

37. *Bimaculatum*, Panz (*Bimaculatus*, Wesm.).
1 ♀ à Uccle-Stalle.

VI. MELLINIDAE.

16. MELLINUS, Latreille.

38. *Arvensis*, Linné.
Très commun dans tout le Brabant. On rencontre même ce fouisseur dans les parties ensoleillées des bois. H.

39. *Sabulosus*, Fabricius.
Moins répandu que le précédent. Forest, Uccle-Stalle. H.

VII. LARRIDAE.

17. TACHYTES, Panz

40. *Pectinipes*, Linné (*Pompiliformis*, Panz).
Pas commun. Groenendael, parc de Saint-Gilles, Uccle-Stalle. H.

41. *Panzeri*, Vanderl.
3 ♀ à Uccle-Stalle.

18. MISCOPHUS, Jurine.

42. *Bicolor*, Dahlb.
4 ♀ et 1 ♂ à Uccle-Stalle.

19. DINETUS, Jurine.

43. *Pictus*, Fabr.
Plusieurs individus des deux sexes à Forest. H. Rare.

VIII. SPHECIDAE.

20. AMMOPHILA.

44. *Sabulosa*, Linné.
Commun dans tout le Brabant. Linkebeek, Forest, Waterloo, Mousty, Uccle-Stalle. H.

21. PSAMMOPHILA, Dahlb.

45. *Viatica*, Linné.
Moins commun que le précédent.

22. MIMESA, Shuck.

46. *Unicolor*, Vanderl.
Quelques individus à Uccle-Stalle.

47. *Bicolor*, Shuck (*Lutaria*, Dahlb.).
Pas commun. Forest. Stalle.

23. DAHLBOMIA, Wissm.

48. *Atra*, Fabr.
1 ♀ à Forest. Wesmael place ce fouisseur dans le sous-genre *Mesopora* (page 116).

24. PSEN, Latreille.

49. *Atratus*, Panz.
Un ♂ de Mousty capturé par M. A. Proost. H.

IX. SAPYGIDAE.

25. SAPYGA, Latreille.

50. *Punctata*, Klug.
Assez commun. Forest, parc de Saint-Gilles, Uccle-Stalle. H.

X. SCOLIDAE.

26. TIPHIA, Fabricius.

51. *Femorata*, Fabr.
Commun dans toute la banlieue de Bruxelles. H.

52. *Minuta*, Vanderl.
Quelques individus à Forest. H.

XI. MUTILLIDAE.

27. MYRMOSA, Latreille.

53. *Melanocephala*, Latr.
Forest, Uccle-Stalle. H. Pas commun.

XII. POMPILIDAE.

28. CEROPALES, Latreille.

54. *Maculata*, Fabr.
Uccle-Stalle, Forest H.

29. PSEUDAGENIA. Kohl.

55. *Punctum*, Fabr. (*Carbonaria*, Scop).
Un ♂ à Forest. H.

30. POMPILUS, Fabricius.

56. *Plumbeus*, Dahlb.
Une seule fois à Uccle-Stalle. H.

57. *Niger*, Dahlb.
Deux ♀ sur les talus avoisinant la gare de Uccle-Stalle. H.

58. *Spissus*, Schiod.
Parc de Saint-Gilles, Forest, Ottignies, Uccle-Stalle. H.

59. *Cellularis*, Dahlb.
Comme le précédent.

60. *Chalybeatus*, Schiödte.
Ce Pompilide est commun dans tout le Brabant.

61. *Trivialis*, Klug (*).
Plus rare que les trois précédents. Stalle, Forest. H.

62. *Viaticus*, Dahlb.
Commun partout. Uccle-Stalle, Groenendael, Forest, parc de Saint-Gilles, Waterloo. H.

63. *Pecenipes*, Linné (Vanderl.).
Uccle-Stalle, Forest. J'ai capturé les variétés *pilosellus*, *campestris* et *littoralis* de Wesmael.

31. PRIOCNEMIS, Schiödte.

64. *Hyalinatus*, Spin (*Fasciatellus*, Spin).
5 ♀ à Uccle-Stalle. H.

(*) Magretti a donné de minitieuses diagnoses de ces espèces affines : *Sugli Imenotteri della Lombardia*, pp. 53, 55, 58, 59. Pompilidei. Firenze, 1887.

65. ***Exaltatus*, Dahlb.**
Uccle-Stalle. H.

66. ***Minutus*, Vanderl.**
Quelques individus au parc de Saint-Gilles et à Forest.

67. ***Fuscus*, Dahlb.**
Comme le précédent. H

68. ***Affinis*, Vanderl.**
Uccle-Stalle, Forest.

32. APORUS, Spin.

69. ***Dubius*, Vanderl.**
Deux ♀ à Forest. H.

OBSERVATION : Tous ces fouisseurs ont été capturés de 1888 à 1893. La superbe collection de mon savant maître, M. le Dr Jean Jacobs, renferme presque toutes les espèces signalées par notre illustre Wesmael.

Ce catalogue sert de contribution à la faune des Hyménoptères aculeata de la Belgique.

BIBLIOGRAPHIE (*).

1. VANDERLINDEN, *Observations sur les Hyménoptères d'Europe de la famille des fouisseurs* (MÉM. DE L'ACAD. DES SCIENCES DE BRUXELLES, t. IV et V, 1827-1829).

2. WESMAEL, *Revue critique des Hyménoptères fouisseurs de Belgique* (BULL. DE L'ACAD. DE BRUXELLES, t. XVIII, XIX, 1851-1852).

3. SCHENCK, *Beschreibung der in Nassau aufgefundenen Grabwespen*. Wiesbaden, 1857.

4. MAGRETTI, *Sugli Imenotteri della Lombardia*, Pompilidei. Firenze, 1887.

(*) Avec ces travaux, on peut parfaitement connaître les Hyménoptères fouisseurs de Belgique.

NOTE

SUR

UN HYMÉNOPTÈRE DES LIGNITES DU RHIN

PAR

Fernand MEUNIER (*).

En 1852 de Saussure (**) a décrit un pimple des schistes d'Aix en Provence, et O. Heer (***) a brièvement signalé en 1867 un insecte du même genre qui a été rencontré dans le terrain tertiaire de Radboj. Ce paléontologiste, qui désigne aussi l'empreinte qu'il a examinée sous le nom de *P. antiqua*, n'a pas connu l'intéressante notice et la figure données par de Saussure. Le fossile que j'ai étudié appartient au Musée d'histoire naturelle de Munich et m'a été obligeamment communiqué par M. le professeur Zittel.

Voici la description de cet *ichneumonidæ*, vu au microscope avec un grossissement de 30 diamètres.

Longueur totale de l'insecte 5 millimètres, de la tête 1 millimètre, du thorax 3 millimètres, de l'abdomen 4 millimètres, d'une aile 4 millimètres, de l'antenne 4 millimètres (seulement la partie qui est visible). Largeur thoracique 1 millimètre, abdominale $^3/_4$ millimètre.

Articles des antennes peu distincts, à l'exception du troisième qui est long (*pimpla*). Tête et thorax bien marqués, mais ne présentant rien de caractéristique. Les hanches et une patte

---

(*) Note présentée à la troisième section, le 24 octobre 1895.

(**) *Note sur un nouvel insecte Hyménoptère fossile* (Revue et magasin de zoologie, pp. 57 à 81, pl. XXIII, fig. 5 et 6. Paris, 1852).

(***) *Fossile Hymenopteren aus Oeningen und Radsboy* (Neue Denkschr. allgem schweiz. Gesellsch. für die gesamm. Naturw., p. 36, pl. III, fig. 18. Zurich, 1867).

sont seulement conservées. L'abdomen est sessile et composé de huit segments, avec la tarière à peine appréciable. Les ailes sont inégalement superposées et à cause de cette disposition on peut voir les deux stigma.

Le pimple que de Saussure a fait connaître avait 21 millimètres (corps et tarière). O. Heer ne dit rien de la taille de cet Hyménoptère et se borne à représenter l'individu qu'il a eu sous les yeux sans indiquer de combien de fois le dessin est plus grand que nature. Les caractères de la nervation et de l'aréole qui paraît quadrangulaire (*) permettent de placer rigoureusement ce fossile dans le genre *Pimpla* (*Fabricius* et *Holmgren*).

La taille de ces êtres oscille entre 5 et 18 millimètres. Pour avoir la certitude du fait que j'avance, j'ai demandé à mon savant maître, M. le Dr Jean Jacobs, de Bruxelles, de vérifier la détermination de cette curieuse empreinte d'Hyménoptère.

Les observations du célèbre savant suisse, O. Heer, prouvent qu'il n'avait pas les connaissances suffisantes pour se livrer, avec fruit, à de minutieuses recherches paléohyménoptérologiques.

(*) L'aréole est triangulaire (parfaite ou imparfaite, sessile), mais à cause de la nervure récurrente qui vient s'y insérer et former une sorte d'angle, on peut alors dire que chez quelques espèces elle semble quadrangulaire.

LA PRÉTENDUE PÉRIODE GLACIAIRE

A L'ÉPOQUE HOUILLIÈRE DE M. JULIEN

ET

LA FAUNE ENTOMOLOGIQUE DU STÉPHANIEN DE COMMENTRY

PAR

Fernand MEUNIER (*).

Après les observations critiques de MM. de Lapparent, Zeiller et de notre collègue le R. P. Schmitz (**) concernant l'hypothèse de M. Julien sur l'existence d'une prétendue période glaciaire à l'époque houillière, je viens aussi combattre les idées de ce géologue en m'appuyant sur des documents tirés du domaine de la zoologie paléoentomologique.

En étudiant les insectes fossiles de l'étage Stéphanien de Commentry (France) et du terrain houillier de l'Amérique du Nord, on constate que les Névroptères, les Orthoptères, les Thysanoures et les Hémiptères homoptères sont largement représentés dans cette formation, et que la taille de ces articulés est souvent très grande. Si on examine minutieusement ces curieuses empreintes en les comparant aux insectes actuels qui habitent les régions holarctique, sonorienne, néotropicale, éthiopienne, australienne et orientale, pour en tirer quelques déductions de morphologie générale, on voit que leur faune devait être beau-

(*) Note présentée à la troisième section, le 29 janvier 1896.

(**) *Bulletin de la Société scientifique de Bruxelles*, session du 24 octobre 1895 pp. 34 à 35.

coup plus riche en espèces que celle des contrées équatoriales de notre époque.

Puis, en méditant longuement sur l'exubérance de vie qui devait se manifester au grand lac de Commentry, on peut se représenter l'atmosphère chaude, humide et abondante en acide carbonique de la période houillière, où de gigantesques Névroptères et des Odonates ayant parfois jusqu'à 80 centimètres d'envergure devaient donner au paysage local un aspect grandiose, et contrastant visiblement avec la tranquillité imposante qui régnait à ces antiques époques.

Les Arthropodes de la classe des Trilobites, qui avaient fait leur apparition dans le cambrien, et qui s'étaient épanouis dans le silurien, se rencontrent encore dans le terrain carbonifère, où ils terminent leur existence par la présence des *Philyspsia*. Ces curieux êtres ont été extrêmement abondants pendant la durée des temps paléozoïques. On peut résumer ces notes en disant que si M. Julien avait mieux connu la paléontologie végétale et les renseignements qui sont fournis par l'entomologie fossile, il se serait bien gardé de publier des hypothèses aussi singulières, et qui sont complètement en désaccord avec toutes nos connaissances scientifiques actuelles.

RECHERCHES ANALYTIQUES

SUR

LA THÉORIE DES NOMBRES PREMIERS

PAR

M. CH.-J. DE LA VALLÉE POUSSIN
Professeur a l'Université de Louvain.

DEUXIÈME PARTIE

LES FONCTIONS DE DIRICHLET ET LES NOMBRES PREMIERS DE LA FORME LINÉAIRE $Mx + N$ (*).

CHAPITRE PREMIER.

QUESTIONS PRÉLIMINAIRES.

§ 1. — *Définition et propriétés des fonctions* $\psi_1(\alpha, x)$ *et* $\psi_2(\alpha, x)$.

1. On a déjà indiqué plusieurs méthodes différentes pour démontrer les propriétés fondamentales de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et des fonctions qui s'y rattachent. On les déduit soit de la théorie des fonctions elliptiques, soit de la théorie des

(*) La deuxième et la troisième partie du Mémoire ont été présentées à la Société dans la séance du 16 avril 1896 Une analyse détaillée en a paru dans le *Bulletin* (session du 29 octobre 1896). Depuis lors M. Hadamard a publié des recherches sur le même sujet dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* (t. XXIV, 1896, dernier fascicule). Il trouve par une méthode différente la plupart des résultats nouveaux qui se trouvaient dans notre travail. L'intérêt de nos recherches ne disparaît pas cependant tout entier; nous entrons dans le détail des démonstrations que M. Hadamard a supprimées et nous établissons des formules plus générales que les siennes. Par contre, M. Hadamard simplifie beaucoup sur un point une des démonstrations de notre première partie; nous avons cru devoir profiter de cette simplification (voir la note à la fin de la troisième partie du Mémoire).

résidus des intégrales définies. Cependant aucune de ces méthodes ne nous paraît rattacher ces propriétés à leur point de départ le plus naturel. Les recherches que nous avons faites nous ont conduit a en trouver une nouvelle, qui, tout en étant tout aussi rigoureuse, a sur les précédentes l'avantage de la simplicité. C'est cette méthode que nous allons faire connaître.

2. Nous prendrons, comme point de départ, la valeur d'une intégrale définie célèbre et qui joue un rôle important en physique mathématique. Désignons par $a > 0$ et k deux constantes réelles; cette intégrale est la suivante (*) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\pi x^2} \cos(2k\pi x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\, e^{-k^2\frac{\pi}{a}}.$$

Dans le second membre, il n'y a aucune ambiguïté sur la valeur du radical $\sqrt{a}$ qui est pris positivement.

3. *Définition de* $\psi_1(\alpha, x)$ *et développement en série trigonométrique.* — Nous définirons cette fonction par la relation

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \psi_1(\alpha, x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{-(n+\alpha)^2\pi x}.$$

On suppose α et x réels et $x > 0$: la série étendue à toutes les valeurs positives et négatives de n est alors absolument convergente et a visiblement pour somme une fonction périodique de α dont la période est l'unité. Cette fonction est donc développable, pour toute valeur réelle de α, en série trigonométrique de la forme

$$\psi_1(\alpha, x) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos 2\pi\alpha + \cdots + a_k \cos 2k\pi\alpha + \cdots,$$

ne renfermant pas de sinus. Les coefficients auront pour valeur

$$a_k = 2\int_0^1 \psi_1(\alpha, x) \cos(2k\pi x)\,d\alpha.$$

(*) C. Jordan, *Cours d'analyse*, t. II, 2e édit., 1894, n° 272.

Ces coefficients s'expriment donc d'abord par une somme d'intégrales définies. Mais ces sommes se ramènent immédiatement à une intégrale unique, savoir :

$$a_0 = 2\int_0^{+\infty} e^{-\alpha^2\pi x}\,d\alpha = \frac{2}{\sqrt{x}},$$

$$a_k = 2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2\pi x}\cos(2k\pi\alpha)\,d\alpha = \frac{2}{\sqrt{x}}\,e^{-\frac{k^2\pi}{x}}.$$

En substituant ces valeurs, on trouve donc la relation fondamentale

$$(2)\quad \ldots\ \psi_1(\alpha, x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2\pi}{x}}\cos(2k\pi\alpha)\right].$$

Cette relation, dans laquelle on reconnait une sorte de réciprocité par rapport à x, exprime la propriété la plus remarquable de la fonction $\psi_1(\alpha, x)$ et l'aisance avec laquelle elle s'obtient nous engage à la prendre comme base des considérations qui vont suivre (*).

4. Remarquons qu'en posant $\alpha = 0$ dans la dernière équation, on retrouve immédiatement la relation obtenue par Jacobi dans la théorie des fonctions elliptiques (**) :

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\frac{\pi}{x}}\right].$$

La propriété fonctionnelle de $\zeta(s)$ est, comme on le sait, une simple conséquence de cette relation.

5. *Définition de* $\psi_2(\alpha, x)$ *et développement en série trigono-*

(*) La relation (2) est un cas particulier de la relation entre les fonctions θ d'argument réel et imaginaire. Le principe de la démonstration que nous exposons appartient à Dirichlet. Notre démonstration est cependant plus simple que la sienne (Voir ENNEPER, *Elliptische Functionen Theorie und Geschichte*, 2e édition, § 18).

(**) V. BACHMANN, *Die analytische Zahlentheorie*, p. 169, n° 8.

métrique. — Nous définirons cette fonction par la série

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \psi_2(\alpha, x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (n+\alpha) e^{-(n+\alpha)^2 \pi x}.$$

Le développement de cette fonction en série trigonométrique se déduit immédiatement du précédent, en dérivant par rapport à α, ce qui est permis. On trouve

$$(4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \psi_2'(\alpha, x) = \frac{2}{x\sqrt{x}} \sum_{k=1}^{k=\infty} k e^{-k^2 \frac{\pi}{x}} \sin 2k\pi\alpha.$$

Cette nouvelle relation est la propriété fondamentale de $\psi_2(\alpha, x)$. On y retrouve la même réciprocité par rapport à x que dans les précédentes. Cette réciprocité joue, comme on le verra, un rôle caractéristique dans les recherches que nous allons faire.

§ 2. — *Définition et propriétés des fonctions* $\zeta_1(\alpha, s)$ *et* $\zeta_2(\alpha, s)$.

Ces nouvelles fonctions sont dans une relation très étroite avec une fonction introduite dans l'analyse par M. Piltz à l'occasion du sujet qui nous occupe (*). Cette fonction $B(\alpha, s)$ de M. Piltz est étudiée directement dans le Mémoire de cet auteur et par une méthode beaucoup plus laborieuse que la nôtre, mais l'importance des résultats déjà obtenus par M. Piltz nous engage à en parler, pour indiquer où se trouve le point de contact des deux méthodes. Ajoutons que ces fonctions sont des cas particuliers d'une fonction plus générale étudiée plus tard par M. Lipschitz (**).

(*) *Ueber die Häufigkeit der Primzahlen in arithmetischen Progressionen und über verwandte Gesetze.* Dissertation v. ADOLF PILTZ. Iéna, 1884, A. Neuenhahn. On trouvera une courte analyse de cet ouvrage dans l'*Analytische Theorie der Zahlen* de M. BACHMANN, p. 487.

(**) *Untersuchung der Eigenschaften einer Gattung von unendlichen Reihen.* JOURNAL DE CRELLE, t. CV, 1889. Ce Mémoire important contient un nombre considérable de formules que nous retrouvons dans celui-ci

6. ***Définition de $\zeta_1(\alpha, s)$, sa relation avec $\psi_1(\alpha, x)$.*** — Supposons que α soit un nombre positif > 0 et < 1 ; nous définirons la fonction $\zeta_1(\alpha, s)$ de la variable réelle ou complexe s par l'équation

$$(5) \quad \ldots \quad \zeta_1(\alpha, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^s} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-\alpha)^s}.$$

Pour que ces expressions soient convergentes, on doit supposer $\Re(s) > 1$. Les séries sont alors absolument et uniformément convergentes pour $\Re(s) > 1 + \varepsilon$, quelque petit que soit le nombre positif ε. La fonction $\zeta_1(\alpha, s)$ est donc une fonction synectique de la variable s pour $\Re(s) > 1$. Dans la définition de $\zeta(\alpha, s)$ par la formule précédente, on ne laisse aucune ambiguïté dans la détermination des termes de la série; on convient de poser

$$(n+\alpha)^{-s} = e^{-s \log(n+\alpha)}$$

et d'attribuer au logarithme sa valeur réelle, de manière que tous les termes soient réels et positifs en même temps que s.

La fonction $\zeta_1(\alpha, s)$ s'exprime aisément, comme nous allons le voir, au moyen de $\psi_1(\alpha, x)$.

On a les relations

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \frac{1}{(n+\alpha)^s} = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+n)^2 \pi x} x^{\frac{s}{2}-1} dx,$$

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \frac{1}{(n-\alpha)^s} = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha-n)^2 \pi x} x^{\frac{s}{2}-1} dx;$$

donc, en ajoutant ensemble toutes les équations qui se déduisent des précédentes pour toutes les valeurs positives de n, on trouve, pour $\Re(s) > 1$,

$$(6) \quad \ldots \quad \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta_1(\alpha, s) = \int_0^{\infty} \psi_1(\alpha, x) x^{\frac{s}{2}-1} dx.$$

7. Les formules du numéro précédent ne sont valables que pour $\Re(s) > 1$; aussi nous n'avons jusqu'à présent de définition

de $\zeta_1(\alpha, s)$ que dans cette partie du plan. Mais l'extension de la fonction se fait sans peine à tout le plan, comme nous allons le montrer.

On a, en effet, par le partage de l'intervalle d'intégration,

$$\int_0^{\infty} \psi_1(\alpha, x)\, x^{\frac{s}{2}-1}\, dx = \int_1^{\infty} \psi_1(\alpha, x)\, x^{\frac{s}{2}-1}\, dx + \int_0^1 \psi_1(\alpha, x)\, x^{\frac{s}{2}-1}\, dx.$$

Mais on a, par la formule (2) du n° 3,

$$\int_0^1 \psi_1(\alpha, x)\, x^{\frac{s}{2}-1}\, dx = \int_0^1 \left[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2\pi}{x}} \cos(2k\pi\alpha)\right] x^{\frac{s-3}{2}}\, dx.$$

Le second membre se sépare donc en une somme d'intégrales. La première s'évalue immédiatement; on change la variable d'intégration x en $\frac{1}{x}$ dans les suivantes. On trouve ainsi :

$$\int_0^1 \psi_1(\alpha, x)\, x^{\frac{s}{2}-1}\, dx = \frac{2}{s-1} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \cos(2k\pi\alpha) \int_1^{\infty} e^{-k^2\pi x}\, x^{-\frac{1+s}{2}}\, dx.$$

En définitive, la formule (6) se mettra sous la forme suivante

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta_1(\alpha, s) &= \frac{2}{s-1} + \int_1^{\infty} \psi_1(\alpha, x)\, x^{\frac{s}{2}-1}\, dx \\ &\quad + 2\sum_{k=1}^{\infty} \cos(2k\pi\alpha) \int_1^{\infty} e^{-k^2\pi x}\, x^{-\frac{1+s}{2}}\, dx. \end{aligned} \right.$$

On reconnait à première vue que le second membre de cette équation est convergent quel que soit s. Cette équation nous fournit donc une représentation de $\zeta_1(\alpha, s)$ applicable dans tout le plan. Elle montre que $\zeta_1(\alpha, s)$ est une fonction méromorphe de s qui n'a qu'un seul pôle $s = 1$.

8. *Développement de $\zeta_1(\alpha, s)$ en série trigonométrique.* — Cette fonction présente une particularité curieuse : elle n'est développable en série trigonométrique par rapport à α que si la partie réelle de s est négative.

Supposons donc $\Re(s) < 0$; on trouvera, en répétant les calculs du numéro précédent,

$$\int_1^\infty \psi_1(\alpha, x) x^{\frac{s}{2}-1} dx = -\frac{2}{s-1} + 2\sum_{k=1}^\infty \cos(2k\pi\alpha) \int_0^1 e^{-k^2\pi^2 x} x^{-\frac{1+s}{2}} dx,$$

et, en substituant dans la formule (7),

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta_1(\alpha, s) = 2\sum_{k=1}^\infty \cos(2k\pi\alpha) \int_0^\infty e^{-k^2\pi x} x^{-\frac{1+s}{2}} dx.$$

Toutes ces intégrales se calculent facilement et l'on obtient finalement, toujours dans l'hypothèse $\Re(s) < 0$,

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta_1(\alpha, s) = 2\pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \sum_{k=1}^\infty \frac{\cos 2k\pi\alpha}{k^{1-s}}.$$

Cette relation se simplifie au moyen de la théorie des fonctions eulériennes qui donne (*)

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} = \frac{2^s \Gamma(1-s) \sin \frac{s\pi}{2}}{\sqrt{\pi}}.$$

(*) On a (Serret, *Cours de calcul différentiel et intégral*, t. II, §§ 518 et 519) les deux formules :

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin s\pi}, \quad \Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right) = \frac{2\sqrt{\pi}}{2^{2s}}\Gamma(2s).$$

Si l'on change s en $\frac{s}{2}$ dans la première et s en $\frac{s+1}{2}$ dans la seconde, on trouve

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right) = -\frac{s}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{s}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{s\pi}{2}},$$

$$\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right) = \frac{s}{2}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^s}\Gamma(s+1).$$

Puis, en divisant membre à membre,

$$-\frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{s}{2}\right)} = \frac{1}{2^s\sqrt{\pi}}\Gamma(1+s)\sin\frac{s\pi}{2}.$$

Enfin, en changeant s en $-s$, on trouve le résultat utilisé ici.

On trouve ainsi, en réduisant,

$$(8) \quad . \quad . \quad . \quad \zeta_1(\alpha, s) = \frac{2^{1+s}}{\pi^{1-s}} \Gamma(1-s) \sin\frac{s\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\pi\alpha}{k^{1-s}}.$$

C'est le développement trigonométrique que nous voulions obtenir et qui est légitime pour $\Re(s) < 0$.

9. *Définition de* $\zeta_2(\alpha, s)$, *sa relation avec* $\psi_2(\alpha, x)$. — Soit, comme tout à l'heure, α une quantité positive, comprise entre zéro et un (limites exclues). La fonction $\zeta_2(\alpha, s)$ est la fonction de la variable complexe s définie, pour $\Re(s) > 1$, par l'équation

$$(9) \quad . \quad . \quad . \quad . \zeta_2(\alpha, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-\alpha)^s}.$$

Il existe entre ζ_2 et ψ_2 une relation du même genre que celle qui unit ζ_1 à ψ_1. On a, en effet,

$$\pi^{-\frac{s+1}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \frac{1}{(n+\alpha)^s} = \int_0^{\infty} (n+\alpha) e^{-(n+\alpha)^2\pi x} x^{\frac{s-1}{2}} dx,$$

$$-\pi^{-\frac{s+1}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \frac{1}{(n-\alpha)^s} = \int_0^{\infty} (\alpha-n) e^{-(\alpha-n)^2\pi x} x^{\frac{s-1}{2}} dx.$$

Attribuant successivement, dans ces équations, toutes les valeurs positives à n, puis ajoutant toutes les équations correspondantes membre à membre, on trouve, pour $\Re(s) > 1$,

$$(10) \quad . \quad . \pi^{-\frac{s+1}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \zeta_2(\alpha, s) = \int_0^{\infty} \psi_2(\alpha, x) x^{\frac{s-1}{2}} dx.$$

10. La fonction $\zeta_2(\alpha, s)$ n'est définie par l'équation précédente que pour $\Re(s) > 1$, mais la propriété fondamentale de ψ_2 nous permet d'obtenir aisément pour ζ_2 une représentation valable dans toute l'étendue du plan.

On a, en effet,

$$\int_0^{\infty} \psi_2(\alpha, x) x^{\frac{s-1}{2}} dx = \int_1^{\infty} \psi_2(\alpha, x) x^{\frac{s-1}{2}} dx + \int_0^{1} \psi_2(\alpha, x) x^{\frac{s-1}{2}} dx,$$

et par la formule (4),

$$\int_0^1 \psi_2(\alpha, x)\, x^{\frac{s-1}{2}}\, dx = 2\int_0^1 x^{\frac{s}{2}-2}\, dx \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-\frac{k^2\pi}{x}} \sin(2k\pi\alpha)$$

$$= 2\sum_{k=1}^{\infty} k \sin(2k\pi\alpha) \int_1^{\infty} e^{-k^2\pi x}\, x^{-\frac{s}{2}}\, dx.$$

On tire de là, pour $\zeta_2(\alpha, s)$, l'expression valable dans tout le plan

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} \pi^{-\frac{s+1}{2}}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\zeta_2(\alpha, s) &= \int_1^{\infty} \psi_2(\alpha, x)\, x^{\frac{s-1}{2}}\, dx \\ &+ 2\sum_{k=1}^{\infty} k \sin(2k\pi\alpha) \int_1^{\infty} e^{-k^2\pi x}\, x^{-\frac{s}{2}}\, dx. \end{aligned} \right.$$

Cette formule montre que la fonction $\zeta_2(\alpha, s)$ est une fonction synectique dans toute l'étendue du plan.

11. *Développement de $\zeta_2(\alpha, s)$ en série trigonométrique.* — Ce développement suppose encore que l'on ait $\mathfrak{R}(s) < 0$. On trouve, dans cette hypothèse, par une transformation analogue à celle du numéro précédent,

$$\int_1^{\infty} \psi_2(\alpha, x)\, x^{\frac{s-1}{2}}\, dx = 2\sum_{k=1}^{\infty} k \sin(2k\pi\alpha) \int_0^1 e^{-k^2\pi x}\, x^{-\frac{s}{2}}\, dx,$$

et en substituant ce résultat dans la dernière formule,

$$\pi^{-\frac{s+1}{2}}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\zeta_2(\alpha, s) = 2\sum_{k=1}^{\infty} k \sin(2k\pi\alpha) \int_0^{\infty} e^{-k^2\pi x}\, x^{-\frac{s}{2}}\, dx.$$

Enfin, en remplaçant toutes ces intégrales par leur valeur, on trouve, dans l'hypothèse $\mathfrak{R}(s) < 0$,

$$\pi^{-\frac{s+1}{2}}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\zeta_2(\alpha, s) = 2\pi^{-\frac{2-s}{2}}\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k\pi\alpha)}{k^{1-s}}.$$

Cette équation peut se transformer au moyen de la formule suivante, empruntée à la théorie des fonctions eulériennes (*),

$$\frac{\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} = \frac{2^s\Gamma(1-s)\cos\frac{s\pi}{2}}{\sqrt{\pi}},$$

ce qui donne

$$(12) \quad . \quad . \quad \zeta_2(\alpha, s) = \frac{2^{1+s}}{\pi^{1-s}}\Gamma(1-s)\cos\frac{s\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k\pi\alpha)}{k^{1-s}}.$$

C'est le développement trigonométrique que nous voulions obtenir et qui est légitime pour $\mathfrak{R}(s) < 0$.

12. *Définition de la fonction* B(α, s). — Cette fonction est définie, pour $\mathfrak{R}(s) > 1$, par la formule

$$B(\alpha, s) = \frac{1}{\alpha^s} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+\alpha)^s}.$$

Cette fonction a été introduite dans l'analyse par M. Piltz (sauf que M. Piltz change le signe de s). On la ramène immédiatement aux deux précédentes par la relation

$$B(\alpha, s) = \frac{1}{2}\left[\zeta_1(\alpha, s) + \zeta_2(\alpha, s)\right].$$

Les propriétés de cette fonction sont donc complètement éclaircies par ce qui précède et on peut obtenir, pour la représenter, des expressions valables pour toute valeur de s.

Si l'on suppose $\mathfrak{R}(s) < 0$, le développement trigonométrique de B(α, s) par rapport à α se déduit immédiatement des formules (12) et (8) :

$$B(\alpha, s) = \frac{2^s}{\pi^{1-s}}\Gamma(1-s)\left[\sin\frac{s\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k\pi\alpha)}{k^{1-s}} + \cos\frac{s\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k\pi\alpha)}{k^{1-s}}\right].$$

(*) Cette formule est équivalente à la formule analogue du n° 8 et s'en déduit par le changement de s en $(s-1)$.

La relation précédente est la relation fondamentale de M. Piltz, qui l'a démontrée directement par le calcul des coefficients du développement trigonométrique. Cette formule sert de base à ses recherches ultérieures. Pour nous, elle ne nous sera d'aucune utilité dans cette partie du Mémoire et nous n'en parlerons plus. Nous aurons toujours recours aux propriétés des fonctions beaucoup plus maniables $\psi_1(\alpha, x)$ et $\psi_2(\alpha, x)$.

§ 3. — *Application des méthodes de M. Hadamard à certaines fonctions.*

Nous allons démontrer d'abord quelques théorèmes dont nous aurons à faire un usage répété dans la suite.

13. Théorème I. — *Désignons par* a (*supposé* > 0) *et* k *deux constantes réelles, et par* η *une quantité qui tend vers zéro quand* n *tend vers l'infini; on peut écrire l'équation*

$$\int_1^{\infty} e^{-ax} x^k (lx)^n \, dx = [(1+\eta) ln]^n.$$

Pour démontrer ce théorème, nous allons montrer que l'intégrale du premier membre est comprise entre deux expressions, toutes les deux de la forme du second membre.

Cherchons d'abord une limite supérieure de cette intégrale. En désignant par ε une constante infiniment petite, on a, à partir d'une valeur suffisamment grande de n,

$$\int_1^{\infty} e^{-ax} x^k (lx)^n \, dx > \int_{(n-1)\varepsilon}^{n\varepsilon} e^{-ax} x^k (lx)^n \, dx,$$

et, par le théorème de la moyenne, il vient $(0 < \theta < 1)$

$$\int_1^{\infty} e^{-ax} x^k (lx)^n \, dx > e^{-(n-\theta)a\varepsilon} (n-\theta)^k [l\varepsilon(n-\theta)]^n \varepsilon$$

$$> \left[\varepsilon^{\frac{1}{n}} e^{-\left(1-\frac{\theta}{n}\right)a\varepsilon} (n-\theta)^{\frac{k}{n}} l.\varepsilon(n-\theta)\right]^n.$$

Mais la quantité

$$\varepsilon^{\frac{1}{n}} e^{-\left(1-\frac{\theta}{n}\right)a\varepsilon} (n-\theta)^{\frac{k}{n}} \frac{l.\varepsilon(n-\theta)}{ln}$$

tend vers $e^{-a\varepsilon}$ quand n tend vers l'infini. On peut donc, en désignant, en général, par η une quantité qui tend vers zéro quand n tend vers l'infini, mettre la dernière inégalité sous la forme

$$\int_1^\infty e^{-ax} x^k (lx)^n dx > \left[(1+\eta) e^{-a\varepsilon} ln\right]^n,$$

et, comme ε est un infiniment petit, ce second membre peut être remplacé, vu la nature du théorème, par

$$\left[(1+\eta) ln\right]^n.$$

Cherchons, d'autre part, une limite supérieure de la même intégrale. Pour cela, désignons par ε une constante inférieure à a; on peut évidemment écrire l'inégalité

$$\int_1^\infty e^{-ax} x^k (lx)^n dx < \left[\max . e^{-(a-\varepsilon)x} x^k (lx)^n\right] \int_1^\infty e^{-\varepsilon x} dx$$
$$< \frac{1}{\varepsilon} \max . e^{-(a-\varepsilon)x} x^k (lx)^n.$$

Or, le *maximum* correspond à la valeur de x qui annule la dérivée, c'est-à-dire la fonction

$$e^{-(a-\varepsilon)x} x^{k-1} (lx)^n \left[-(a-\varepsilon)x + k + \frac{n}{lx}\right].$$

La valeur de x qui annule cette dérivée est donc fournie par l'équation

$$(a-\varepsilon)x = k + \frac{n}{lx};$$

elle augmente indéfiniment avec n et a pour valeur approximative, quand n est grand,

$$x = \frac{1}{a-\varepsilon} \frac{n}{ln}.$$

Dans le sens général donné à η, on pourra donc écrire, pour cette valeur de x,

$$e^{-(a-\varepsilon)x} = e^{k+\frac{n}{lx}} = (1+\eta)^n.$$

D'ailleurs, pour cette valeur de x, les deux quantités x^k et $1 : \varepsilon$ sont visiblement de cette même forme $(1+\eta)^n$; la quantité $(lx)^n$ de la forme $[(1+\eta)\, ln]^n$ et, par conséquent, aussi

$$\frac{1}{\varepsilon} \max e^{-(a-\varepsilon)x} x^k (lx)^n = \left[(1+\eta)\, ln\right]^n,$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

14. *Remarque* I. — Il résulte immédiatement de l'application du théorème de la moyenne, que si l'on désigne par $\varphi(x)$ une fonction continue de x qui tend vers une limite finie positive et non nulle quand x tend vers l'infini, on peut aussi écrire, sous les conditions du théorème précédent,

$$\int_1^\infty \varphi(x) e^{-ax} x^k (lx)^n dx = \left[(1+\eta)\, ln\right]^n$$

15. *Remarque* II. — De même, plus généralement, si l'on désigne par $\theta(x)$ une fonction continue, qui reste comprise entre des limites finies (positives ou négatives) quand x augmente indéfiniment, on peut aussi écrire sous les conditions du théorème précédent:

$$\operatorname{mod} \int_1^\infty \theta(x) e^{-ax} x^k (lx)^n dx \overline{\overline{<}} \left[(1+\eta)\, ln\right]^n.$$

16. Théorème II. — *Soit* $\theta(x)$ *une fonction continue, qui conserve une valeur finie quand* x *tend vers l'infini, et* a *une constante positive; la fonction de* s, *représentée par l'intégrale*

$$f(s) = \int_1^\infty \theta(x) e^{-ax} x^s dx,$$

est une fonction synectique dans toute l'étendue du plan et cette fonction ne peut être d'un genre supérieur au premier (*).

L'intégrale est absolument et uniformément convergente dans toute portion du plan s; donc elle représente une fonction synectique dans tout le plan. Par conséquent, elle est développable en série de Maclaurin convergente pour toute valeur de s, sous la forme

$$a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_n s^n + \cdots.$$

Les coefficients se calculent par la formule

$$a_n = \frac{1}{1.2\ldots n}\int_0^{\infty} \theta(x) e^{-ax} (lx)^n dx,$$

et l'on a, par la remarque du n° 15,

$$|a_n| < \frac{1}{n!}\left[(1+\eta)ln\right]^n.$$

La formule précédente fait connaître la décroissance des coefficients a_n. On peut en déduire le genre de la fonction par la méthode de M. Hadamard. Celui-ci a démontré que lorsque le coefficient a_n est de l'ordre de $\frac{1}{(n!)^{\frac{1}{\lambda}}}$ où λ est un entier $E + 1$, la fonction est du genre E ou du genre $(E + 1)$. Dans le cas actuel, $\lambda = 1$, parce que $(ln)^n$ est un infiniment petit par rapport à toute puissance positive constante de $n!$. Donc la fonction que nous considérons est du genre *zéro* ou du genre *un*.

17. Théorème III. — *Si la fonction* f(s) *du théorème précédent possède des racines* ρ, *et si ces racines sont en nombre illimité, la série étendue à toutes ces racines*

$$\sum \frac{1}{(\text{mod } \rho)^k},$$

sera convergente pour $k > 1$.

(*) Il est clair que le théorème subsistera, si l'on remplace dans l'intégrale s par une fonction linéaire de s.

Ce théorème résulte encore de la règle suivante, découverte par M. Hadamard :

Soit $\varphi(n)$ une fonction constamment croissante avec n; si le coefficient a_n décroit plus vite que

$$\frac{1}{\varphi(n)^n},$$

le module de la n^{me} racine ρ_n, ces racines étant supposées rangées par ordre de modules croissants, sera supérieur à $\varphi(n)$.

On a ici

$$\operatorname{mod} a_n \overline{\overline{<}} \frac{1}{n!}\left[(1+\eta)\, ln\right]^n,$$

et comme, par la formule de Stirling,

$$n! = \left[(1+\eta)\frac{n}{e}\right]^n,$$

il vient donc

$$\operatorname{mod} a_n \overline{\overline{<}} \frac{1}{\left[(1+\eta)\frac{n}{eln}\right]},$$

et l'application de la règle de M. Hadamard donne

$$\operatorname{mod} \rho_n > \frac{1}{e}\frac{n}{ln}.$$

La série dont il est question dans l'énoncé du théorème converge donc plus rapidement que la série

$$\sum \left(\frac{ln}{n}\right)^k,$$

qui est convergente pour $k > 1$. Le théorème est donc établi.

18. *Remarque.* — L'application des méthodes utilisées dans les numéros qui précèdent permet d'établir très aisément que les fonctions ζ_1 et ζ_2 de s étudiées dans le paragraphe précédent sont des fonctions du premier genre. Ce résultat nous étant inutile, nous ne nous arrêterons pas à le démontrer en détail.

CHAPITRE II.

ÉTUDE ANALYTIQUE DES FONCTIONS DE DIRICHLET ET DE FONCTIONS AUXILIAIRES DANS LE CAS D'UN MODULE p PREMIER.

L'étude des fonctions de Dirichlet, c'est-à-dire des fonctions qui interviennent dans la démonstration du théorème sur la progression arithmétique, donne lieu à des discussions nouvelles assez longues dans les cas des modules composés. Cette circonstance nous a engagé à traiter d'abord en détail le cas des modules premiers. Ce cas a été traité d'abord par M. Piltz, qui a rencontré une partie des résultats que nous allons démontrer. Nous les indiquerons au fur et à mesure qu'ils se présenteront.

§ 1. — *Définition des caractères d'un nombre* (mod p).

19. Soit p un nombre premier et n un nombre quelconque non divisible par p. Soit ensuite g une racine primitive de la congruence

$$g^{p-1} \equiv 1 \pmod p,$$

et, d'autre part, ω une racine primitive de l'équation

$$(1) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \omega^{p-1} = 1.$$

Désignons encore par ν l'indice du nombre n, selon le module p, c'est-à-dire le nombre unique inférieur à p qui vérifie la congruence

$$(2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad g^{\nu} \equiv n \pmod p;$$

on dit que la quantité

$$(3) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \chi(n, \bmod p) = \omega^{\nu h},$$

où h est un des entiers $0, 1, 2 \ldots (p-2)$, est un caractère du

nombre n (mod p). Quand aucune confusion n'est possible, ce caractère se représente simplement par $\chi(n)$.

Les quantités ω^h, savoir

$$1, \omega, \omega^2, \ldots \omega^{p-2},$$

sont les $(p-1)$ racines de l'équation (1). On peut donc dire encore que l'on forme les différents caractères d'un nombre n en remplaçant, dans l'expression

$$\chi(n) = \omega^{\nu},$$

ω par les $(p-1)$ racines différentes de l'équation (1).

20. L'équation (1) a deux racines réelles $+1$ et -1, qui correspondent aux valeurs $h = 0$ et $h = \frac{p-1}{2}$. On appelle *caractère principal* celui qui correspond à la racine $+1$; il est égal à l'unité pour tous les nombres n. En dehors du caractère principal, il n'y en a qu'un seul qui soit réel pour tous les nombres n : il correspond à la racine (-1) et est égal à ± 1 suivant le nombre n.

Nous donnerons à tous les autres caractères le nom de *caractères imaginaires*, quoiqu'ils puissent avoir une valeur réelle pour certains nombres particuliers. Leur module est toujours égal à l'unité.

A tout caractère imaginaire $\chi(n)$ formé avec la racine ω^h correspond un caractère conjugué ou opposé, formé avec la racine ω^{-h} conjuguée de la première. Nous représenterons ce caractère conjugué par les notations

$$\frac{1}{\chi}(n) = \frac{1}{\chi(n)}.$$

Les caractères doivent être partagés en deux *classes*, mais cette distinction deviendra surtout importante plus tard. Le caractère principal forme à lui seul la première classe, et tous les autres caractères rentrent dans la seconde.

Quand il y aura lieu de les distinguer entre eux, nous représenterons les différents caractères par

$$\chi_0,\ \chi_1,\ \chi_2,\ \ldots\ \chi_{p-2},$$

selon qu'ils sont formés avec les racines

$$\omega^0,\ \omega^1,\ \omega^2,\ \ldots\ \omega^{p-2}.$$

De la sorte, le caractère principal sera représenté par χ_0.

Je ferai remarquer encore que, pour un caractère χ_h quelconque, $\chi_h(-1)$ est réel et égal à ± 1 suivant que h est pair ou impair. En effet, l'indice de (-1) étant $\frac{p-1}{2}$, on a

$$\chi_h(-1) = \omega^{\frac{p-1}{2}h} = (-1)^h.$$

21. Les caractères ainsi définis jouissent de quatre propriétés fondamentales bien connues, que nous allons énoncer :

1° Pour tout caractère χ et deux nombres quelconques n et n', on a la relation fonctionnelle

$$\chi(n)\chi(n') = \chi(nn');$$

2° On a, pour un caractère quelconque,

$$\chi(n) = \chi(n'), \quad \text{si} \quad n \equiv n' \pmod p;$$

3° Pour tout caractère, sauf le principal, on a

$$\sum_{n=1}^{p-1} \chi(n) = 0,$$

tandis que, pour le caractère principal,

$$\sum_{n=1}^{p-1} \chi(n) = 1;$$

4° Si l'on désigne par S une somme étendue à la totalité des caractères, on a

$$\underset{\chi}{S}\,\chi(n) = 0,$$

sauf cependant si $n \equiv 1 \pmod p$, auquel cas

$$\underset{\chi}{S}\,\chi(n) = p - 1.$$

§ 2. — *Définition et propriétés des fonctions* $\Psi_1(x,\chi)$ *et* $\Psi_2(x,\chi)$.

22. *Définition des fonctions* $\Psi_1(x,\chi)$ et $\Psi_2(x,\chi)$. — Ces deux fonctions, comme nous allons voir, sont étroitement liées aux fonctions $\psi_1(\alpha, x)$ et $\psi_2(\alpha, x)$, que nous avons considérées dans le chapitre Ier.

Dans le paragraphe actuel, nous supposons expressément que le caractère χ est différent du principal, et nous posons comme définition

$$
(1) \quad \ldots \quad \begin{cases} \Psi_1(x, \chi \bmod p) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}{}' \chi(n) e^{-\frac{n^2\pi x}{p}}, \\ \Psi_2(x, \chi \bmod p) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}{}' \chi(n) n e^{-\frac{n^2\pi x}{p}}. \end{cases}
$$

Dans ces sommes, on donne successivement à n toutes les valeurs entières premières avec p. C'est pour rappeler cette circonstance que nous avons accentué le signe Σ.

Ces équations (1) peuvent encore se mettre sous une autre forme. En remarquant la relation (21, 1°)

$$\chi(-n) = \chi(-1)\chi(n),$$

elles peuvent s'écrire

$$
(2) \quad \ldots \quad \begin{cases} \Psi_1(x, \chi) = [1 + \chi(-1)] \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}{}' \chi(n) e^{-\frac{n^2\pi x}{p}}, \\ \Psi_2(x, \chi) = [1 - \chi(-1)] \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}{}' \chi(n) n e^{-\frac{n^2\pi x}{p}}. \end{cases}
$$

Rappelons encore que $\chi(-1) = \pm 1$, comme on l'a vu au n° 20; on aura :

1° Si $\chi(-1) = 1$,

$$
(3) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} \Psi_1(x, \chi) = 2 \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}{}' \chi(n) e^{-\frac{n^2\pi x}{p}}, \\ \Psi_2(x, \chi) = 0; \end{cases}
$$

2° Si $\chi(-1) = -1$,

$$(4) \quad \ldots\ldots \begin{cases} \Psi_1(x, \chi) = 0, \\ \Psi_2(x, \chi) = 2 \sum_{n=1}^{\infty}{}' \chi(n) n e^{-\frac{n^2 \pi x}{p}}. \end{cases}$$

On n'a donc à étudier la fonction Ψ_1 que si $\chi(-1) = 1$, et la fonction Ψ_2 que si $\chi(-1) = -1$.

23. ***Étude de la fonction $\Psi_1(x, \chi)$ quand $\chi(-1) = 1$.*** — Si l'on désigne par k un nombre entier inférieur à p, et tient compte de la relation (21, 2°)

$$\chi(n) = \chi(k) \quad \text{si} \quad n \equiv k (\text{mod } p),$$

le coefficient de $\chi(k)$ dans le second membre de l'équation

$$\Psi_1(x, \chi) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \chi(n) e^{-\frac{n^2 \pi x}{p}}$$

aura pour valeur

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-(k+mp)^2 \frac{\pi x}{p}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\left(m + \frac{k}{p}\right)^2 \pi p x} = \psi_1\left(\frac{k}{p}, px\right),$$

en vertu de la définition de Ψ_1 (n° 3).

On a donc, entre Ψ_1 et ψ_1, la relation

$$(5) \quad \ldots\ldots \Psi_1(x, \chi) = \sum_{k=1}^{p-1} \chi(k) \psi_1\left(\frac{k}{p}, px\right).$$

Cette équation va nous servir à trouver la relation fonctionnelle que vérifie $\Psi_1(x, \chi)$. Elle se déduit de la relation établie pour $\psi_1(\alpha, x)$ au n° 3, et que voici :

$$\psi_1(\alpha, x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi}{x}} \cos 2n\pi\alpha\right].$$

Si l'on fait successivement $\alpha = \frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \ldots \frac{p-1}{p}$ et qu'on substitue dans l'équation (5) les expressions de ψ_1 tirées de l'équation pré-

cédente, le terme qui ne renferme pas de cosinus disparait, parce que la somme des caractères est nulle (**21**), et il vient

$$\psi_1(x, \chi) = \frac{2}{\sqrt{px}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{-\frac{n^2\pi}{px}} \sum_{k=1}^{p-1} \chi(k) \cos \frac{2kn\pi}{p} \right].$$

Mais la somme

$$\sum_{k=1}^{p-1} \chi(k) \cos \frac{2kn\pi}{p}$$

s'évalue aisément :

1° Si n est un multiple de p, cette somme se réduit à

$$\sum_{k=1}^{p-1} \chi(k) = 0;$$

2° Si n est premier avec p, on a (**21**, 1°)

$$\sum_{k=1}^{p-1} \chi(k) \cos \frac{2kn\pi}{p} = \frac{1}{\chi(n)} \sum_{k=1}^{p-1} \chi(kn) \cos \frac{2kn\pi}{p}.$$

Remarquons que quand k varie, kn représente, en même temps que k, un système complet de résidus (mod p). Posons d'après cela

$$\sum_{k=1}^{p-1} \chi(k) \cos \frac{2k\pi}{p} = \sum_{k=1}^{p-1} \chi(kn) \cos \frac{2kn\pi}{p} = \tau_1(\chi);$$

on aura

$$\sum_{k=1}^{p-1} \chi(k) \cos \frac{2kn\pi}{p} = \frac{1}{\chi(n)} \tau_1(\chi).$$

Il vient ainsi

$$\psi_1(x, \chi) = \frac{2\tau_1(\chi)}{\sqrt{px}} \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{\chi(n)} e^{-\frac{n^2\pi}{px}},$$

et par la formule (3), puisque $\chi(-1) = 1$ par hypothèse,

$$(6) \quad \ldots\ldots \quad \psi_1(x, \chi) = \frac{\tau_1(\chi)}{\sqrt{px}} \psi_1\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{\chi}\right).$$

Posons encore, pour simplifier,

$$\tau_1(\chi) = \varepsilon_1(\chi)\sqrt{p}.$$

L'équation (6) prend ainsi la forme

$$(7) \quad \ldots\ldots \Psi_1(x, \chi) = \varepsilon_1(\chi)\frac{1}{\sqrt{x}}\Psi_1\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{\chi}\right),$$

et telle est la relation fonctionnelle que vérifie la fonction Ψ_1.

Le facteur $\varepsilon_1(\chi)$, indépendant de x, a son module égal à l'unité. En effet, multiplions membre à membre l'équation (7) avec celle qui s'en déduit par le changement simultané de x en $1:x$ et de χ en $1:\chi$, et supprimons le facteur commun $\Psi_1(x,\chi)\Psi_1\left(x, \frac{1}{\chi}\right)$; il viendra

$$(8) \quad \ldots\ldots \varepsilon_1(\chi)\varepsilon_1\left(\frac{1}{\chi}\right) = [\operatorname{mod} \varepsilon_1(\chi)]^2 = 1.$$

La même conclusion s'obtient en posant $x=1$ dans l'équation (7), à condition que $\Psi_1(1,\chi)$ ne soit pas nul. On a, dans ce cas,

$$(8^a) \quad \ldots\ldots \varepsilon_1(\chi) = \frac{\Psi_1(1, \chi)}{\Psi_1\left(1, \frac{1}{\chi}\right)} = \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}{}'\chi(n)\, e^{-\frac{n^2\pi}{p}}}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\chi(n)}\, e^{-\frac{n^2\pi}{p}}}.$$

24. *Remarque.* — Si χ est le caractère réel correspondant à la racine $\omega=(-1)$ (n° 20), on peut se servir, pour représenter ce caractère, du symbole de Legendre

$$\chi(n) = \frac{1}{\chi(n)} = \left(\frac{n}{p}\right).$$

Pour que $\chi(-1)=1$, il faut que $p\equiv 1 \pmod 4$. On a, dans ce cas, par l'équation 8,

$$\varepsilon_1(\chi) = \pm 1,$$

et il vient

$$\tau_1(\chi) = \sum_{k=1}^{p-1}\left(\frac{k}{p}\right)\cos\frac{2k\pi}{p} = \pm\sqrt{p}.$$

On retrouve donc ainsi, au signe près, la valeur de la somme de Gauss. Si $\Psi_1(1,\chi)$ n'est pas nul, la formule (8°) montre que c'est le signe $+$ qu'il faut prendre. Gauss a montré que cette dernière conclusion est toujours vraie (*), de sorte qu'on a sans restriction $\varepsilon_1(\chi)=1$. Dans le cas du caractère réel, la relation (7) se réduit donc à

$$(9) \quad \ldots\ldots \quad \Psi_1(x,\chi)=\frac{1}{\sqrt{x}}\Psi_1\left(\frac{1}{x},\chi\right).$$

25. *Étude de la fonction $\Psi_2(x,\chi)$ quand $\chi(-1)=-1$.* Si l'on groupe les termes comme au n° 23, on voit que le coefficient de $\chi(k)$ dans le second membre de l'équation

$$\Psi_2(x,\chi)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \chi(n)ne^{-\frac{n^2\pi x}{p}},$$

a pour valeur

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}(k+mp)e^{-(k+mp)^2\frac{\pi x}{p}}=p\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\frac{k}{p}+m\right)e^{-\left(\frac{k}{p}+m\right)^2\pi px}=p\psi_2\left(\frac{k}{p},px\right).$$

Par conséquent,

$$(10) \quad \ldots\ldots \quad \Psi_2(x,\chi)=p\sum_{k=1}^{p-1}\chi(k)\psi_2\left(\frac{k}{p},px\right).$$

Comme dans le cas précédent, nous allons déduire la relation fonctionnelle vérifiée par Ψ_2 de la relation du n° 5, à laquelle satisfait ψ_2, savoir

$$\psi_2(\alpha,x)=\frac{2}{x\sqrt{x}}\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-n^2\frac{\pi}{x}}\sin 2k\pi\alpha.$$

On fait successivement dans celle-ci $\alpha=\frac{1}{p},\frac{2}{p},\ldots\frac{p-1}{p}$, et l'on substitue dans l'équation (10); il vient ainsi

$$\Psi_2(x,\chi)=\frac{2}{x\sqrt{px}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[ne^{-\frac{n^2\pi}{px}}\sum_{k=1}^{p-1}\chi(k)\sin\frac{2kn\pi}{p}\right].$$

(*) *Summatio quarumdam serierum singularium* (1808). — Voir aussi DIRICHLET DEDEKIND, *Zahlentheorie*, Supplement I.

On a d'ailleurs, comme au n° 23 :
1° Pour n multiple de p,

$$\sum_{k=1}^{p-1} \chi(k) \sin \frac{2kn\pi}{p} = 0;$$

2° Pour n premier avec p,

$$\sum_{k=1}^{p-1} \chi(k) \sin \frac{2kn\pi}{p} = \bar{\chi}(n) \sum_{k=1}^{p-1} \chi(k) \sin \frac{2k\pi}{p} = \bar{\chi}(n)\tau_2(\chi).$$

D'où l'équation

$$\Psi_2(x, \chi) = \frac{2\tau_2(\chi)}{x\sqrt{px}} \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{\chi(n)} n e^{-\frac{n^2\pi}{px}},$$

et par la relation (4) du n° 22, puisque $\chi(-1) = -1$ par hypothèse,

$$(11) \quad \ldots\ldots \quad \Psi_2(x, \chi) = \frac{\tau_2(\chi)}{x\sqrt{px}} \Psi_2\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{\chi}\right).$$

Posons, pour simplifier,

$$\tau_2(\chi) = \varepsilon_2(\chi)\sqrt{p}.$$

L'équation (11) se mettra alors sous la forme

$$(12) \quad \ldots\ldots \quad \Psi_2(x, \chi) = \varepsilon_2(\chi) \frac{1}{x\sqrt{x}} \Psi_2\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{\chi}\right).$$

Telle est la relation fonctionnelle que vérifie la fonction $\Psi_2(x,\chi)$ quand $\chi(-1) = -1$. On montre, comme dans le cas précédent, que le module de $\varepsilon_2(\chi)$ est égal à l'unité.

26. *Remarque.* — Si χ est le caractère réel correspondant à la racine $\omega = -1$ de l'équation $\omega^{p-1} = 1$, on a

$$\chi(n) = \frac{1}{\chi(n)} = \left(\frac{n}{p}\right).$$

Lorsque $p \equiv 3 \pmod 4$, auquel cas

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = -1,$$

on en conclut

$$\tau_2(\chi) = \sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{k}{p}\right) \sin \frac{2k\pi}{p} = +\sqrt{p}, \quad \varepsilon_2(\chi) = 1,$$

sans ambiguïté de signe, comme dans le cas précédent. La fonction correspondante possède alors la propriété fonctionnelle

$$(13) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \Psi_2(x,\chi) = \frac{1}{x\sqrt{x}}\,\Psi_2\left(\frac{1}{x},\chi\right).$$

§ 3. — *Définition et propriétés des fonctions* $Z(s,\chi)$, $\xi_1(s,\chi)$ *et* $\xi_2(s,\chi)$.

27. Les fonctions $Z(s,\chi)$ sont celles que nous appelons fonctions de Dirichlet, parce que cet auteur les a introduites dans l'analyse. Elles jouent le rôle essentiel dans la démonstration du théorème sur la progression arithmétique. Nous allons étudier ici leurs propriétés fonctionnelles qui ont été découvertes par M. Piltz. Mais au lieu de les établir directement, comme le fait cet auteur, nous allons les rattacher à celles des fonctions $\Psi_1(x,\chi)$ et $\Psi_2(x,\chi)$, que nous venons d'analyser (*).

28. Les fonctions $Z(s,\chi)$ sont définies, pour $\mathfrak{R}(s) > 1$, par la série ou le produit infini

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad Z(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{\chi(n)}{n^s} = \Pi\left(1 - \frac{\chi(q)}{q^s}\right)^{-1},$$

(*) Il convient d'ajouter que M. Lipschitz, auquel le travail de M. Piltz (1884) semble être resté inconnu, a retrouvé ces propriétés fonctionnelles par une méthode analogue à celle de M. Piltz dans son mémoire de 1889 déjà cité. (*Journ. de Crelle*, t. CV.)

où la somme accentuée est étendue à tous les nombres entiers non divisibles par p, le produit à tous les nombres premiers q autres que p.

Dans le paragraphe actuel, nous supposerons encore que χ est un caractère différent du principal. Dans cette hypothèse, la série converge pour $\mathcal{R}(s) > 0$, mais nous n'utiliserons pas cette circonstance pour le moment.

29. Ces séries jouissent de propriétés différentes suivant que l'on a $\chi(-1) = +1$ ou -1. En effet, nous allons voir que, suivant l'hypothèse, elles se ramènent à la fonction ζ_1 ou à la fonction ζ_2 du premier chapitre.

1° Si $\chi(-1) = 1$, on a

$$\chi(k) = \chi(p-k),$$

et l'on peut écrire

$$Z(s,\chi) = \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \chi(k) \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(mp+k)^s} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(mp-k)^s} \right]$$
$$= \frac{1}{p^s} \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \chi(k) \zeta_1\left(\frac{k}{p}, s\right);$$

2° Si $\chi(-1) = -1$, on a

$$\chi(k) = -\chi(p-k),$$

et l'on peut écrire

$$Z(s,\chi) = \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \chi(k) \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(mp+k)^s} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(mp-k)^s} \right]$$
$$= \frac{1}{p^s} \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \chi(k) \zeta_2\left(\frac{k}{p}, s\right).$$

30. Nous allons encore montrer que, suivant l'un ou l'autre de ces deux cas, la fonction $Z(s,\chi)$ se ramène aussi à l'une des fonctions Ψ_1 ou Ψ_2. On pourrait déduire ce résultat des calculs

que nous venons de faire et de ceux du chapitre I, mais il est aussi simple de l'établir directement.

1° Si $\chi(-1)=1$, on part de la relation

$$\left(\frac{\pi}{p}\right)^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\frac{1}{n^s}=\int_0^\infty e^{-n^2\frac{\pi x}{p}}x^{\frac{s}{2}-1}\,dx,$$

et l'on trouve par la formule (1) ci-dessus et la formule (3) du n° 22

$$(2)\quad . \quad . \quad \left(\frac{\pi}{p}\right)^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)Z(s,\chi)=\frac{1}{2}\int_0^\infty \psi_1(x,\chi)x^{\frac{s}{2}-1}dx.$$

Pour $\chi(-1)=1$, nous définirons une nouvelle fonction $\xi_1(s,\chi)$ par l'équation

$$(3)\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \xi_1(s,\chi)=\left(\frac{\pi}{p}\right)^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)Z(s,\chi).$$

La fonction Z se ramènera ainsi à la fonction ξ_1, et l'on aura

$$(4)\quad . \quad . \quad . \quad . \quad \xi_1(s,\chi)=\frac{1}{2}\int_0^\infty \psi_1(x,\chi)\,x^{\frac{s}{2}-1}\,dx.$$

On voit par les formules précédentes qu'il existe entre les fonctions Z et ξ_1 une relation analogue à celle qui lie les fonctions $\zeta(s)$ et $\xi(t)$ de Riemann.

2° Si $\chi(-1)=-1$, on part de la relation

$$\left(\frac{\pi}{p}\right)^{-\frac{s+1}{2}}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\frac{1}{n^s}=\int_0^\infty ne^{-n^2\frac{\pi x}{p}}x^{\frac{s-1}{2}}dx,$$

et l'on trouve par la formule (1) du paragraphe actuel et la formule (4) du paragraphe précédent

$$(5)\quad . \quad . \quad \left(\frac{\pi}{p}\right)^{-\frac{s-1}{2}}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)Z(s,\chi)=\frac{1}{2}\int_0^\infty \psi_2(x,\chi)x^{\frac{s-1}{2}}dx.$$

Nous définirons, comme dans le cas précédent, une nouvelle fonction $\xi_2(s, \chi)$ par l'équation

$$(6) \quad \ldots \quad \xi_2(s,\chi) = \left(\frac{\pi}{p}\right)^{-\frac{s+1}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) Z(s,\chi);$$

la fonction Z se ramène ainsi à la fonction ξ_2, et l'on a

$$(7) \quad \ldots \quad \xi_2(s,\chi) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \Psi_2(x,\chi)\, x^{\frac{s-1}{2}}\, dx.$$

31. Les formules (4) et (7) du numéro précédent viennent d'être établies pour $\mathfrak{R}(s) > 1$, mais ces formules restent convergentes et par conséquent valables pour toute valeur de s. Elles prouvent donc que $Z(s, \chi)$ est une fonction synectique dans tout le plan (le caractère χ étant supposé différent du principal). Toutefois cette circonstance n'est pas apparente dans les formules susmentionnées et, pour la mettre en pleine lumière, nous allons mettre les intégrales qui précèdent sous une autre forme, qui conduit encore à d'autres conséquences importantes.

1° Supposons d'abord $\chi(-1) = 1$. On a

$$\int_0^{\infty} \Psi_1(x,\chi) x^{\frac{s}{2}-1}\, dx = \int_1^{\infty} \Psi_1 x^{\frac{s}{2}-1}\, dx + \int_0^{1} \Psi_1 x^{\frac{s}{2}-1}\, dx.$$

Si l'on change la variable d'intégration x en $\frac{1}{x}$ dans la seconde intégrale, puisqu'on utilise la relation fonctionnelle (7) du paragraphe précédent (n° 23), il vient successivement

$$\int_0^{1} \Psi_1(x,\chi) x^{\frac{s}{2}-1}\, dx = \int_1^{\infty} \Psi_1\left(\frac{1}{x}, \chi\right) x^{-\frac{s}{2}-1}\, dx$$

$$= \varepsilon_1(\chi) \int_1^{\infty} \Psi_1\left(x, \frac{1}{\chi}\right) x^{-\frac{s+1}{2}}\, dx,$$

et, en substituant dans la formule (4) qui a lieu pour $\chi(-1) = 1$,

$$(4^*) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{aligned} \xi_1(s, \chi) &= \frac{1}{2}\int_1^\infty \Psi_1(x, \chi) x^{\frac{s}{2}-1} dx \\ &+ \frac{1}{2}\varepsilon_1(\chi)\int_1^\infty \Psi_1\left(x, \frac{1}{\chi}\right) x^{-\frac{s+1}{2}} dx. \end{aligned} \right.$$

On voit maintenant, en se reportant à l'expression de Ψ_1 en série (n° 22), que le second membre converge pour toute valeur de s et représente une fonction entière de s dans toute l'étendue du plan.

La formule (4*) met encore en lumière la propriété fonctionnelle de $\xi_1(s, \chi)$. Si l'on considère que l'on a (n° 23, form. 8)

$$\varepsilon_1(\chi) . \varepsilon_1\left(\frac{1}{\chi}\right) = 1,$$

on reconnaîtra à la seule inspection du second membre l'exactitude de la relation

$$(8) \quad \ldots\ldots \quad \xi_1(s, \chi) = \varepsilon_1(\chi)\xi_1\left(1 - s, \frac{1}{\chi}\right).$$

D'où le théorème suivant :

Si $\chi(-1) = 1$, *la fonction* $\xi_1(s, \chi)$ *se reproduit, multipliée par un facteur indépendant de* s *et de module égal à l'unité, par le changement simultané de* s *en* $1 - s$ *et de* χ *en* $\frac{1}{\chi}$; *si, en particulier,* χ *est le caractère réel correspondant à la racine* $\omega = -1$, *la fonction se reproduit par le changement de* s *en* $1 - s$ (*).

2° Passons au cas où $\chi(-1) = -1$. On a, par les mêmes

(*) Dans le cas du caractère réel, cette propriété a été découverte par M. HURWITZ (*Zeitschrift für Math. u. Ph.*, t. XXVII, 1882).

transformations que ci-dessus,

$$\xi_2(s,\chi) = \frac{1}{2}\int_1^\infty \Psi_2(x,\chi)\, x^{\frac{s-1}{2}} dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \Psi_2(x,\chi)\, x^{\frac{s-1}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^\infty \Psi_2(x,\chi)\, x^{\frac{s-1}{2}} dx + \frac{1}{2}\int_1^\infty \Psi_2\left(\frac{1}{x},\chi\right) x^{-\frac{s-3}{2}} dx.$$

$$(7^a)\quad \xi_2(s,\chi) = \frac{1}{2}\int_1^\infty \Psi_2(x,\chi)\, x^{\frac{s-1}{2}} dx + \frac{1}{2}\varepsilon_2(\chi)\int_1^\infty \Psi_2\left(x,\frac{1}{\chi}\right) x^{-\frac{s}{2}} dx.$$

La formule (7^a), qui n'est qu'une autre forme de la formule (7), met en évidence que $\xi_2(s,\chi)$ est une fonction entière pour toute valeur de s. On en conclut, comme dans le premier cas, la relation fonctionnelle

$$(9) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \xi_2(s,\chi) = \varepsilon_2(\chi)\,\xi_2\left(1-s,\frac{1}{\chi}\right).$$

D'où le théorème suivant :

Si $\chi(-1) = -1$, la fonction $\xi_2(s,\chi)$ se reproduit, multipliée par un facteur indépendant de s *et de module égal à l'unité, par le changement simultané de* s *en* $1-s$ *et de* χ *en* $\frac{1}{\chi}$. *En particulier, si* χ *est le caractère réel correspondant à la racine* $\omega = -1$, *la fonction se reproduit simplement par le changement de* s *en* $1-s$.

32. *Remarque.* — On peut encore énoncer les théorèmes contenus dans les formules (8) et (9) sous la forme suivante : *Les produits*

$$\xi_1(s,\chi)\,\xi_1\left(s,\frac{1}{\chi}\right), \quad \text{si} \quad \chi(-1) = 1;$$

$$\xi_2(s,\chi)\,\xi_2\left(s,\frac{1}{\chi}\right), \quad \text{si} \quad \chi(-1) = -1,$$

restent invariables par le changement de s *en* $1-s$.

33. *Conséquences relatives aux racines de ξ_1 et ξ_2.* — Les formules (3) et (6) qui lient les fonctions ξ_1 et ξ_2 à Z prouvent, puisque la fonction Γ ne peut pas s'annuler, que ξ_1 et ξ_2 ne peuvent avoir d'autres racines que celles de Z.

L'expression de Z (s, χ) en produit infini

$$Z(s, \chi) = \Pi\left(1 - \frac{\chi(q)}{q^s}\right)^{-1},$$

convergent pour $\Re(s) > 1$, prouve que Z (s, χ) ne peut avoir de racines dont la partie réelle surpasse l'unité. Donc, en premier lieu, les fonctions ξ_1 et ξ_2 ne peuvent avoir de racines dont la partie réelle surpasse l'unité. Mais, d'autre part, les formules (8) ou (9) montrent que si s est racine de $\xi_1(s, \chi)$ ou $\xi_2(s, \chi)$, $(1 - s)$ sera racine de $\xi_1\left(s, \frac{1}{\chi}\right)$ ou $\xi_2\left(s, \frac{1}{\chi}\right)$; donc, en vertu de la conclusion précédente, s ne peut avoir non plus sa partie réelle négative. De là la conclusion suivante :

Si les fonctions ξ_1 et ξ_2 ont des racines, ce sont nécessairement des racines de Z, et ces racines ont leur partie réelle comprise entre 0 et + 1 (limites non exclues jusqu'à présent).

Nous allons démontrer au paragraphe suivant que ces racines existent effectivement.

§ 4. — *Genre des fonctions ξ_1, ξ_2 et Z. Racines de ces fonctions.*

34. Pour déterminer le genre de ces fonctions, nous allons employer encore une fois la méthode de M. Hadamard, dont nous avons déjà fait connaître les principes au chapitre Ier, § 3. Au lieu d'appliquer simplement les théorèmes déjà démontrés, nous allons reproduire certaines démonstrations qui conduisent, dans dans le cas actuel, à des résultats un peu plus précis.

Développements de ξ_1 et ξ_2 par la formule de Maclaurin. — Les fonctions entières ξ_1 et ξ_2 peuvent se développer par la formule de Maclaurin dans toute l'étendue du plan sous la forme

$$\xi_1(s, \chi) = a_0 + a_1 s + \cdots + a_n s^n + \cdots,$$
$$\xi_2(s, \chi) = b_0 + b_1 s + \cdots + b_n s^n + \cdots.$$

Les coefficients du développement se déduisent directement des formules (4°) et (7°) du paragraphe précédent, et peuvent se calculer par les formules

$$a_n = \frac{1}{2}\frac{1}{2^n}\frac{1}{1.2\ldots n}\left[\int_1^{\infty}\Psi_1(x,\chi)(lx)^n\frac{dx}{x}\right.$$
$$\left.+(-1)^n\varepsilon_1(\chi)\int_1^{\infty}\Psi_1\left(x,\frac{1}{\chi}\right)(lx)^n\frac{dx}{\sqrt{x}}\right].$$
$$b_n = \frac{1}{2}\frac{1}{2^n}\frac{1}{1.2\ldots n}\left[\int_1^{\infty}\Psi_2(x,\chi)(lx)^n\frac{dx}{\sqrt{x}}\right.$$
$$\left.+(-1)^n\varepsilon_2(\chi)\int_1^{\infty}\Psi_2\left(x,\frac{1}{\chi}\right)(lx)^n dx\right].$$

On remarque que les deux quantités

$$\Psi_1(x,\chi)\ \frac{1}{x}\ +(-1)^n\varepsilon_1(\chi)\,\Psi_1\left(x,\frac{1}{\chi}\right)\frac{1}{\sqrt{x}},$$
$$\Psi_2(x,\chi)\frac{1}{\sqrt{x}}+(-1)^n\varepsilon_2(\chi)\,\Psi_2\left(x,\frac{1}{\chi}\right).$$

ne diffèrent respectivement des deux quantités

$$2(-1)^n\varepsilon_1(\chi)e^{-\frac{\pi x}{p}}\frac{1}{\sqrt{x}},$$
$$2(-1)^n\varepsilon_2(\chi)e^{-\frac{\pi x}{p}},$$

que par un facteur qui tend vers l'unité quand x augmente indéfiniment. On peut donc appliquer la remarque du n° 14 et poser, en désignant en général par η une quantité qui tend vers zéro pour n infini, les expressions asymptotiques

$$a_n = (-1)^n\varepsilon_1(\chi)\frac{1}{2^n n!}\left[(1+\eta)\,ln\right]^n,$$
$$b_n = (-1)^n\varepsilon_2(\chi)\frac{1}{2^n n!}\left[(1+\eta)\,ln\right]^n.$$

35. Les formules précédentes font connaître la loi de décroissance des coefficients a_n et b_n. On peut, comme au n° 16, en déduire le genre de la fonction par la méthode de M. Hadamard. On conclut immédiatement de la comparaison des formules que *les fonctions* $\xi_1(s, \chi)$ *et* $\xi_2(s, \chi)$ *sont du genre zéro ou du genre un.*

Il est également très important de connaître la loi de croissance des modules des racines successives

$$\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_m, \ldots$$

de l'une ou de l'autre de ces fonctions supposées rangées par ordre de modules croissants. La démonstration du n° 17 s'applique encore et nous permet d'énoncer d'abord le théorème suivant :

La série

$$\sum_m \frac{1}{(\text{mod}\, \rho_m)^k},$$

étendue à toutes les racines de la fonction $\xi_1(s, \chi)$, *si* $\chi(-1) = 1$, *ou* $\xi_2(s, \chi)$, *si* $\chi(-1) = -1$, *à supposer que ces racines soient en nombre illimité, sera convergente, pourvu que* k *soit supérieur à l'unité.*

Le théorème précédent ne suffit pas pour établir l'existence des racines ρ. Il faudrait en outre trouver une limite inférieure du module de ρ_m. On pourrait obtenir ce résultat comme il suit :

Supposons $\chi(-1) = 1$. Posons alors

$$s = \frac{1}{2} + ti,$$

et considérons la fonction

$$\xi_1\left(\frac{1}{2} + ti, \chi\right) \xi_1\left(\frac{1}{2} + ti, \frac{1}{\chi}\right),$$

qui, en vertu de la remarque du n° 32, sera une fonction paire de t. On peut, avec un peu d'attention, raisonner sur cette fonction comme M. Hadamard raisonne sur la fonction $\xi(t)$ dans son

Mémoire, et montrer que cette fonction est du genre zéro en t^2. On déterminera ensuite avec exactitude la loi de croissance des modules de ses racines, qui est analogue à celle des racines de $\xi(t)$. Cette loi étant connue pour le produit

$$\xi_1(1 + ti, \chi)\, \xi_1\left(1 + ti, \frac{1}{\chi}\right),$$

l'est, par le fait même, pour chacun des facteurs séparément, parce que les racines de $\xi_1(s, \chi)$ sont les conjuguées de celles de $\xi_1\left(s, \frac{1}{\chi}\right)$.

36. Nous ne nous arrêterons pas cependant à faire cette démonstration, qui est assez longue, et nous nous contenterons d'établir, par la méthode la plus simple possible, le résultat suivant :

Les fonctions $\xi_1(s, \chi)$ et $\xi_2(s, \chi)$ sont du genre un et non du genre zéro, et elles admettent une infinité de racines ρ. La loi de croissance des modules de ces racines est telle que la série

$$\sum \frac{1}{\operatorname{mod} \rho}$$

ne peut pas être convergente.

Pour fixer les idées, supposons $\chi(-1) = 1$ et raisonnons sur la fonction $\xi_1(s, \chi)$. Le développement de $\xi_1(s, \chi)$ en facteurs primaires ne peut renfermer que des facteurs exponentiels de la forme $e^{\alpha s}$ et des facteurs de la forme $\left(1 - \frac{s}{\rho}\right)$, puisque la fonction n'est pas d'un genre supérieur au premier (35). Les facteurs exponentiels doivent même disparaître si la fonction est du genre zéro; mais on peut comprendre ce cas dans le précédent, en admettant que les coefficients α peuvent être nuls.

Si, par impossible, la série $\Sigma \frac{1}{\rho_m}$ était absolument convergente, on pourrait, dans le développement en facteurs primaires, grouper séparément les facteurs de la forme $\left(1 - \frac{s}{\rho}\right)$ en produit absolument convergent, et par suite grouper aussi séparément les expo-

nentielles. On obtiendrait ainsi un résultat de la forme

$$\xi_1(s, \chi) = \xi_1(0, \chi)\, e^{\alpha s}\Pi\left(1 - \frac{s}{\rho}\right),$$

d'où

$$D \log \xi_1(s, \chi) = \alpha + \sum \frac{1}{s - \rho},$$

et le second membre conserverait une valeur finie quand s tend vers l'infini positif, toutes les racines ρ ayant leur partie réelle inférieure à l'unité (33).

Mais, d'autre part, je vais montrer que le premier membre augmente indéfiniment quand s tend vers l'infini positif. On a, en effet (30),

$$\xi_1(s, \chi) = \left(\frac{\pi}{p}\right)^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) Z(s, \chi),$$

d'où

$$D \log \xi_1(s, \chi) = -\frac{1}{2} \log\left(\frac{\pi}{p}\right) + D \log \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) + \log Z(s, \chi).$$

L'expression de Z en produit infini (28) donne

$$D \log Z(s, \chi) = \sum_q \frac{\chi(q) lq}{q^s - \chi(q)}.$$

Ce terme tend donc vers zéro, quand s tend vers l'infini positif, tandis que $D \log \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ augmente indéfiniment avec s. Donc $D \log \xi_1(s, \chi)$ augmente aussi indéfiniment. La série $\Sigma \frac{1}{s-\rho}$ ne peut pas être convergente et le théorème est établi.

Le même raisonnement s'applique à $\xi_2(s, \chi)$ si $\chi(-1) = -1$. En résumant donc les résultats énoncés aux n°s 33 et 36, on a le théorème suivant :

37. *La fonction $\xi_1(s, \chi)$ si $\chi(-1) = 1$ et la fonction $\xi_2(s, \chi)$ si $\chi(-1) = -1$, sont des fonctions du premier genre ayant une infinité de racines dont la partie réelle est comprise entre zéro et un.*

La fonction $Z(s,\chi)$, qui s'exprime par un produit de trois fonctions du premier genre

$$\left(\frac{\pi}{p}\right)^{\frac{s}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \xi_1(s,\chi), \quad \text{si} \quad \chi(-1)=1,$$

$$\left(\frac{\pi}{p}\right)^{\frac{s+1}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} \xi_2(s,\chi), \quad \text{si} \quad \chi(-1)=-1,$$

est donc aussi une fonction entière du premier genre.

CHAPITRE III.

ÉTUDE ANALYTIQUE DES FONCTIONS DE DIRICHLET DANS LE CAS D'UN MODULE COMPOSÉ.

---

§ 1. — *Définition et propriétés des caractères* (mod. p^α) *dans le cas d'un nombre premier* p *impair.*

38. *Définition des caractères* (mod p^α). — Désignons par n un nombre quelconque premier à p et par g une racine primitive de la congruence

$$g^{p^{\alpha-1}(p-1)} \equiv 1 \pmod{p^\alpha}.$$

Soit ν l'indice du nombre n, c'est-à-dire un nombre vérifiant la congruence

(1) . . . . $g^\nu \equiv n \pmod{p^\alpha}.$

Représentons par ω une racine quelconque de l'équation

(2) . . . . $\omega^{p^{\alpha-1}(p-1)} = 1.$

La quantité

$$\chi(n, \bmod p^\alpha) = \omega^\nu$$

est ce que nous appellerons un caractère du nombre n (mod p^α). Nous représenterons d'ailleurs ce caractère par $\chi(n)$ quand aucune confusion ne sera possible.

On forme des caractères différents en remplaçant les unes par les autres les différentes racines des équations (2). Ces racines peuvent s'exprimer comme puissances successives d'une racine primitive ω_1 :

$$1, \omega_1, \omega_1^2, \ldots \omega_1^{p^{\alpha-1}(p-1)-1},$$

et leur nombre, qui est celui des caractères différents, est égal à $p^{\alpha-1}(p-1)$. Nous représenterons ce nombre, suivant l'usage, par $\varphi(p^\alpha)$.

L'équation (2) n'a que deux racines réelles $+1$ et -1 ; toutes les autres sont imaginaires, mais leur module est égal à l'unité.

On donne le nom de *caractère principal* à celui qui est formé avec la racine $\omega = 1$; il est égal à l'unité pour tous les nombres. En dehors du précédent, il n'y en a qu'un seul qui soit réel pour tous les nombres n : c'est celui qui correspond à la racine $\omega = -1$. Il est égal à $\left(\frac{n}{p}\right)$, ce symbole représentant, d'après Legendre, le caractère quadratique de n (mod p).

Nous donnerons à tous les autres caractères le nom de *caractères imaginaires*. Ceux-ci sont conjugués deux à deux, comme les racines qui servent à les former, de sorte qu'à tout caractère $\chi(n)$ formé avec la racine ω correspond un caractère conjugué ou opposé, que nous représenterons par les notations

$$\frac{1}{\chi(n)} = \frac{1}{\chi}(n),$$

et qui est formé avec la racine $\frac{1}{\omega}$ conjuguée de la première. S'il y a lieu de les distinguer entre eux, nous représenterons encore les différents caractères par

$$\chi_0, \chi_1, \chi_2, \ldots$$

et nous conviendrons que χ_0 représente le caractère principal.

Enfin, pour un caractère χ_h quelconque, formé avec la racine $\omega_1{}^h$, on a

$$\chi_h(-1) = \omega_1^{h\frac{p-1}{2}} = (-1)^h.$$

Le caractère $\chi(-1)$ est donc égal à $+1$ ou -1 suivant que la racine ω qui sert à le former est une puissance paire ou impaire de la racine primitive ω_1.

39. Les caractères ainsi définis jouissent encore des quatre propriétés fondamentales correspondant à celles du n° **21**, savoir :

1° Pour deux nombres quelconques n et n' premiers avec p, on a

$$\chi(n)\chi(n') = \chi(nn');$$

2° Si $n \equiv n' \pmod{p^\alpha}$, on a

$$\chi(n) = \chi(n');$$

3° La somme Σ s'étendant à tous les nombres inférieurs à p^α et premiers à p, on a, dans le cas du caractère principal,

$$\sum_n \chi_0(n) = \varphi(p^\alpha),$$

et pour tout autre caractère,

$$\sum_n \chi(n) = 0;$$

4° La somme S s'étendant à la totalité des caractères, on a, pour un nombre n quelconque,

$$\underset{\chi}{S}\chi(n) = 0,$$

sauf cependant si

$$n \equiv 1 \pmod{p^\alpha},$$

et, dans ce cas,

$$\underset{\chi}{S}\chi(n) = \varphi(p^\alpha).$$

40. *Subdivision des caractères en trois classes.* — Dans le cas d'un nombre premier, nous n'avions subdivisé les caractères qu'en deux classes. Ici nous rencontrons une classe de plus :

La *première classe* renfermera le caractère principal seulement, comme dans le cas d'un module premier.

La *deuxième classe* renfermera les *caractères impropres* (mod p^α). Nous appellerons ainsi ceux qui sont en même temps des caractères (mod $p^{\alpha-\lambda}$), en désignant par $p^{\alpha-\lambda}$ une puissance de p inférieure à p^α.

Pour que cette circonstance se présente, il faudra que le caractère χ soit formé avec une racine ω de l'équation

$$\omega^{p^{(\alpha-1)}(p-1)} = 1$$

qui soit en même temps racine de

$$\omega^{p^{\alpha-\lambda-1}(p-1)} = 1.$$

Si l'on désigne donc par ω_1 une racine primitive de la première équation, il faudra qu'on ait

$$\omega = \omega_1^{\mu p^\lambda}.$$

Le nombre des valeurs distinctes de ω fournies par cette équation est $(\alpha - 1)(p - 1)$. Mais, comme nous excluons de la classe actuelle le caractère principal, on voit que le nombre des caractères impropres (mod p^α) se réduit à $(\alpha - 1)(p - 1) - 1$.

On remarquera encore que la classe qui nous occupe renfermera toujours le caractère réel formé avec la racine $\omega = -1$, car celui-ci étant égal à $\left(\frac{n}{p}\right)$ est aussi un caractère (mod p).

Enfin, la *troisième classe* renfermera tous les autres caractères, que nous appellerons les *caractères propres* (mod p^α).

D'après les définitions précédentes, un caractère impropre (mod p^α) sera un caractère propre pour un module convenable $p^{\alpha-\lambda}$. D'ailleurs, les nombres n premiers à $p^{\alpha-\lambda}$ et à p^α sont les mêmes, sauf pour $\alpha - \lambda = 0$. Si donc nous laissons de côté le caractère principal, sur lequel nous reviendrons plus tard, on

voit que nous pouvons nous borner à étudier le cas d'un caractère propre (mod p^α).

On a le théorème général suivant :

41. Théorème. — *Soient, d'une part,* $\delta = p^{\alpha-\lambda}$ *et* $\Delta = p^\lambda$ *deux puissances de* p; *d'autre part,* a *et* A *deux nombres premiers à* p. *Soit ensuite* l *un nombre qui passe par toutes les valeurs de* 0 *à* $\delta - 1$. *Je dis que l'on a, dans le cas d'un caractère propre* (mod p^α = mod $\delta\Delta$),

$$\sum_{l=0}^{\delta-1} \chi(a + lA\Delta, \bmod \delta\Delta) = 0.$$

En effet, les δ nombres premiers à p :

$$a, \quad a + A\Delta, \quad a + 2A\Delta, \ldots a + (\delta - 1)A\Delta,$$

sont congrus entre eux (mod Δ = mod p^λ); d'autre part, ils sont incongrus entre eux (mod $\delta\Delta$ = mod p^α), car si l'on avait

$$lA\Delta \equiv l'A\Delta \pmod{\Delta\delta},$$

on en tirerait (A étant premier à Δ)

$$l \equiv l' \pmod{\delta},$$

ce qui est impossible pour l et $l' < \delta$.

Désignons donc les δ indices de ces nombres par

$$\nu_0, \nu_1, \nu_2, \ldots \nu_{\delta-1};$$

ces indices seront congrus entre eux [mod $p^{\lambda-1}(p-1)$] et incongrus [mod $p^{\alpha-1}(p-1)$]. La suite précédente doit donc être, à l'ordre près, équivalente [mod $p^{\alpha-1}(p-1)$] à la suivante :

$$\nu_0, \quad \nu_0 + p^{\lambda-1}(p-1), \quad \nu_0 + 2p^{\lambda-1}(p-1), \ldots \nu_0 + (\delta-1)p^{\lambda-1}(p-1),$$

qui est la seule distincte possédant les deux propriétés indiquées.

Posons donc, en abrégé,

$$\omega^{p^{\lambda-1}(p-1)} = \omega_1;$$

il viendra

$$\sum_{l=0}^{\delta-1} \chi(a + l\mathrm{A}\Delta, \bmod \delta\Delta) = \omega_1^{\gamma_0}\left[1 + \omega_1 + \omega_1^2 + \cdots + \omega_1^{\delta-1}\right],$$

et le second membre se met sous la forme

$$\omega_1^{\gamma_0}\frac{\omega_1^{\delta} - 1}{\omega_1 - 1}.$$

Le dénominateur $(\omega_1 - 1)$ ne peut s'annuler pour un caractère propre, par définition; d'autre part, le numérateur est nul, car

$$\omega_1^{\delta} - 1 = \omega^{p^{\alpha-1}(p-1)} - 1 = 0;$$

donc le théorème est établi.

§ 2. — *Définition et propriétés des caractères* (mod 2^c).

42. *Définition des caractères* (mod 2^c). — Il n'y a pas de caractères (mod 2); nous supposerons donc, dans ce qui suit, $c > 1$.

Pour tout nombre impair n, on peut poser

$$n \equiv (-1)^{\alpha} 5^{\lambda} (\bmod 2^c),$$

où α est un des nombres $(0, 1)$ et λ un des nombres $(0, 1, 2, \ldots 2^{c-2} - 1)$. A tout nombre n correspondent deux nombres α et λ, déterminés d'une manière unique et qu'on appelle les indices de n (mod 2^c).

Dans le cas particulier où c est égal à 2 et le module à 4, on pose simplement

$$n \equiv (-1)^{\alpha} (\bmod 4),$$

et les considérations relatives au nombre 5 peuvent être supprimées. Mais ce cas peut être considéré comme rentrant dans le cas général, car $(c - 2)$ étant nul, λ est nécessairement nul, et le nombre 5 ne joue aucun rôle dans le caractère défini précé-

demment. Les considérations que nous allons développer pour le cas général s'appliqueront donc encore pour $c = 2$.

Désignons par θ et η des racines respectivement des deux équations

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad \theta^2 = 1, \quad \eta^{2^{c-2}} = 1\,;$$

on dit que la quantité

$$\chi(n, \bmod 2^c) = \theta^\alpha \eta^\lambda$$

est un caractère du nombre n (mod 2^c). Nous le désignerons encore simplement par $\chi(n)$ si aucune confusion n'est possible.

On forme encore des caractères différents en substituant les unes aux autres les différentes racines des équations (2). Le nombre de ces caractères différents est donc encore égal à $\varphi(2^c) = 2^{c-1}$.

On appelle *caractère principal* celui qui est formé avec les racines $\theta = 1, \eta = 1$. Tous les autres caractères ont encore leur module égal à l'unité. Parmi ceux-ci, il y en a encore trois qui sont réels pour tous les nombres n; ce sont ceux qui sont formés avec les racines

$$(\theta = 1,\ \eta = -1), \quad (\theta = -1,\ \eta = 1), \quad (\theta = -1,\ \eta = -1).$$

Comme antérieurement, nous donnerons aux autres caractères le nom de *caractères imaginaires* et à ceux-ci le nom de *caractères réels*.

On reconnaît sans peine que les caractères (mod 2^c) jouissent des quatre propriétés fondamentales analogues à celles des nos 21 et 39. Il est inutile de les transcrire encore une fois.

Enfin, le nombre (-1) ayant pour indices $(\alpha = 1, \lambda = 0)$, le caractère $\chi(-1, \bmod 2^c)$ sera égal à $(+1)$ ou à (-1) suivant qu'il sera formé avec la racine $\theta = +1$ ou $\theta = -1$ de l'équation $\theta^2 = 1$.

43. ***Subdivision des caractères en trois classes.*** — Nous avons à reproduire ici les mêmes distinctions qu'au paragraphe précé-

dent. Nous partageons les caractères (mod 2^c) en trois classes :

La *première classe* renferme le caractère principal seulement.

La *deuxième classe* renferme les *caractères impropres* (mod 2^c). Ce sont ceux qui sont formés avec une racine η de l'équation

$$\eta^{2^{c-2}} = 1,$$

qui est en même temps racine de l'équation

$$\eta^{2^{c-j-2}} = 1,$$

de degré moindre. Ces caractères-là sont aussi des caractères (mod 2^{c-j}) et j est compris entre 0 et c (limites exclues).

La *troisième classe* renferme les caractères propres (mod 2^c). Ce sont tous les autres.

Remarques. — Si $c = 2$, les caractères (mod 4) sont formés avec les seules racines de $\theta^2 = 1$. Il n'y a que deux caractères. L'un est le caractère principal ; l'autre est un caractère propre, qui est réel.

Si $c = 3$, la seconde des équations (2) devient

$$\eta^2 = 1,$$

de sorte que les caractères (mod 8) sont encore tous réels.

Ils correspondent aux combinaisons de racines

$$(\eta = 1, \theta = 1), \ (\eta = 1, \theta = -1), \ (\eta = -1, \theta = 1), \ (\eta = -1, \theta = -1)$$

La première combinaison donne le caractère principal ; la seconde, un caractère impropre (mod 8), car c'est un caractère (mod 4) ; les deux dernières donnent des caractères propres (mod 8).

Enfin, pour une puissance de 2 supérieure à 8, tous les caractères propres sont imaginaires.

44. On peut étendre au cas actuel le théorème du n° 41.

THÉORÈME. — *Soient, d'une part,* $\delta = 2^{c-j}$ *et* $\Delta = 2^j$ *deux puis-*

sances de 2; *d'autre part,* a *et* A *deux nombres impairs. Soit ensuite* l *un nombre qui passe par toutes les valeurs entières de* 0 *à* $\delta - 1$; *je dis que l'on a, dans le cas d'un caractère propre* (mod $\Delta\delta$ = mod 2e),

$$\sum_{l=0}^{\delta-1} \chi(a + lA\Delta, \text{mod } \delta\Delta) = 0.$$

La conclusion est immédiate si $\Delta = 2$, car, dans ce cas, $(a + l\,A\Delta)$ représente successivement tous les résidus impairs (mod 2e), et la somme précédente s'annule en vertu d'une des quatre propriétés générales des caractères.

Supposons donc $j > 1$. Les nombres

$$a, \quad a + A\Delta, \quad a + 2A\Delta, \ldots a + (\delta - 1)A\Delta$$

sont congrus entre eux (mod Δ = mod 2^j) et incongrus (mod $\delta\Delta$ = mod 2e). Si l'on désigne donc leurs indices (mod 2e) par les suites

$$\alpha_0, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \ldots \alpha_{\delta-1};$$
$$\lambda_0, \quad \lambda_1, \quad \lambda_2, \ldots \lambda_{\delta-1},$$

les indices α seront congrus entre eux (mod 2); en outre, les indices λ seront congrus entre eux (mod 2^{j-2}) et incongrus (mod 2^{e-2}). La suite des indices λ est donc équivalente (mod 2^{e-2}) à la suite

$$\lambda_0, \quad \lambda_0 + 2^{j-2}, \quad \lambda_0 + 2.2^{j-2} \ldots \lambda_0 + (\delta - 1)2^{j-2},$$

en ne tenant pas compte de l'ordre des termes. Par conséquent, si l'on pose en abrégé

$$\eta_1 = \eta^{2^{j-2}},$$

il viendra

$$\sum_{l=0}^{\delta-1} \chi(a + lA\Delta, \text{mod } \delta\Delta) = \theta^{\alpha_0}\eta^{\lambda_0}\left[1 + \eta_1 + \eta_1^2 + \cdots \eta^{\delta-1}\right]$$
$$= \theta^{\alpha_0}\eta^{\lambda_0}\frac{\eta_1^\delta - 1}{\eta_1 - 1} = 0,$$

parce que $(\eta_1 - 1)$ est, par définition, différent de zéro pour un caractère propre, tandis que le numérateur

$$\eta_1^{\delta} - 1 = \eta^{c-2} - 1 = 0.$$

Le théorème est donc établi.

§ 3. — *Définition et propriétés des caractères* (mod M), *pour un module* M *quelconque.*

45. *Définition des caractères* (mod M). — Décomposons M en ses facteurs premiers

$$M = 2^c p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots.$$

Soit ensuite n un nombre premier à M. On appelle caractère de n (mod M) le produit des caractères de n selon les modules respectifs 2^c, $p_1^{\alpha_1}$, $p_2^{\alpha_2}$, ... auxquels nous donnerons le nom de *modules composants*. On a, donc par définition,

$$\chi(n, \text{mod } M) = \chi(n, \text{mod } 2^c)\chi(n, \text{mod } p_1^{\alpha_1}) \ldots.$$

Dans le cas où $c = 1$, comme il n'y a pas de caractère (mod 2), on supprime le premier facteur au second membre, comme dans le cas où M est impair.

Le *caractère principal* est celui qui est formé du produit des caractères principaux selon tous les modules composants 2^c, $p_1^{\alpha_1}$, ... Nous le désignerons par χ_0. Tous les caractères ont leur module égal à l'unité et leur nombre est égal à $\varphi(M)$, en représentant, comme d'habitude, par φ l'indicateur de Gauss.

Pour un caractère χ quelconque, on a

$$\chi(-1, \text{mod } M) = \pm 1,$$

puisqu'il en est ainsi pour les modules composants.

46. Les caractères (mod M) jouissent des cinq propriétés suivantes :

1° Pour deux nombres n et n' premiers à M, on a

$$\chi(n)\chi(n') = \chi(nn');$$

2° Si $n \equiv n'$ (mod M), on a la relation

$$\chi(n) = \chi(n').$$

3° La somme Σ' s'étendant à tous les nombres premiers à M et inférieurs à M, on a, dans le cas du caractère principal,

$$\sum_n{}' \chi_0(n) = \varphi(\mathrm{M}),$$

et pour tout autre caractère,

$$\sum_n{}' \chi(n) = 0;$$

4° La somme S s'étendant à la totalité des caractères, on a, pour tout nombre n premier à M,

$$\underset{\chi}{\mathrm{S}}\,\chi(n) = 0,$$

sauf si $n \equiv 1$ (mod M), auquel cas

$$\underset{\chi}{\mathrm{S}}\,\chi(n) = \varphi(\mathrm{M}).$$

5° Si M et M′ sont deux nombres premiers entre eux et premiers à n, on a

$$\chi(n, \bmod \mathrm{MM'}) = \chi(n, \bmod \mathrm{M})\chi(n, \bmod \mathrm{M'}).$$

46. *Subdivision des caractères en quatre classes.* — Dans le cas où M est un nombre composé, les caractères (mod M) doivent se partager en quatre classes, comme il suit :

La *première classe* renferme le *caractère principal*.

La *deuxième classe* renferme les caractères formés avec des caractères principaux suivant une partie seulement des modules composants. Nous donnerons à ces caractères le nom de *caractères incomplets* (mod M).

Nous rangerons dans la *troisième classe* les *caractères impropres* (mod M). Ce sont ceux qui ne renferment dans leur composition aucun caractère principal par rapport aux modules composants, mais un ou plusieurs caractères impropres.

Enfin nous rangerons dans la *quatrième classe* les *caractères propres* (mod M). Ce sont ceux qui sont exclusivement formés de caractères propres suivant tous les modules composants.

Les caractères des deux premières classes doivent exiger des considérations spéciales. Mais l'étude des caractères impropres (mod M) se ramène immédiatement à celle des caractères propres. En effet, tout caractère impropre (mod M) est un caractère propre (mod M′), en désignant par M′ un diviseur de M qui contient tous les mêmes facteurs premiers et qui est, par conséquent, premier avec tous les mêmes nombres.

47. On a encore le théorème suivant, qui généralise ceux des nos 41 et 44.

Théorème. — *Soient, d'une part,* Δ *et* δ *deux nombres formés des mêmes facteurs premiers; de l'autre,* a *et* A *deux nombres premiers avec les précédents. Soit ensuite* l *un nombre qui passe par toutes les valeurs entières de* 0 *à* $\delta - 1$; *je dis que l'on a, dans le cas d'un caractère propre* (mod $\delta\Delta$),

$$\sum_{l=0}^{\delta-1} \chi(a + lA\Delta, \bmod \delta\Delta) = 0.$$

Si les nombres Δ et δ ne renferment qu'un seul facteur premier, le théorème a été démontré antérieurement [(41) et (44)]. Nous pouvons donc supposer maintenant que ces nombres renferment plusieurs facteurs premiers. Pour fixer les idées, nous supposerons qu'ils en renferment trois seulement, p_1, p_2, p_3, mais la démonstration sera générale. Posons donc (p_1 pouvant être égal à 2)

$$\Delta = p_1^{\lambda} p_2^{\mu} p_3^{\nu},$$
$$\delta = p_1^{\alpha-\lambda} p_2^{\beta-\mu} p_3^{\gamma-\nu}.$$

On attribuera à l toutes les valeurs que cette quantité doit prendre dans la somme considérée, en posant

$$l = k_1 + k_2 p_1^{\alpha-\lambda} + k_3 p_1^{\alpha-\lambda} p_2^{\beta-\mu},$$

et en donnant à k_1, k_2, k_3 tous les systèmes de valeurs compris dans le tableau

$$\begin{aligned} k_1 &= 0, 1, 2, \ldots (p_1^{\alpha-\lambda} - 1), \\ k_2 &= 0, 1, 2, \ldots (p_2^{\beta-\mu} - 1), \\ k_3 &= 0, 1, 2, \ldots (p_3^{\gamma-\nu} - 1). \end{aligned}$$

Pour établir le théorème, il suffit donc de montrer que, pour tout système particulier de valeurs de k_1 et de k_2, la somme étendue à toutes les valeurs de k_3

$$\sum \chi(a + l\text{A}\Delta, \bmod \delta\Delta) = 0.$$

Comme on a

$$\delta\Delta = p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\gamma,$$

le caractère $\chi(a + l\,\text{A}\,\Delta, \bmod \delta\Delta)$ est égal au produit de deux autres (45, 5°)

$$\chi(a + l\text{A}\Delta, \bmod p_1^\alpha p_2^\beta)\,\chi(a + l\text{A}\Delta, \bmod p_3^\gamma).$$

Le premier de ces deux caractères ne varie pas avec k_3 (45, 2°) ; nous sommes donc ramenés à montrer que la somme

$$\sum_{k_3} \chi(a + l\text{A}\Delta, \bmod p_3^\gamma)$$

est égale à zéro. Posons, pour simplifier,

$$\begin{aligned} \Delta' &= p_3^\nu, & \text{A}' &= \text{A} p_1^\alpha p_2^\beta, \\ \delta' &= p_3^{\gamma-\nu}; & a' &= a + (k_1 + k_2 p_1^\lambda)\text{A}\Delta ; \end{aligned}$$

cette dernière somme pourra s'écrire sous la forme

$$\sum_{l=0}^{\delta'-1} \chi(a' + l\text{A}'\Delta', \bmod \delta'\Delta'),$$

et elle s'annulera par le théorème du n° 41.

§ 4. — *Définition et propriétés des fonctions* $\Psi_1(x, \chi \bmod M)$ *et* $\Psi_2(x, \chi \bmod M)$ *dans le cas d'un caractère propre* (mod M).

48. Les fonctions qui vont nous occuper renferment, comme cas particulier, celles qui ont été définies au n° 23. Les développements que nous avons donnés alors nous permettront d'abréger un peu les démonstrations du paragraphe actuel.

Nous poserons comme première définition

$$(1) \quad \ldots \quad \begin{cases} \Psi_1(x, \chi \bmod M) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}{}' \chi(n) e^{-\frac{n^2 \pi x}{M}}, \\ \Psi_2(x, \chi \bmod M) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}{}' \chi(n) e^{-\frac{n^2 \pi x}{M}}. \end{cases}$$

Dans ces sommes, on doit donner successivement à n toutes les valeurs entières positives et négatives premières avec M. Les sommes sont alors absolument convergentes, pourvu que x soit positif.

On reconnaît, comme au n° 22, qu'il y a deux cas à distinguer :

1° Si $\chi(-1, \bmod M) = 1$, on a

$$(2) \quad \ldots \quad \begin{cases} \Psi_1(x, \chi) = 2 \sum\limits_{n=1}^{\infty}{}' \chi(n) e^{-\frac{n^2 \pi x}{M}}, \\ \Psi_2(x, \chi) = 0; \end{cases}$$

2° Si $\chi(-1, \bmod M) = -1$, on a

$$(3) \quad \ldots \quad \begin{cases} \Psi_1(x, \chi) = 0, \\ \Psi_2(x, \chi) = 2 \sum\limits_{n=1}^{\infty}{}' \chi(n) n e^{-\frac{n^2 \pi x}{M}}. \end{cases}$$

On n'a donc à étudier la fonction Ψ_1 que si $\chi(-1) = 1$ et la fonction Ψ_2 que si $\chi(-1) = -1$.

49. *Étude de* $\Psi_1(x, \chi)$ *quand* $\chi(-1) = 1$. On trouve, comme au n° 23, la relation

$$(4) \quad \ldots \quad \Psi_1(x, \chi \bmod M) = \sum_{k=1}^{M}{}' \chi(k) \psi_1\left(\frac{k}{M}, Mx\right).$$

Dans la somme Σ', il faut donner à k toutes les valeurs premières à M et inférieures à M. C'est pour cela que nous avons accentué cette somme.

Enfin, en transformant, comme au n° 23, le second membre de l'équation (4), il vient

$$(5) \qquad \psi_1(x, \chi \bmod M) = \frac{2}{\sqrt{Mx}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{-\frac{n^2\pi}{Mx}} \sum_{k=1}^{M}{}' \chi(k) \cos \frac{2kn\pi}{M} \right].$$

Mais la somme

$$\sum_{k=1}^{M}{}' \chi(k) \cos \frac{2kn\pi}{M}$$

s'évalue encore aisément.

1° Si n et M ne sont pas premiers entre eux, je vais montrer que cette somme est nulle, dans l'hypothèse d'un caractère propre (mod M) dans laquelle nous nous sommes placés.

Si n est un multiple de M, la somme se réduit à

$$\sum_{k=1}^{M}{}' \chi(k),$$

et la conclusion est immédiate (45, 3°)

Occupons-nous donc du cas plus difficile où n et M ont un plus grand facteur commun d différent de M.

Posons, n' et M' étant premiers entre eux,

$$M = dM', \quad n = dn'.$$

Il viendra, en groupant les termes dont les cosinus ont la même valeur,

$$\sum_{k=1}^{M}{}' \chi(k) \cos \frac{2kn\pi}{M} = \sum_{k=1}^{M'}{}' \left[\cos \frac{2kn'\pi}{M'} \sum_{m=0}^{d}{}' \chi(k + mM') \right].$$

Dans la somme intérieure

$$\sum_{m=0}^{d}{}' \chi(k + mM'),$$

m prend toutes les valeurs inférieures à d, pour lesquelles $(k + m\text{M}')$ est premier avec M. Pour établir le théorème, il suffit évidemment de démontrer que cette dernière somme est nulle pour toutes les valeurs de k.

A cet effet, posons

$$\left.\begin{array}{r} d = \delta d_1 \\ \text{M}' = \Delta \text{M}_1 \end{array}\right\} \quad \text{d'où} \quad \text{M} = \delta\Delta d_1 \text{M}_1,$$

Δ et δ étant formés de la réunion des facteurs premiers qui sont communs à d et M'; d_1 de la réunion de ceux de d qui ne divisent pas M', et M_1 de la réunion de ceux de M qui ne divisent pas d. De la sorte, δ et Δ renferment les mêmes facteurs premiers, et les trois nombres $(\delta\Delta)$, d_1 et M_1 sont premiers entre eux deux à deux.

Comme les nombres qui sont premiers à M sont les mêmes que ceux qui le sont à $\text{M}'d_1$, on attribuera à m toutes les valeurs que cette quantité prend dans la somme qui nous occupe, en posant

$$m = n + l d_1,$$

puis, en donnant dans le second membre à n toutes les valeurs inférieures à d_1 pour lesquelles $(k + n\text{M}')$ est premier à M, ensuite à l toutes les valeurs de 0 à $(\delta - 1)$.

On a ainsi

$$\sum_m \chi(k + m\text{M}') = \sum_n \sum_{l=0}^{\delta-1} \chi(k + m\text{M}').$$

Il suffit maintenant de montrer qu'on a, pour toute valeur particulière de n,

$$\sum_{l=0}^{\delta-1} \chi(k + m\text{M}', \bmod \text{M}) = 0.$$

C'est bien ce qui a lieu, car, comme $\text{M} = (\delta\Delta)\, d_1\, \text{M}_1$, le caractère (mod M) est un produit de trois autres, qui correspondent aux trois facteurs premiers entre eux de M.

Deux de ces caractères, savoir

$$\chi(k + m\text{M}', \text{mod } d_1),$$
$$\chi(k + m\text{M}', \text{mod M}_1),$$

sont invariables dans la somme par rapport à l, écrite en dernier lieu. Quant à la somme des troisièmes :

$$\sum_{l=0}^{\delta-1} \chi(k + (n + ld_1)\text{M}', \text{mod } \delta\Delta),$$

où l'on posera, en abrégé,

$$k + n\text{M}' = a,$$
$$ld_1\text{M}' = ld_1\text{M}_1\Delta = l\text{A}\Delta,$$

elle se mettra sous la forme :

$$\sum_{l=0}^{\delta-1} \chi(a + l\text{A}\Delta, \text{mod } \delta\Delta),$$

et elle s'annule par le théorème du n° 47. Notre conclusion (1°) est donc établie;

2° Si n et M sont premiers entre eux, on a

$$\sum_{k=1}^{\text{M}}{}' \chi(k) \cos \frac{2kn\pi}{\text{M}} = \frac{1}{\chi(n)} \sum_{k=1}^{\text{M}}{}' \chi(kn) \cos \frac{2kn\pi}{\text{M}}.$$

Mais quand k varie, le produit kn représente, en même temps que k, le système complet des résidus (mod M) qui sont premiers à M. Posons donc

$$(6) \quad \ldots\ldots \quad \tau_1(\chi) = \sum_{k=1}^{\text{M}}{}' \chi(k) \cos \frac{2k\pi}{\text{M}};$$

on aura, quel que soit n premier avec M,

$$\sum_{k=1}^{\text{M}}{}' \chi(k) \cos \frac{2kn\pi}{\text{M}} = \frac{1}{\chi(n)} \tau_1(\chi).$$

En substituant ces valeurs dans la formule (5), il vient

$$(7) \quad \ldots \quad \Psi_1(x, \chi \bmod M) = \frac{\tau_1(\chi)}{\sqrt{Mx}} \Psi_1\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{\chi}\right).$$

En posant, pour simplifier,

$$(8) \quad \ldots \quad \tau_1(\chi) = \varepsilon_1(\chi)\sqrt{M},$$

on trouve la relation fonctionnelle

$$(9) \quad \ldots \quad \Psi_1(x, \chi \bmod M) = \varepsilon_1(\chi)\frac{1}{\sqrt{x}} \Psi_1\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{\chi}\right).$$

On montre ensuite, comme au n° 23, que le module de $\varepsilon_1(\chi)$ est égal à l'unité. Cette quantité elle-même serait égale à *un* si le caractère était réel.

50. *Étude de* $\Psi_2(x, \chi \bmod M)$ *quand* $\chi(-1) = -1$. On trouve d'abord, comme au n° 25,

$$(10) \quad \ldots \quad \Psi_2(x, \chi \bmod M) = M \sum_{k=1}^{M}{}' \chi(k) \psi_2\left(\frac{k}{M}, Mx\right),$$

puis, par la relation fonctionnelle que vérifie la fonction Ψ_2,

$$(11) \quad \Psi_2(x, \chi \bmod M) = \frac{2}{x\sqrt{Mx}} \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\frac{n^2\pi}{Mx}} \sum_{k=1}^{M}{}' \chi(k) \sin\frac{2kn\pi}{M}.$$

Cette relation se simplifie comme dans le cas précédent.

1° Si n et M ne sont pas premiers entre eux,

$$\sum_{k=1}^{M}{}' \chi(k) \sin\frac{2kn\pi}{M} = 0;$$

2° Si n est premier à M, on pose

$$(12) \quad \ldots \quad \tau_2(\chi) = \sum_{k=1}^{M}{}' \chi(k) \sin\frac{2k\pi}{M};$$

on a alors

$$\sum_{k=1}^{M} \chi(k) \sin \frac{2kn\pi}{M} = \tau_2(\chi) \frac{1}{\chi(n)}.$$

En substituant ces valeurs dans la formule (11), on trouve

$$(13) \quad . \; . \; . \quad \Psi_2(x, \chi \bmod M) = \frac{\tau_2(\chi)}{x\sqrt{Mx}} \Psi_2\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{\chi}\right).$$

On pose encore

$$(14) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \tau_2(\chi) = \varepsilon_2(\chi)\sqrt{M},$$

et on en déduit la relation fonctionnelle à laquelle satisfait la fonction Ψ_2 sous la forme définitive

$$(15) \quad . \; . \; . \quad \Psi_2(x, \chi \bmod M) = \varepsilon_2(\chi) \frac{1}{x\sqrt{x}} \Psi_2\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{\chi}\right).$$

On montre enfin, comme au n° 25, que le module de $\varepsilon_2(\chi)$ est égal à l'unité. Ce facteur lui-même serait égal à un si le caractère était réel.

§ 5. — *Définition et propriétés des fonctions* $Z(s, \chi)$, $\xi_1(s, \chi)$ *et* $\xi_2(s, \chi)$ *dans le cas d'un caractère propre* (mod M).

51. Nous définirons la fonction $Z(s, \chi \bmod M)$, pour $\mathfrak{R}(s) > 1$, par les expressions absolument convergentes

$$(1) \quad . \; . \; . \quad Z(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{\chi(n)}{n^s} = \Pi\left(1 - \frac{\chi(q)}{q^s}\right)^{-1},$$

où n désigne successivement tous les nombres entiers premiers à M et q tous les nombres premiers qui ne divisent pas M.

L'expression de $Z(s, \chi)$ en produit infini montre que cette fonction ne peut s'annuler pour $\mathfrak{R}(s) > 1$. Pour $\mathfrak{R}(s) = 1$, le

produit cesse de converger : on ne peut donc pas affirmer, sans plus ample examen, que la fonction $Z(s, \chi)$ ne peut pas s'annuler pour des valeurs de s dont la partie réelle est égale à un. Nous ferons cette démonstration dans un chapitre ultérieur.

La série (1), au contraire, converge (mais non absolument) pour $\mathfrak{R}(s) > 0$. Nous n'insisterons pas sur cette circonstance qui ne nous servira pas, et nous allons, dans le paragraphe actuel, établir la relation fonctionnelle à laquelle satisfait la fonction $Z(s, \chi \bmod M)$ dans le cas d'un caractère propre (mod M). Cette relation a été trouvée par M. Lipschitz, qui l'a obtenue directement (*). Il nous paraît plus simple de la rattacher aux propriétés des fonctions Ψ_1 et Ψ_2 du paragraphe précédent.

52. La fonction $Z(s, \chi)$, comme nous l'avons déjà vu au n° 29, jouit de propriétés très distinctes, suivant que $\chi(-1) = +1$ ou -1. Suivant l'un ou l'autre de ces deux cas, la fonction se ramène à la fonction Ψ_1 ou Ψ_2.

1° Si $\chi(-1) = 1$, on définit, comme au n° 30, une nouvelle fonction $\xi_1(s, \chi)$ par l'équation

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad \xi_1(s, \chi \bmod M) = \left(\frac{\pi}{M}\right)^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) Z(s, \chi),$$

qui ramène Z à ξ_1. Puis au moyen de la relation

$$\left(\frac{\pi}{M}\right)^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \frac{1}{n^s} = \int_0^{\infty} e^{-n^2 \frac{\pi x}{M}} x^{\frac{s}{2}-1} dx,$$

on trouve, pour $\mathfrak{R}(s) > 1$, par la formule (2) du paragraphe précédent (48),

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \xi_1(s, \chi) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \Psi_1(x, \chi) x^{\frac{s}{2}-1} dx;$$

(*) *Untersuchungen der Eigenschaften einer Gattung von unendlichen Reihen.* JOURNAL DE CRELLE, t. CV, 1889.

2° Si $\chi(-1) = -1$, on ramène la fonction Z à une nouvelle fonction $\xi_2(s,\chi)$ par la formule

$$(4) \quad . \quad . \quad \xi_2(s, \chi \bmod M) = \left(\frac{\pi}{M}\right)^{-\frac{s+1}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) Z(s, \chi).$$

Puis, au moyen de la relation

$$\left(\frac{\pi}{M}\right)^{-\frac{s+1}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \frac{1}{n^s} = \int_0^\infty n e^{-n^2 \frac{\pi x}{M}} x^{\frac{s-1}{2}} dx,$$

on trouve, pour $\Re(s) > 1$, par la formule (3) du paragraphe précédent (n° 48),

$$(5) \quad . \quad . \quad . \quad \xi_2(s, \chi \bmod M) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \psi_2(x, \chi) x^{\frac{s-1}{2}} dx.$$

53. Les formules (3) et (5) du numéro précédent, comme les formules correspondantes du n° 30, sont valables pour toute valeur de s et prouvent que ξ_1 et ξ_2 sont synectiques dans tout le plan. Mais pour mettre cette circonstance en évidence, il faut reproduire la transformation du n° 31. On trouve ainsi, eu égard aux formules (9) et (15) du paragraphe précédent :

1° Si $\chi(-1) = 1$,

$$(6) \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{aligned} \xi_1(s, \chi) = & \frac{1}{2}\int_1^\infty \psi_1(x, \chi) x^{\frac{s}{2}-1} dx \\ & + \frac{1}{2}\epsilon_1(\chi)\int_1^\infty \psi_1\left(x, \frac{1}{\chi}\right) x^{-\frac{s+1}{2}} dx; \end{aligned} \right.$$

2° Si $\chi(-1) = -1$,

$$(7) \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{aligned} \xi_2(s, \chi) = & \frac{1}{2}\int_1^\infty \psi_2(x, \chi) x^{\frac{s-1}{2}} dx \\ & + \frac{1}{2}\epsilon_2(\chi)\int_1^\infty \psi_2\left(x, \frac{1}{\chi}\right) x^{-\frac{s}{2}} dx. \end{aligned} \right.$$

54. Les deux formules précédentes mettent en évidence la propriété fonctionnelle des fonctions ξ_1 et ξ_2, comme on l'a vu encore au n° 31. On a

1° Si $\chi(-1)=1$,

$$(8) \quad \ldots\ldots \quad \xi_1(s,\chi)=\varepsilon_1(\chi)\,\xi_1\left(1-s,\frac{1}{\chi}\right);$$

2° Si $\chi(-1)=-1$,

$$(9) \quad \ldots\ldots \quad \xi_2(s,\chi)=\varepsilon_2(\chi)\,\xi_2\left(1-s,\frac{1}{\chi}\right),$$

d'où le théorème suivant :

Les fonctions $\xi_1(s,\chi)$ *si* $\chi(-1)=1$, *ou* $\xi_2(s,\chi)$ *si* $\chi(-1)=-1$, *se reproduisent respectivement, multipliées par un facteur indépendant de* s *et de module égal à un, par le changement simultané de* s *en* $(1-s)$ *et de* χ *en* $\frac{1}{\chi}$. *Dans le cas particulier d'un caractère* χ *réel, ces fonctions se reproduisent simplement par le changement de* s *en* $(1-s)$.

55. *Remarque.* — Ce résultat peut encore s'énoncer comme il suit : Si $\chi(-1)=1$, le produit

$$\xi_1(s,\chi)\,\xi_1\left(s,\frac{1}{\chi}\right);$$

ou, si $\chi(-1)=-1$, le produit

$$\xi_2(s,\chi)\,\xi_2\left(s,\frac{1}{\chi}\right),$$

demeurent invariables par le changement de s en $(1-s)$.

56. *Conséquences relatives aux zéros de* ξ_1 *et* ξ_2. — Les théorèmes précédents conduisent identiquement aux conclusions développées au n° 33 et que nous pouvons, par conséquent, nous contenter d'énoncer ici :

Si les fonctions ξ_1 ou ξ_2 ont des racines, ce sont nécessairement des racines de Z, et ces racines ont nécessairement leur

partie réelle comprise entre zéro et un (limites non exclues jusqu'à présent).

57. *Genre des fonctions* $\xi_1(s, \chi)$ *ou* $\xi_2(s, \chi)$. — La démonstration que nous avons faite au chapitre précédent, § 4, s'applique sans changement au cas général, et nous pouvons énoncer les conclusions suivantes :

Les fonctions $\xi_1(s,\chi)$ si $\chi(-1)=1$, ou $\xi_2(s,\chi)$ si $\chi(-1)=-1$, sont des fonctions entières du premier genre. Elles ont une infinité de racines dont la partie réelle est comprise entre zéro et un (limites non exclues jusqu'à présent). Enfin, si l'on désigne en général par ρ les racines d'une de ces fonctions, la série étendue à toutes ces racines

$$\sum \frac{1}{(\mathrm{mod}\ \rho)^k}$$

sera convergente pour $k > 1$, divergente pour $k = 1$.

58. *Genre de* $Z(s, \chi)$. *Racines de cette fonction.* — Dans tous les cas, $Z(s, \chi)$ se présente comme un produit de trois fonctions du premier genre :

Pour $\chi(-1) = 1$, on a

$$Z(s, \chi) = \left(\frac{\pi}{M}\right)^{\frac{s}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \xi_1(s, \chi).$$

Pour $\chi(-1) = -1$,

$$Z(s, \chi) = \left(\frac{\pi}{M}\right)^{\frac{s+1}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} \xi_2(s, \chi)$$

Donc la fonction Z est une fonction du premier genre. Cette fonction a une infinité de racines dont les parties réelles ne peuvent surpasser l'unité. Ce sont d'abord tous les pôles de $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ si $\chi(-1)=1$, ou bien tous ceux de $\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)$ si $\chi(-1)=-1$. En outre, une infinité de racines dont la partie réelle est com-

prise entre zéro et un, et qui sont celles de ξ_1 ou de ξ_2 suivant le cas. Dans la suite, nous n'aurons aucune raison de distinguer ces racines les unes des autres. C'est pourquoi nous représenterons en général les racines de $Z(s, \chi)$ par $\rho(\chi)$ sans distinction.

Il est encore important de remarquer que, pour les racines $\rho(\chi)$ ainsi définies, la série

$$\sum \frac{1}{[\bmod \rho(\chi)]^k},$$

étendue à toutes ces racines, sera encore convergente pour $k > 1$, car cette proposition est vraie respectivement pour les deux catégories de racines qui avaient été distinguées précédemment.

§ 6. — *Propriétés de la fonction* $Z(s, \chi)$ *dans le cas d'un caractère quelconque* (mod M).

59. Si χ est un *caractère propre* (mod M), les propriétés de la fonction $Z(s, \chi)$ ont été étudiées au paragraphe précédent.

Si χ est un *caractère impropre* (mod M), nous savons que χ sera un caractère propre (mod M′), en désignant par M′ un certain diviseur de M, et l'on a

$$Z(s, \chi \bmod M) = Z(s, \chi \bmod M').$$

On est donc immédiatement ramené au cas précédent. Nous n'avons donc plus à examiner que le cas d'un caractère incomplet (mod M) et celui du caractère principal.

60. *Cas d'un caractère incomplet* (mod M). Supposons que l'on ait

$$M = 2^{\alpha} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}.$$

Un caractère incomplet renferme, par définition, dans sa composition plusieurs caractères principaux par rapport aux modules composants. Pour fixer les idées, supposons que ce soit

par rapport à $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \dots p_i^{\alpha_i}$. Le caractère χ sera un caractère propre ou impropre pour le module

$$M_1 = \frac{M}{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_i^{\alpha_i}}.$$

Or la fonction

$$Z(s, \chi \bmod M) = \Pi \left(1 - \frac{\chi(q, \bmod M)}{q^s}\right)^{-1}$$

ne diffère de

$$Z(s, \chi \bmod M_1) = \Pi \left(1 - \frac{\chi(q, \bmod M_1)}{q^s}\right)^{-1}$$

que par la suppression des facteurs

$$\left(1 - \frac{\chi(p, \bmod M_1)}{p^s}\right)^{-1},$$

relatifs aux nombres premiers p qui divisent M sans diviser M_1. Désignons donc par

$$A(s, \chi) = \Pi \left(1 - \frac{\chi(p, \bmod M_1)}{p^s}\right)$$

le produit des inverses de ces facteurs qui sont en nombre limité. Comme les facteurs qui le composent, A (s, χ) sera une fonction entière dans toute l'étendue du plan, elle sera du premier genre et admettra une infinité de racines dont la partie réelle sera nulle.

On aura

$$Z(s, \chi \bmod M) = A(s, \chi) Z(s, \chi \bmod M_1).$$

Donc la fonction Z $(s, \chi \bmod M)$ sera encore une fonction entière du premier genre comme les deux facteurs qui la composent. Cette fonction aura une infinité de racines dont la partie réelle ne peut surpasser l'unité; seulement, dans le cas actuel, une infinité de racines sont situées sur l'axe imaginaire. Nous représenterons dorénavant toutes ces racines, sans distinction de

catégorie, par $\rho(\chi)$. On voit d'ailleurs immédiatement que la série

$$\sum \frac{1}{[\mathrm{mod}\, \rho(\chi)]^k},$$

étendue à toutes ces racines, est encore convergente pourvu que l'on ait $k > 1$.

61. *Cas du caractère principal* (mod M). La réduction est analogue à la précédente dans le cas du caractère principal. La fonction

$$Z(s, \chi_0 \mathrm{mod}\ M)$$

ne diffère de la fonction

$$\zeta(s) = \Pi\left(1 - \frac{1}{q^s}\right)^{-1}$$

de Riemann que par la suppression des facteurs relatifs aux nombres premiers $2, p_1, p_2, \ldots$ qui divisent M. Désignons donc par

$$A(s, \chi_0) = \Pi\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

le produit des inverses de ces facteurs. On aura

$$Z(s, \chi_0 \mathrm{mod}\ M) = A(s, \chi_0)\zeta(s).$$

Quant à $A(s, \chi_0)$, c'est une fonction entière du premier genre, qui possède une infinité de racines situées sur l'axe imaginaire des différentes formes

$$\rho = \frac{2k\pi i}{l2}, \quad \rho = \frac{2k\pi i}{lp_1}, \quad \rho = \frac{2k\pi i}{lp_2}, \ldots$$

La fonction $Z(s, \chi_0)$ possède donc un pôle simple $s = 1$. Mais le produit

$$(s-1)Z(s, \chi_0)$$

est une fonction entière dans toute l'étendue du plan et du pre-

mier genre qui possède, outre les racines de $\zeta(s)$, une infinité de racines situées sur l'axe imaginaire. Nous représenterons dorénavant ces racines sans distinction par $\rho(\chi_0)$. Il est important de remarquer que la série

$$\sum \frac{1}{[\rho(\chi_0)]^k},$$

étendue à toutes ces racines, sera encore absolument convergente pour $k > 1$.

62. En résumé donc, on voit que la fonction $(s-1)Z(s,\chi_0)$ dans le cas du caractère principal, et les fonctions $Z(s,\chi)$ dans le cas d'un autre caractère, sont des fonctions entières du premier genre. Ces fonctions admettent une infinité de racines dont la partie réelle ne peut surpasser l'unité, et si l'on désigne respectivement ces racines par $\rho(\chi)$, dans tous les cas, les séries

$$\sum \frac{1}{[\text{mod } \rho(\chi)]^k},$$

seront absolument convergentes pour $k > 1$.

CHAPITRE IV.

Le théorème de Dirichlet sur la progression arithmétique.

63. La démonstration que nous allons exposer dans le présent chapitre est plus simple et plus complète que celle qui a été proposée par Dirichlet. Cette démonstration a déjà fait l'objet d'un travail antérieur que nous avons eu l'honneur de présenter à la Classe des sciences de l'Académie royale de Belgique. On reconnaîtra sans peine dans ce travail l'origine des recherches que nous faisons connaître aujourd'hui.

Comme ces premiers résultats sont le préliminaire indispenpensable de l'analyse plus complète qui nous occupe, nous sommes obligé de les reproduire, au moins succinctement, en renvoyant, pour plus de détails, au mémoire cité.

§ 1. — *Une équation fondamentale et ses conséquences immédiates.*

64. Supposons que les caractères χ soient définis par rapport à un module quelconque M (n° 45) et reprenons la fonction

$$Z(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{\chi(n)}{n^s}=\Pi\left(1-\frac{\chi(q)}{q^s}\right)^{-1}.$$

En prenant les dérivées logarithmiques des deux membres, il vient, pour $\mathfrak{R}(s)>1$,

$$-\frac{Z'(s,\chi)}{Z(s,\chi)}=\sum_q \frac{\chi(q)lq}{q^s-\chi(q)}$$
$$=\sum_q \chi(q)\frac{lq}{q^s}+\sum_q \frac{\chi(q)lq}{q^s(q^s-\chi(q))}.$$

Portons notre attention sur le second membre. On y trouve deux termes : le premier peut devenir infini pour $s=1$; mais le second est constitué par une série absolument convergente pour $\mathfrak{R}(s)>\frac{1}{2}$, quel que soit le caractère χ. Son produit par $(s-1)$ tendra donc vers zéro quand s tendra vers l'unité. Ainsi, en multipliant la dernière équation par $(s-1)$, puis passant à la limite $s=1$, on trouve l'*équation fondamentale*

$$\text{(E)} \quad \ldots -\lim_{s=1}(s-1)\frac{Z'(s,\chi)}{Z(s,\chi)}=\lim_{s=1}(s-1)\sum_q \chi(q)\frac{lq}{q^s},$$

et cette équation (E) en représente en réalité $\varphi(M)$ distinctes par l'échange des caractères entre eux.

65. Il s'agit maintenant de rechercher les différentes valeurs du premier membre selon le choix du caractère χ.

En premier lieu, le point $s=1$ est un pôle simple de $Z(s,\chi_0)$ (62) ; on a donc, par la théorie des fonctions, dans le cas du caractère principal,

$$-\lim_{s=1}(s-1)\frac{Z'(s,\chi_0)}{Z(s,\chi_0)}=\lim_{s=1}(s-1)\sum \frac{lq}{q^s}=1,$$

car le premier membre doit être égal au degré de multiplicité du pôle $s = 1$.

En second lieu, dans le cas d'un caractère différent du principal, le point $s = 1$ est un point ordinaire de $Z(s, \chi)$. C'est donc un point ordinaire ou un pôle pour

$$-\frac{Z'(s, \chi)}{Z(s, \chi)},$$

suivant que ce point n'est pas racine ou est racine de la fonction $Z(s\chi)$:

Dans le premier cas,

$$-\lim_{s=1}(s-1)\frac{Z'(s, \chi)}{Z(s, \chi)} = \lim_{s=1}(s-1)\sum_q \chi(q)\frac{lq}{q^s} = 0;$$

dans le second,

$$-\lim_{s=1}(s-1)\frac{Z'(s, \chi)}{Z(s, \chi)} = \lim_{s=1}(s-1)\sum_q \chi(q)\frac{lq}{q^s} = -\lambda,$$

en désignant par λ l'ordre du zéro $s = 1$.

66. Ajoutons ensemble toutes les équations qui se déduisent de (E) par l'échange des caractères entre eux. On obtiendra l'équation

$$1 - \sum \lambda = \sum_q \left[\frac{lq}{q^s} S\chi(q)\right],$$

où $\Sigma\lambda$ représente la somme des ordres de multiplicité des zéros $s = 1$ pour les différentes fonctions $Z(s, \chi)$ qui auraient cette racine. Mais le second membre se simplifie, car la somme $S\chi(q)$ est nulle, sauf pour les nombres premiers q_1 qui vérifient la condition

$$q_1 \equiv 1 \pmod{M}$$

et pour lesquels la somme des caractères est égale à $\varphi(M)$.

Notre équation se réduit donc à

$$1 - \sum \lambda = \varphi(M) \lim_{s=1} (s-1) \sum_{q_1} \frac{lq_1}{q_1^s}.$$

Pour s réel et > 1, le second membre est essentiellement positif; donc

$$\sum \lambda = 0, \quad \text{ou} \quad \sum \lambda = 1,$$

et il n'y a que deux hypothèses possibles :

1° *Aucune des fonctions* Z (s, χ) *ne s'annule pour* s $=$ 1 ;
2° *Une seule de ces fonctions s'annule pour* s $=$ 1 *et, dans ce cas, ce zéro doit être simple.*

On montrera plus loin que la seconde hypothèse est impossible; mais on reconnaît déjà que si par impossible elle se présente, la fonction Z (s, χ) qui s'annule correspond à un caractère réel, car, dans le cas contraire, la fonction conjuguée $Z\left(s, \frac{1}{\chi}\right)$ s'annulerait aussi pour $s = 1$. Il y aurait donc deux fonctions distinctes s'annulant pour cette valeur de s, ce qui est impossible, comme on vient de le dire.

§ 2. — *Aucune fonction* Z (s, χ) *ne s'annule pour* s $=$ 1.

67. Il reste simplement à démontrer qu'une fonction Z (s, χ) ne peut s'annuler pour $s = 1$, dans le cas d'un caractère χ réel.

Pour $\Re(s) > 1$, on a

$$Z(s, \chi) = \prod_q \left(1 - \frac{\chi(q)}{q^s}\right)^{-1}.$$

Partageons le produit en deux parties, l'une relative aux nombres premiers q_1 pour lesquels $\chi(q) = 1$, l'autre aux nombres q_2 pour lesquels $\chi(q) = -1$. On aura

$$Z(s, \chi) = \prod \left(1 - \frac{1}{q_1^s}\right)^{-1} \prod \left(1 + \frac{1}{q_2^s}\right)^{-1}.$$

En introduisant des facteurs qui se détruisent dans le second membre, on peut encore écrire

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad Z(s, \chi) = \Pi \left(\frac{1 + q_1^{-s}}{1 - q_1^{-s}}\right) \Pi \frac{1}{1 + q^{-s}},$$

le second de ces deux derniers produits s'étendant maintenant à tous les nombres premiers qui ne divisent pas M. Mais ce second produit peut se mettre sous la forme

$$\Pi \frac{1}{1 + q^{-s}} = \Pi \frac{1 - q^{-s}}{1 - q^{-2s}} = \frac{Z(2s, \chi_0)}{Z(s, \chi_0)},$$

et nous désignerons le premier par

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \psi(s) = \Pi \frac{1 + q_1^{-s}}{1 - q_1^{-s}}.$$

L'équation (1) donne alors

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \psi(s) = \frac{Z(s, \chi) Z(s, \chi_0)}{Z(2s, \chi_0)}.$$

Il est utile de remarquer que si, par impossible, tous les nombres premiers appartenaient à la catégorie q_1 pour laquelle $\chi(q) = -1$, il faudrait simplement remplacer l'équation (2) par

$$(2^\circ) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \psi(s) = 1.$$

La définition de $\psi(s)$ par (2) n'est légitime que pour $\Re(s) > 1$, mais la formule (3) nous donne une définition de $\psi(s)$ applicable dans tout le plan et nous fait connaître les propriétés analytiques de cette fonction :

Elle montre que $\psi(s)$ est méromorphe dans tout le plan. Ses pôles sont d'abord les zéros de

$$Z(2s, \chi_0),$$

qui ne peuvent avoir leur partie réelle supérieure à $\frac{1}{2}$, puis, en

outre, le point $s = 1$ qui est un pôle de

$$Z(s, \chi) Z(s, \chi_0),$$

sauf si $Z(s, \chi)$ s'annule pour $s = 1$.

Enfin le point $s = \frac{1}{2}$ étant un pôle de

$$Z(2s, \chi_0),$$

sera un zéro de $\psi(s)$.

On conclut de là que si $Z(s, \chi)$ s'annule pour $s = 1$, la fonction $\psi(s)$ sera synectique pour $\mathfrak{R}(s) > \frac{1}{2}$ et s'annulera pour $s = \frac{1}{2}$. Il y a entre ces deux propriétés une contradiction que nous allons mettre en évidence.

68. Remarquons d'abord que, puisque $\psi(\frac{1}{2}) = 0$, l'équation (2") est impossible, car si l'on avait

$$\psi(s) = 1, \quad \text{pour} \quad \mathfrak{R}(s) > 1,$$

$\psi(s)$ serait égal à l'unité dans tout le plan. Il est donc déjà démontré qu'il y a des nombres premiers de la catégorie q_1.

Soit maintenant a une quantité réelle positive. Puisqu'on suppose $\psi(s)$ synectique pour $\mathfrak{R}(s) > \frac{1}{2}$, la fonction de t

$$\psi(1 + a + t)$$

sera synectique pour

$$\mathfrak{R}(t) > -\left(a + \frac{1}{2}\right),$$

et, en vertu d'un théorème de Cauchy, nous pourrons la développer par la formule de Maclaurin :

$$(4) \quad \psi(1 + a + t) = \psi(1 + a) + \frac{t}{1} \psi'(1 + a) + \frac{t^2}{1.2} \psi''(1 + a) + \cdots,$$

à l'intérieur du cercle de rayon $(a + \frac{1}{2})$ et sur la circonférence elle-même, car celle-ci ne passe par aucun point critique.

Mais on peut calculer toutes ces dérivées au moyen de la formule

$$\psi(s) = \Pi \frac{1 + q_i^{-s}}{1 - q_i^{-s}},$$

qui est valable pour $\Re(s) > 1$. A cet effet, remplaçons-y les facteurs $(1 - q_i^{-s})^{-1}$ par leur développement légitime

$$1 + q_i^{-s} + q_i^{-2s} + \cdots,$$

et effectuons les multiplications; on obtiendra une série telle que

$$\psi(s) = \sum \frac{\alpha_n}{n^s},$$

où la somme s'étend à tous les entiers composés au moyen des nombres premiers q_1 et où tous les coefficients α_n sont essentiellement positifs. Cette série converge uniformément pour $\Re(s) > 1 + \varepsilon$, de sorte qu'on peut la différentier comme un polynôme pour $\Re(s) > 1$, et il vient ainsi

$$\psi^m(1 + a) = (-1)^m \sum_n \frac{\alpha_n (ln)^m}{n^{1+a}} = (-1)^m A_m.$$

On voit que les A_m sont positifs comme les α_n, et le développement de Maclaurin (4) prend la forme

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi(1 + a + t) = \psi(1 + a) - \frac{t}{1} A_1 + \frac{t^2}{1.2} A_2 + \cdots \\ + (-1)^m \frac{t^m}{1.2\ldots m} A_m + \cdots \end{aligned} \right.$$

Dans cette égalité, on peut poser

$$t = -\left(a + \frac{1}{2}\right);$$

dans cette hypothèse, le premier membre est égal à $\psi(\frac{1}{2})$ et s'annule, tandis que le second se réduit à une somme de termes positifs. La contradiction est donc manifeste et la supposition est fausse : le point $s = 1$ n'est pas un zéro de $Z(s, \chi)$.

§ 3. — *Démonstration du théorème de Dirichlet.*

69. La démonstration du théorème de Dirichlet ne présente plus maintenant aucune difficulté. Revenons à l'équation (E) du n° 64; elle donne :

1° Pour le caractère principal,

$$\lim_{s=1}(s-1)\sum_q \frac{lq}{q^s} = 1;$$

2° Pour un autre caractère,

$$\lim_{s=1}(s-1)\sum_q \chi(q)\frac{lq}{q^s} = 0.$$

Soit N un nombre quelconque premier à M; déterminons, ce qui est toujours possible, un nombre N' vérifiant la condition

$$NN' \equiv 1 \pmod{M};$$

puis multiplions l'équation précédente par $\chi(N')$; il viendra

$$\lim_{s=1}(s-1)\sum \chi(qN')\frac{lq}{q^s} = 0,$$

sauf dans le cas du caractère principal où le second membre est égal à l'unité. Comme tout à l'heure, ajoutons toutes les équations qui se déduisent de la précédente en donnant aux caractères leurs différentes valeurs; il viendra

$$\lim_{s=1}(s-1)\sum_q \left[\frac{lq}{q^s} S\chi(qN')\right] = 1.$$

Mais le premier membre se simplifie, car

$$S\chi(qN') = \varphi(M), \quad \text{si} \quad qN' \equiv 1 \pmod{M},$$

et est nul dans tous les autres cas. Désignons donc en général

par q_N les nombres premiers qui vérifient les congruences équivalentes

$$q_N N' \equiv 1 \pmod{M}, \quad q_N \equiv N \pmod{M}.$$

c'est-à-dire ceux de la forme linéaire $Mx + N$; on aura

$$\lim_{s=1} (s-1) \sum_q \frac{lq_N}{q_N^s} = \frac{1}{\varphi(M)}.$$

Cette équation montre qu'il y a une infinité de nombres premiers de la forme $Mx + N$ si M et N sont premiers entre eux. Elle établit donc le théorème de Dirichlet, mais elle prouve, en outre, que la fréquence des nombres premiers q_N ne dépend pas de N et est la même pour les différentes progressions arithmétiques ayant même raison M.

70. J'ai montré, dans le mémoire rappelé en tête de ce chapitre, que la dernière équation contient le théorème suivant :

Si le rapport

$$\frac{1}{t} \sum_{q_N < t} lq_N,$$

qui a pour numérateur la somme des nombres premiers inférieurs à t et de la forme linéaire $(Mx + N)$ tend vers une limite déterminée quand t tend vers l'infini, cette limite ne peut être différente de $\frac{1}{\varphi(M)}$.

Il est très intéressant de savoir si cette limite hypothétique existe. Nous allons compléter la démonstration du chapitre actuel en établissant l'existence effective de cette limite. C'est ce qui fera l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE V.

Compléments du théorème de Dirichlet.

§ 1. — *Les fonctions* Z (s, χ) *n'ont pas de racines* ρ *de la forme* 1 + βi (*).

71. Montrons d'abord que si $\rho = 1 + \beta i$ est racine d'une des fonctions $Z(s, \chi)$, elle est racine d'une seule de ces fonctions et de plus une racine simple. La démonstration sera toute pareille à celle du § 1 du chapitre précédent, où il s'agissait de racines égales à *un*.

Revenons à l'équation du n° 64

$$- D \log Z(s, \chi) = \sum_q \frac{\chi(q) lq}{q^s - \chi(q)}.$$

Si ρ est une racine de degré λ de $Z(s, \chi)$, on aura

$$\lim_{s=\rho} (s - \rho) D \log Z(s, \chi) = \lambda$$

Eu égard à la précédente, cette équation, pour $\rho = 1 + \beta i$, peut se réduire à

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \lim_{s=1} (s - 1) \sum \chi(q) \frac{lq}{q^{s+\beta i}} = - \lambda.$$

Cette équation (1) suppose simplement que $\mathfrak{R}(s)$ est > 1, mais nous supposerons, en outre, que s est réel.

Ajoutons ensemble toutes les équations qui se déduisent de (1) par l'échange des caractères entre eux; il vient, en désignant de

(*) Cette démonstration n'est pas celle que nous avons exposée dans notre résumé; elle est visiblement inspirée par celle que M. Hadamard a publiée après la nôtre, mais elle est encore plus simple. (Voir la note à la fin de la troisième partie.)

nouveau par q_1 les nombres premiers de la forme $Mx + 1$,

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \varphi(M) \lim_{s=1} (s-1) \sum \frac{lq_1}{q_1^{s+\beta i}} = - \sum \lambda.$$

Mais la somme des modules des termes du premier membre est égale à l'unité en vertu de l'équation démontrée au paragraphe 3 du chapitre précédent (n° 69) :

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \varphi(M) \lim_{s=1} (s-1) \sum \frac{lq_1}{q_1^s} = 1.$$

Donc $\Sigma\lambda$, ne pouvant surpasser cette somme, est égal à *zéro* ou à *un*. C'est-à-dire qu'une seule au plus des fonctions $Z(s, \chi)$ s'annule pour $s = 1 + \beta i$ et que ce zéro doit être simple.

72. Je dis maintenant que cette dernière hypothèse ellemême est impossible. Pour le montrer, ajoutons les équations (2) et (3), en faisant $\Sigma\lambda = 1$ dans la première. Il vient

$$\lim_{s=1} (s-1) \sum (1 + q_1^{-\beta i}) \frac{lq_1}{q_1^s} = 0,$$

et, en égalant les parties réelles,

$$\lim_{s=1} (s-1) \sum (1 + \cos \beta l q_1) \frac{lq_1}{q_1^s} = 0.$$

Tous les termes sont positifs, car $(1 + \cos \beta l q_1)$ ne peut être négatif. Si nous multiplions respectivement tous ces termes par $(1 - \cos \beta l q_1)$ qui est compris entre 0 et 2, nous formerons une nouvelle somme qui sera nulle comme la précédente.

On trouve ainsi, eu égard aux relations

$$1 - \cos^2 \beta l q_1 = \sin^2 \beta l q_1 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\beta l q_1),$$

la nouvelle équation

$$\lim_{s=1} (s-1) \sum (1 - \cos 2\beta l q_1) \frac{lq_1}{q_1^s} = 0$$

Mais celle-ci est impossible, car si l'on soustrait membre à membre les équations (2) et (3), après y avoir remplacé β par 2β, on trouve, en négligeant la partie imaginaire,

$$\varphi(M) \lim_{s=1} (s-1) \sum \left(1 - \cos 2\beta l q_1\right) \frac{l q_1}{q_1^s} = 1 + \sum \lambda.$$

Le second membre est égal à 2 ou à 1 suivant que $1 + 2\beta i$ est ou n'est pas racine d'une des fonctions $Z(s, \chi)$, mais dans aucune hypothèse il ne peut être nul. *Donc aucune des fonctions* $Z(s, \chi)$ *n'a de racines de la forme* $1 + \beta i$.

§ 2. — *Démonstration d'une équation fondamentale.*

73. Revenons encore à l'équation du n° 64

$$-D \log Z(s, \chi) = \sum_q \frac{\chi(q) l q}{q^s - \chi(q)}.$$

Multiplions les deux membres de l'équation précédente par

$$\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)},$$

où l'on désigne par u et v des quantités réelles ou complexes distinctes des pôles de $D \log Z(s, \chi)$. Cela fait, soit a une quantité réelle supérieure à l'unité et aux parties réelles de u et de v, et b une quantité réelle que nous ferons tendre vers l'infini. Intégrons les deux membres de notre équation de $(a - bi)$ à $(a + bi)$; il viendra à la limite

$$(1) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{aligned} & -\frac{1}{2\pi i} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} D \log Z(s, \chi) \frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)} \\ & = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)} \sum \frac{\chi(q) l q}{q^s - \chi(q)}. \end{aligned} \right.$$

74. Évaluons d'abord le second membre. Il suffit, pour cela, de reproduire les raisonnements du n° 25 de la première partie. En remarquant que

$$\frac{\chi(q)lq}{q^s - \chi(q)} = \chi(q)\frac{lq}{q^s} + \chi(q^2)\frac{lq}{q^{2s}} + \chi(q^3)\frac{lq}{q^{3s}} + \cdots,$$

on trouve que ce second membre a pour valeur

$$\frac{y^u}{u-v}\left[\sum_{q<y}\chi(q)\frac{lq}{q^u} + \sum_{q^2<y}\chi(q^2)\frac{lq}{q^{2u}} + \cdots\right]$$
$$-\frac{y^v}{u-v}\left[\sum_{q<y}\chi(q)\frac{lq}{q^v} + \sum_{q^2<y}\chi(q^2)\frac{lq}{q^{2v}} + \cdots\right].$$

Par analogie avec ce qui a été fait dans la première partie, nous simplifierons ces notations, en posant en abrégé

$$(2)\quad . \quad . \quad \sum_{q^m<y}\frac{\chi(q^m)lq}{q^{mu}} = \sum_{q<y}\chi(q)\frac{lq}{q^u} + \sum_{q^2<y}\chi(q^2)\frac{lq}{q^{2u}} + \cdots$$

La valeur du second membre de notre équation peut alors s'écrire plus simplement

$$(3)\quad . \quad . \quad . \quad \frac{y^u}{u-v}\sum_{q^m<y}\frac{\chi(q^m)lq}{q^{mu}} - \frac{y^v}{u-v}\sum_{q^m<y}\frac{\chi(q^m)lq}{q^{mv}}.$$

Passons à l'évaluation de l'intégrale du premier membre, savoir, en changeant son signe,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \mathrm{D}\log Z(s,\chi)\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)}.$$

Il y a deux cas à distinguer selon qu'on a affaire : 1° au caractère principal; 2° à un autre caractère.

1° Dans le cas du caractère principal, la fonction

$$(s-1)Z(s,\chi_0)$$

est une fonction entière du premier genre (62) qui a une infinité

de racines dont la partie réelle est inférieure à l'unité et que nous représentons sans distinction par $\rho\,(\chi_0)$. On a d'ailleurs

$$\mathrm{D}\log \mathrm{Z}(s, \chi_0) = \mathrm{D}\log (s-1)\mathrm{Z}(s, \chi_0) - \mathrm{D}\log (s-1),$$

et, par conséquent, par le théorème du n° 23 de la première partie,

$$(4)\ .\ .\ \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \mathrm{D}\log \mathrm{Z}(s, \chi_0)\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)} \\ &= \frac{1}{u-v}\left[y^u\frac{\mathrm{Z}'(u, \chi_0)}{\mathrm{Z}(u, \chi_0)} - y^v\frac{\mathrm{Z}'(v, \chi_0)}{\mathrm{Z}(v, \chi_0)}\right] \\ &- \frac{y}{(u-1)(v-1)} + \sum_{\rho(\chi_0)}\frac{y^\rho}{(u-\rho)(v-\rho)}. \end{aligned}\right.$$

2° Dans le cas d'un autre caractère, la fonction $\mathrm{Z}(s, \chi)$ est une fonction entière du premier genre (63), dont nous représentons en général les racines par $\rho\,(\chi)$. Toutes ces racines ont leur partie réelle égale au plus à l'unité. On peut appliquer à cette fonction le même théorème, ce qui donne

$$(5)\ .\ .\ \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \mathrm{D}\log \mathrm{Z}(s, \chi)\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)} \\ &= \frac{1}{u-v}\left[y^u\frac{\mathrm{Z}'(u, \chi)}{\mathrm{Z}(u, \chi)} - y^v\frac{\mathrm{Z}'(v, \chi)}{\mathrm{Z}(v, \chi)}\right] \\ &+ \sum_{\rho(\chi)}\frac{y^\rho}{(u-\rho)(v-\rho)}. \end{aligned}\right.$$

75. L'équation (1) se transforme ainsi, suivant le choix du caractère, dans l'une des suivantes :

1° Dans le cas du caractère principal,

$$(6^\circ)\ \left\{\begin{aligned} &y^u\sum_{q^m<y}\frac{lq}{q^{mu}} - y^v\sum_{q^m<y}\frac{lq}{q^{mv}} = -y^u\frac{\mathrm{Z}'(u, \chi_0)}{\mathrm{Z}(u, \chi_0)} + y^v\frac{\mathrm{Z}'(v, \chi_0)}{\mathrm{Z}(v, \chi_0)} \\ &\qquad + (u-v)\frac{y}{(u-1)(v-1)} - u-v)\sum_{\rho(\chi_0)}\frac{y^\rho}{(u-\rho)(v-\rho)}; \end{aligned}\right.$$

2° Dans le cas d'un autre caractère,

$$(6^b)\quad \left\{\begin{aligned} & y^u \sum_{q^m<y} \frac{\chi(q^m)lq}{q^{mu}} - y^v \sum_{q^m<y} \frac{\chi(q^m)lq}{q^{mv}} = - y^u \frac{Z'(u,\chi)}{Z(u,\chi)} + y^v \frac{Z'(v,\chi)}{Z(v,\chi)} \\ & \qquad - (u-v) \sum_{\rho(\chi)} \frac{y^\rho}{(u-\rho)(v-\rho)}. \end{aligned}\right.$$

Ces équations (6) subsistent, comme on l'a expliqué au n° 26 de la première partie, pour toutes les valeurs de u et de v.

§ 3. — *Cas particuliers des équations du paragraphe précédent.*

76. *Premier cas particulier.* Nous allons d'abord faire tendre v vers zéro dans les formules (6) du numéro précédent. Il peut se faire que $Z(s,\chi)$ ait des racines nulles; en particulier, c'est toujours le cas pour $Z(s,\chi_0)$. Supposons donc, en général, que $s=0$ soit une racine de degré λ de multiplicité de $Z(s,\chi)$. Dans les seconds membres des équations (6^b), les termes qui dépendent de v sont

$$y^v \frac{Z'(v,\chi)}{Z(v,\chi)} - (u-v) \sum_{\rho(\chi)} \frac{y^\rho}{(u-\rho)(v-\rho)}.$$

Isolons de cette somme Σ les termes relatifs aux λ racines nulles et accentuons la somme étendue aux autres raeines. L'expression précédente pourra s'écrire

$$y^v \frac{Z'(v,\chi)}{Z(v,\chi)} - \lambda\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{u}\right) - (u-v) \sum_{\rho(\chi)}' \frac{y^\rho}{(u-\rho)(v-\rho)},$$

ou, en introduisant des termes qui se détruisent,

$$y^v \left[\frac{Z'(v,\chi)}{Z(v,\chi)} - \frac{\lambda}{v}\right] + \lambda \frac{y^v - 1}{v} + \frac{\lambda}{u} - (u-v) \sum_{\rho(\chi)}' \frac{y^\rho}{(u-\rho)(v-\rho)}.$$

Si v tend vers zéro, cette expression a pour limite

$$\lambda l y + \frac{\lambda}{u} + \lim_{v=0} \left[\frac{Z'(v,\chi)}{Z(v,\chi)} - \frac{\lambda}{v}\right] - u \sum_{\rho(\chi)}' \frac{y^\rho}{\rho(\rho-u)}.$$

Si l'on fait donc tendre v vers zéro dans les seconds membres des équations (6) et si l'on tient compte de la transformation ci-dessus, on trouve, en divisant par y^u :

1° Dans le cas du caractère principal, si $Z(v, \chi_0)$ a une racine $v = 0$ de degré λ,

$$(7^a)\left\{\begin{aligned}\sum_{q^m<y}\frac{lq}{q^{mu}}-\frac{1}{y^u}\sum_{q^m<y}lq = -\frac{Z'(u,\chi_0)}{Z(u,\chi_0)}+\frac{u}{1-u}y^{1-u}-u\sum_{\rho(\chi_0)}'\frac{y^{\rho-u}}{\rho(\rho-u)}\\ +\frac{1}{y^u}\left[\lambda ly+\frac{\lambda}{u}+\lim_{v=0}\left(\frac{Z'(v,\chi_0)}{Z(v,\chi_0)}-\frac{\lambda}{v}\right)\right];\end{aligned}\right.$$

2° Dans le cas d'un autre caractère, si $Z(v, \chi)$ a une racine nulle de degré μ,

$$(7^b)\left\{\begin{aligned}\sum_{q^m<y}\frac{\chi(q^m)lq}{q^{mu}}-\frac{1}{y^u}\sum_{q^m<y}\chi(q^m)lq = -\frac{Z'(v,\chi)}{Z(v,\chi)}-u\sum_{\rho(\chi)}'\frac{y^{\rho-u}}{\rho(\rho-u)}\\ +\frac{1}{y^u}\left[\mu ly+\frac{\mu}{u}+\lim_{v=0}\left(\frac{Z'(v,\chi)}{Z(v,\chi)}-\frac{\mu}{v}\right)\right].\end{aligned}\right.$$

Le cas où $Z(v, \chi)$ n'a pas de racines nulles est compris dans le précédent pour $\mu = 0$.

77. *Deuxième cas particulier. Simplification des équations précédentes dans l'hypothèse* $\mathfrak{R}(u) = 1$. Supposons que la partie réelle de u soit égale à l'unité. Les deux membres de l'équation (7) peuvent se simplifier.

Quant au premier membre, on voit, comme au n° 53 de la première partie, que la somme

$$\sum_{q^m<y}\frac{\chi(q^m)lq}{q^{mu}}-\frac{1}{y^u}\sum_{q^m<y}\chi(q^m)lq$$

ne diffère de

$$\sum_{q<y}\frac{\chi(q)lq}{q^u-\chi(q)}-\frac{1}{y^u}\sum_{q<y}\chi(q)lq$$

que par une quantité qui tend vers zéro quand y tend vers l'infini.

Passons au second membre. Le terme écrit sur la seconde ligne tend rapidement vers zéro quand y augmente. La somme absolument convergente

$$\sum_{\rho(\chi)}{}' \frac{y^{\rho-u}}{\rho(\rho-u)}$$

tend aussi vers zéro, parce que toutes les racines ρ ont leur partie réelle inférieure à l'unité.

Si donc on désigne, en général, par ε une quantité infiniment petite pour y infiniment grand, les équations (7) donneront, pour $\mathcal{R}(u) = 1$:

1° Dans le cas du caractère principal,

$$(8^a) \quad \sum_{q<y} \frac{lq}{q^u - 1} - \frac{1}{y^u} \sum_{q<y} lq = -\frac{Z'(u, \chi_0)}{Z(u, \chi_0)} + \frac{u}{1-u} y^{1-u} + \varepsilon;$$

2° Dans le cas d'un autre caractère,

$$(8^b) \quad . \quad . \sum_{q<y} \frac{\chi(q) lq}{q^u - \chi(q)} - \frac{1}{y^u} \sum_{q<y} \chi(q) lq = -\frac{Z'(u, \chi)}{Z(u, \chi)} + \varepsilon.$$

78. On peut encore simplifier l'écriture de ces deux équations. Comme on suppose que $\mathcal{R}(u) = 1$, les deux différences

$$\sum_{q<y} \frac{lq}{q^u} - \sum_{q<y} \frac{lq}{q^u - 1} \quad \text{et} \quad \sum_{q<y} \chi(q) \frac{lq}{q^u} - \sum_{q<y} \frac{\chi(q) lq}{q^u - \chi(q)}$$

convergent vers des limites finies quand y tend vers l'infini. Désignons donc, en général, par L une expression dont on saura seulement qu'elle converge vers une limite déterminée quand y croît indéfiniment; les équations (8) pourront s'écrire, toujours bien entendu dans l'hypothèse $\mathcal{R}(u) = 1$:

1° Dans le cas du caractère principal,

$$(9^a) \quad . \quad . \sum_{q<y} \frac{lq}{q^u} - \frac{1}{y^u} \sum_{q<y} lq = -\frac{Z'(u, \chi_0)}{Z(u, \chi_0)} + \frac{u}{1-u} y^{1-u} + \mathrm{L};$$

2° Dans le cas d'un autre caractère,

$$(9^b) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \sum_{q<y} \chi(q) \frac{lq}{q^u} - \frac{1}{y^u} \sum_{q<y} \chi(q) lq = \mathrm{L}.$$

Il est bien entendu que la lettre L ne représente pas la même quantité aux seconds membres de ces deux équations.

§ 4. — *Conséquences asymptotiques.*

79. Si l'on fait, en particulier, $u = 1$, dans les équations (9) qui précèdent, il viendra :

1° Dans le cas du caractère principal,

$$(10^a) \quad \ldots \quad \sum_{q<y} \frac{lq}{q} - \frac{1}{y} \sum_{q<y} lq = ly + L;$$

2° Pour un autre caractère,

$$(10^b) \quad \ldots \quad \sum_{q<y} \chi(q) \frac{lq}{q} - \frac{1}{y} \sum \chi(q) lq = L.$$

Soient N un nombre premier à M, et N_1 un nombre vérifiant la condition $NN_1 \equiv 1$ (mod. M). Multiplions la dernière équation par $\chi(N_1)$; elle devient

$$(11) \quad \ldots \quad \sum_{q<y} \frac{\chi(qN_1) lq}{q} - \frac{1}{y} \sum_{q<y} \chi(qN_1) lq = L.$$

Cette équation est vraie pour tous les caractères, sauf pour le principal, auquel cas on retombe sur l'équation (10^a).

Ajoutons entre elles toutes les équations qui se déduisent de (11) en y substituant tous les caractères et aussi l'équation qui correspond au caractère principal. La somme des caractères étant nulle, sauf pour les nombres premiers q_N de la forme $Mx + N$ (n° 69), cas auquel elle est égale à $\varphi(M)$, il vient

$$(12) \quad \ldots \quad \varphi(M) \left[\sum_{q_N<y} \frac{lq_N}{q_N} - \frac{1}{y} \sum_{q_N<y} lq_N \right] = ly + L,$$

et L désigne toujours une quantité convergente pour $y = \infty$.

80. La dernière équation est de la même forme que celle sur laquelle nous avons raisonné dans la première partie du mémoire (chap. IV, § 2). Elle conduit aux conséquences corres-

pondantes que nous allons énoncer, en renvoyant aux démonstrations de la première partie :

1° *L'expression*

$$\frac{\varphi(M)}{y} \sum_{q_N < y} lq_N,$$

dans laquelle la somme est étendue aux nombres premiers $< y$ *et de la forme* $Mx + N$, *a pour limite l'unité, quand* y *tend vers l'infini* (*).

2° *La différence*

$$\varphi(M) \sum_{q_N < y} \frac{lq_N}{q_N} - ly$$

tend vers une limite finie et déterminée quand y *tend vers l'infini.*

3° *Quelque petite que soit la constante* h, *le nombre des nombres premiers de la forme* $Mx + N$ *compris entre* y *et* $(1 + h)y$ *augmente indéfiniment avec* y, *quelle que soit la manière dont* y *tende vers l'infini.*

81. 4° *Le nombre* f(y) *des nombres premiers de la forme* $Mx + N$ *et* $< y$ *peut se représenter par l'expression*

$$(13) \quad \dots\dots\dots \quad f(y) = \frac{1+\varepsilon}{\varphi(M)} \frac{y}{ly},$$

où ε *est infiniment petit pour* y *infiniment grand.*

Démonstration. — Soit, en général, ε une quantité qui tend vers zéro quand y tend vers l'infini. On peut poser, comme on l'a dit au numéro précédent (1°),

$$(\alpha) \quad \dots\dots\dots \quad \sum_{q<y} lq_N = \frac{1+\varepsilon}{\varphi(M)} y.$$

Désignons par $f(y)$ le nombre des nombres premiers q_N qui sont $< y$; on aura $lq_N < ly$, d'où

$$\sum_{q<y} lq_N < f(y)\, ly,$$

(*) Nous avons communiqué ce théorème à la Société scientifique dans la séance du 16 avril 1896 et il a été publié, pour la première fois, dans le *Bulletin* de cette session.

et par (α)

$$(\beta) \quad \ldots\ldots\ldots \quad f(y) > \frac{1+\varepsilon}{\varphi(\mathrm{M})}\frac{y}{ly}.$$

Soit, d'autre part, Σ' une somme étendue aux nombres $q_{\mathrm{N}} > y : (ly)^2$ et $< y$. Pour ceux-ci, on a $lq_{\mathrm{N}} > ly - 2\,lly$. Comme le nombre des nombres premiers $< y : (ly)^2$ est évidemment inférieur à $y : (ly)^2$, le nombre des termes de la somme Σ' sera supérieur à $f(y) - y : (ly)^2$. De là les inégalités :

$$\sum_{q<y} lq_{\mathrm{N}} > \sum{}' lq_{\mathrm{N}} > \left[f(y) - \frac{y}{(ly)^2}\right](ly - 2lly).$$

On en tire par l'équation (α)

$$(\gamma) \quad \ldots\ldots \quad f(y) < \frac{1+\varepsilon}{\varphi(\mathrm{M})}\frac{y}{ly - 2lly} + \frac{y}{(ly)^2}.$$

Les seconds membres des inégalités (β) et (γ) sont tous les deux de la forme du second membre de (13). Le théorème est donc démontré.

82. Tous les théorèmes précédents sont des conséquences des équations (9). Nous allons terminer par des théorèmes plus particuliers, qui seront des conséquences des équations (8).

5° *Pour tout caractère différent du principal, la série étendue aux nombres premiers* q *successifs, rangés par ordre de grandeur,*

$$\sum \frac{\chi(q)lq}{q^u - \chi(q)},$$

est convergente pour $\mathfrak{R}(u) = 1$ *et a pour somme*

$$-\frac{Z'(u,\chi)}{Z(u,\chi)}.$$

Démonstration. — Désignons par Σ_{N} une somme qui s'étend aux nombres premiers avec M et $<$ M et faisons la décomposition

$$\frac{1}{y^u}\sum_{q<y}\chi(q)lq = y^{1-u}\sum_{\mathrm{N}}\left[\frac{\chi(\mathrm{N})}{y}\sum_{q_{\mathrm{N}}<y} lq_{\mathrm{N}}\right],$$

nous voyons que cette somme tend vers zéro pour y infini, parce que tous les rapports

$$\frac{1}{y}\sum_{q_N<y} lq_N$$

tendent vers la même limite $1 : \varphi(M)$ et que la somme $\Sigma\chi(N)$ des caractères est nulle.

Pour $\mathcal{R}(u) = 1$, l'équation (8') du n° 77 doit donc se réduire à

$$\sum_{q<y}\frac{\chi(q)lq}{q^u-\chi(q)} = -\frac{Z'(u,\chi)}{Z(u,\chi)} + \varepsilon,$$

ce qui démontre le théorème.

6° *Dans le cas du caractère principal, la série illimitée cesse d'être convergente pour* $\mathcal{R}(u) = 1$, *mais on a alors la formule asymptotique pour* $y = \infty$:

$$(14) \quad . \; . \; . \quad \sum_{q<y}\frac{lq}{q^u-1} = -\frac{Z'(u,\chi_0)}{Z(u,\chi_0)} + \frac{y^{1-u}}{1-u} + \varepsilon.$$

Cette formule est une conséquence de l'équation (8') où l'on remplacera le terme

$$\frac{1}{y^u}\sum_{q<y} lq$$

par sa valeur asymptotique y^{1-u}.

Corollaire. — Dans le cas où la somme s'étend à tous les nombres premiers $p < y$ sans distinction, on aura la formule asymptotique

$$\sum_{p<y}\frac{lp}{p^u-1} = -\frac{\zeta'(u)}{\zeta(u)} + \frac{y^{1-u}}{1-u} + \varepsilon.$$

A la limite, quand y augmente indéfiniment, le premier membre devient donc, pour $\mathcal{R}(u) = 1$, une fonction périodique de y.

RECHERCHES ANALYTIQUES

SUR

LA THÉORIE DES NOMBRES PREMIERS

TROISIÈME PARTIE

LES FORMES QUADRATIQUES DE DÉTERMINANT NÉGATIF.

CHAPITRE PREMIER.

ÉTUDE PRÉLIMINAIRE DE QUELQUES FONCTIONS AUXILIAIRES.

§ 1. — *Considérations générales sur la portée de la démonstration.*

1. C'est à Dirichlet que l'on doit d'avoir étendu aux formes quadratiques le théorème de la progression arithmétique (*Académie de Berlin*, 1840, et t. XXI du *Journal de Crelle*). On trouve dans ce travail plutôt l'esquisse d'une démonstration qu'une démonstration complète. Dirichlet a généralisé son théorème dans les *Comptes rendus* de 1850, en montrant qu'une forme quadratique proprement primitive peut représenter une infinité de nombres premiers qui sont en même temps d'une forme linéaire donnée, pourvu que les caractères quadratiques de ces deux formes soient compatibles. M. H. Weber a, dans un travail remarquable (*Math. Ann.*, t. XX, p. 301), fait disparaître les lacunes considérables que Dirichlet avait laissées dans la démonstration de son théorème sous sa forme restreinte. Enfin,

M. A. Meyer (*Journ. für d. reine u. ang. Math.*, t. CIII, p. 98) a étendu la méthode de M. Weber à la démonstration du théorème sous sa forme la plus complète.

2. Les principes des méthodes de Riemann et de M. Hadamard, dont nous venons de reconnaître l'efficacité dans la théorie des formes linéaires, peuvent aussi s'étendre à la théorie des formes quadratiques. Il se présente toutefois une différence très considérable entre les formes de déterminant positif et celles de déterminant négatif. Ainsi, tandis que l'extension se fait naturellement à ces dernières, les formes de déterminant positif exigent une analyse beaucoup plus compliquée. C'est pourquoi, nous nous bornerons, dans cette troisième partie, à la théorie des formes de déterminant négatif et nous traiterons dans une quatrième partie celle des formes de déterminant positif (*).

Nous pourrions abréger notre travail en utilisant immédiatement les formules de MM. Weber et Meyer. Cependant, nous allons refaire toute la démonstration par une méthode nouvelle qui nous paraît offrir de multiples avantages. Nous n'en signalerons que deux.

Dans notre premier chapitre, nous étudions une fonction $\Phi(t, c)$ qui possède une propriété fonctionnelle fondamentale. Celle-ci s'exprime par la formule (11) du § 3. M. Weber établit une formule analogue et qui pourrait nous servir (**). Mais M. Bachmann, dans sa *Zahlentheorie* (2e partie, p. 298), attire l'attention sur la difficulté et la longueur excessive de la démonstration de MM. Weber et Meyer où l'on fait appel aux fonctions θ de deux arguments. Si bien qu'il se voit forcé de se contenter de la résumer dans son livre, en renvoyant à l'original pour le détail de la démonstration et en émettant le vœu d'en voir proposer une plus simple. Sur ce point, nous pensons satisfaire complètement au

---

(*) Un résumé de cette quatrième partie a paru dans le *Bulletin* (session du 28 janvier 1897).

(**) M. Hadamard prend cette formule comme point de départ de la démonstration qu'il a esquissée dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* (1896) et dont nous avons déjà parlé dans la note placée en tête de la deuxième partie.

desideratum de M. Bachmann : la démonstration qui fait l'objet de nos §§ 2 et 3 n'a rien d'excessif comme longueur; elle est absolument complète et ne s'appuie que sur la propriété très élémentaire de la fonction $\psi_1(\alpha, x)$ qui a été démontrée, en quelques lignes, dans la seconde partie du mémoire.

Le second avantage que nous voyons dans notre méthode est d'éliminer toutes les considérations relatives à la loi de réciprocité de Legendre, qui formaient une des parties délicates des démonstrations précédentes.

Nous traiterons seulement dans cette partie, le cas où l'on ne fait pas intervenir la progression arithmétique, parce qu'il est le plus simple et qu'à notre avis il y a toujours avantage à commencer par ce premier cas. Le lecteur qui aura examiné notre travail et qui voudra bien y joindre les considérations particulières qui font l'objet de la généralisation de M. Meyer, verra que notre méthode et nos résultats s'étendent d'eux-mêmes au cas le plus compliqué. Nous nous réservons d'ailleurs de montrer plus tard que toutes les longueurs inhérentes à la méthode de M. Meyer disparaissent en même temps.

§ 2. — *Définition et propriété fonctionnelle de* $F(\alpha, \beta, t)$.

3. La relation fonctionnelle qu'il s'agit d'établir dans ce paragraphe est une conséquence de celle à laquelle satisfait la fonction $\psi_1(\alpha, x)$ de la seconde partie du mémoire. Voici cette dernière relation (2e partie, n° 3) :

$$\psi_1(\alpha, x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-(n+\alpha)^2 \pi x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi}{x}} \cos 2n\pi\alpha \right].$$

Ce qui nous sera utile dans cette équation peut se condenser dans la formule plus simple :

$$\psi_1(\alpha, x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\theta(x)}{\sqrt{x}} e^{-\frac{\pi}{x}},$$

en désignant, d'une manière générale, par $\theta(x)$ une fonction continue qui tend vers une limite finie quand x tend vers zéro.

C'est sous une forme un peu différente que nous aurons à nous servir de cette relation. Désignons par μ et ν deux constantes positives, par α et β deux constantes quelconques et faisons le produit de deux équations analogues à la précédente; nous obtiendrons un résultat de la forme

$$(1) \quad \ldots \quad \psi_1(\alpha, \mu x)\,\psi_1(\beta, \nu x) = \frac{1}{x\sqrt{\mu\nu}} + \frac{\theta(x)}{x}\,e^{-\frac{K}{x}},$$

où $\theta(x)$ est une fonction continue qui tend vers une limite finie quand x tend vers zéro et où K est une quantité indépendante de x et plus grande que zéro.

C'est à la relation (1) que nous allons ramener la propriété fonctionnelle de la fonction $\Phi(t,c)$ qui jouera, dans cette troisième partie du mémoire, le même rôle que les fonctions $\psi(\alpha, x)$ dans la seconde. Nous étudierons cette fonction au paragraphe suivant et nous commencerons par l'étude d'une fonction intermédiaire $F(\alpha, \beta, t)$.

4. *Définition de la fonction* $F(\alpha, \beta, t)$. — Cette définition se rattache à la considération d'une forme quadratique f de déterminant négatif $(-\Delta)$ et à coefficients positifs

$$f = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

et la fonction F s'exprime par la somme double

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad F(\alpha, \beta, t) = \sum_{m,n} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)t},$$

où l'on a

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \left\{ \begin{aligned} x &= \alpha + 2m\Delta, \\ y &= \beta + 2n\Delta. \end{aligned} \right.$$

Quant aux variables m et n, par rapport auxquelles se fait la sommation, elles reçoivent toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$.

5. ***Réduction de*** **F** (α, β, t) ***à des fonctions*** $F_{i,k}(t)$. — Nous nous proposons de trouver une relation fonctionnelle vérifiée par $F(\alpha, \beta, t)$. Pour cela, nous allons partager la somme $\Sigma_{m,n}$ qui sert de définition à cette fonction, en ab sommes partielles que nous désignerons respectivement par $F_{i,k}(t)$, ces indices prenant les systèmes de valeurs

$$i = 0, 1, 2, \ldots (b-1); \qquad k = 0, 1, 2, \ldots (a-1).$$

La fonction $F_{i,k}(t)$ sera définie par la somme double

$$(4) \quad \ldots\ldots \quad F_{i,k}(t) = \sum_{m', n'} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)t},$$

où x et y s'expriment toujours par les formules (3), mais où m et n prennent les seuls systèmes de valeurs qui se déduisent des formules

$$\begin{cases} m = i + bm', \\ n = k + an', \end{cases}$$

quand on donne à m' et n' tous les systèmes de valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$.

Il est clair que la somme $F_{i,k}(t)$ comprend une partie des termes qui entrent dans la somme F et que l'on a

$$(5) \quad \ldots\ldots\ldots \quad F(\alpha, \beta, t) = \sum_{i,k} F_{i,k}(t).$$

Afin d'exprimer simplement x et y en fonction de m' et n', posons en abrégé,

$$\begin{cases} \alpha' = \alpha + 2i\Delta, \\ \beta' = \beta + 2k\Delta. \end{cases}$$

On voit que, pour former la fonction

$$F_{i,k}(t) = \sum_{m', n'} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)t},$$

il faut donner à x et y tous les systèmes de valeurs qui se

déduisent des formules

$$(6) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} x = \alpha' + 2b\Delta m', \\ y = \beta' + 2a\Delta n', \end{cases}$$

quand m', n' reçoivent toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$.

6. *Réduction de* $F_{i,k}(t)$ *à la fonction* ψ_1. — Pour les valeurs de x, y définies par les formules (6) ci-dessus, on a

$$ax^2+2bxy+cy^2 = \frac{1}{a}\left[(ax+by)^2 + \Delta y^2\right]$$

$$= \frac{1}{a}\left\{[a\alpha' + b\beta' + (m'+n')2ab\Delta]^2 + \Delta(\beta' + 2a\Delta n')^2\right\}$$

$$= \left[\frac{a\alpha' + b\beta'}{2ab\Delta} + (m'+n')\right]^2 4ab^2\Delta^2 + \left(\frac{\beta'}{2a\Delta} + n'\right)^2 4a\Delta^3.$$

Posons encore, en abrégé,

$$\alpha'' = \frac{a\alpha' + b\beta'}{2ab\Delta}, \quad \beta'' = \frac{\beta'}{2a\Delta}, \quad m' + n' = m'';$$

pour chaque valeur de n', on devra attribuer à m'' toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$. Il vient ainsi

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = (\alpha'' + m'')^2 4ab^2\Delta^2 + (\beta'' + n')^2 4a\Delta^3,$$

et, par conséquent,

$$F_{i,k}(t) = \sum_{m''} e^{-(\alpha''+m'')^2 4ab^2\Delta^2 t} \sum_{n'} e^{-(\beta''+n')^2 4a\Delta^3 t},$$

c'est-à-dire, par la définition de ψ_1 rappelée au n° 3,

$$(7) \quad \ldots \quad F_{i,k}(t) = \psi_1\left(\alpha'', \frac{4ab^2\Delta^2 t}{\pi}\right)\psi_1\left(\beta'', \frac{4a\Delta^3 t}{\pi}\right).$$

7. *Propriétés fonctionnelles de* $F_{i,k}(t)$ *et* $F(\alpha, \beta, t)$. — Appliquons au second membre de la dernière équation la relation (1)

du n° 3, nous obtiendrons un résultat de la forme

$$F_{i,k}(t) = \frac{\pi}{4ab\Delta^2\sqrt{\Delta}}\,\frac{1}{t} + \frac{\theta(t)}{t}\,e^{-\frac{K}{t}}.$$

C'est la relation fonctionnelle que vérifie $F_{i,k}(t)$: on y désigne par $\theta(t)$ une fonction qui reste finie quand t tend vers zéro et par K une quantité positive indépendante de t et qui peut dépendre des indices i, k.

Par la permutation des indices i, k, on déduit ab équations distinctes de celle qui précède; ajoutons-les entre elles, nous obtiendrons, eu égard à (5), la relation fonctionnelle vérifiée par F, savoir :

$$(8) \quad . \; . \; . \; . \quad F(\alpha, \beta, t) = \frac{\pi}{4\Delta^2\sqrt{\Delta}}\,\frac{1}{t} + \frac{\theta(t)}{t}\,e^{-\frac{K}{t}}.$$

Les symboles $\theta(t)$ et K conservent la signification générale qui leur était attribuée dans l'équation précédente, mais la valeur actuelle de K est la plus petite de celles que K pouvait recevoir dans l'équation précédente par la permutation des i, k.

Cette relation (8) joue un rôle fondamental dans la suite de notre étude. Elle présente cette particularité très remarquable que le premier terme au second membre ne dépend aucunement de α ni de β, mais seulement du déterminant $(-\Delta)$ de la forme quadratique.

§ 3. — *Définition et propriétés de la fonction* $\Phi(t, c)$.

8. *Définition de* $\Phi(t, c)$. — Désignons par c une classe de formes (positives) proprement primitives du déterminant $(-\Delta)$ et soit f un représentant de cette classe :

$$f = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

Nous définirons la fonction $\Phi(t, c)$ par la somme double

$$(9) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \Phi(t, c) = \sum_{x, y} e^{-(ax^2 + 2bxy + cy^2)t},$$

où l'on donne à x et y tous les systèmes de valeurs positives et négatives, pour lesquels f acquiert une valeur impaire et première à Δ. Il est clair, d'après cela, que la définition de $\Phi(t, c)$ ne dépend pas du choix de la forme f dans la classe c.

Il résulte de cette dernière remarque qu'on peut choisir la forme f de manière à simplifier les raisonnements.

On peut d'abord admettre que a est premier avec 2Δ, car, dans le cas contraire, on remplacerait f par une forme équivalente dans laquelle cette condition serait remplie. Ensuite, on peut admettre que b est positif, divisible par Δ et, de plus, pair ou impair en même temps que Δ, de façon que

$$c = \frac{b^2 + \Delta}{a}$$

soit toujours pair et divisible par Δ. En effet, si cette condition n'avait pas lieu, par une substitution

$$\begin{cases} x = x' + \lambda y', \\ y = y', \end{cases}$$

où λ est une inconnue à déterminer convenablement, on remplacerait (a, b, c) par une forme équivalente (a, b', c'), où b' serait positif et déterminé par la congruence

$$b' = b + \lambda a \equiv 0 \pmod{\Delta},$$

à laquelle on ajouterait

$$b' \equiv 1 \pmod{2},$$

si Δ était impair.

La forme f étant choisie de cette manière, il suffit, pour que

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

soit premier à 2Δ, que x soit premier à 2Δ, tandis que y n'est plus soumis à aucune condition.

9. *Réduction de* $\Phi(t, c)$ *aux fonctions* $F(\alpha, \beta, t)$, *propriété fonctionnelle de* $\Phi(t, c)$. — Désignons par α un quelconque des

nombres compris entre 0 et 2Δ et premiers à 2Δ, puis par β un des nombres

$$0, 1, 2, \ldots, 2\Delta - 1,$$

et remarquons que tous les systèmes de valeurs de x, y

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \alpha + 2m\Delta, \\ y = \beta + 2n\Delta, \end{array} \right.$$

obtenus en donnant à m, n toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$, rendront la forme f première à 2Δ; il résulte de là que la somme étendue à toutes ces valeurs, savoir :

$$F(\alpha, \beta, t) = \sum_{m,\, n} e^{-(ax^2 + 2bxy + cy^2)t},$$

contiendra une partie des termes qui entrent dans la somme

$$\Phi(t, c) = \sum_{x,\, y} e^{-(ax^2 + 2bxy + cy^2)t},$$

et que celle-ci sera la somme de $2\Delta\varphi(2\Delta)$ expressions analogues à $F(\alpha, \beta, t)$, obtenues en attribuant à α, β les différents systèmes de valeurs possibles. On a donc

$$(10) \quad \ldots\ldots \quad \Phi(t, c) = \sum_{\alpha,\, \beta} F(\alpha, \beta, t).$$

Pour obtenir la relation fonctionnelle que vérifie $\Phi(t, c)$, il faut donc ajouter $2\Delta\varphi(2\Delta)$ relations analogues à (8) et il vient ainsi :

$$(11) \quad \ldots\ldots \quad \Phi(t, c) = \frac{\pi\varphi(2\Delta)}{2\Delta\sqrt{\Delta}} \frac{1}{t} + \frac{\theta(t)}{t} e^{-\frac{K}{t}}.$$

Comme dans la formule (8), on désigne, en général, par $\theta(t)$ une fonction continue qui tend vers une limite finie quand t tend vers zéro et par K un nombre positif indépendant de t.

§ 4. — *Étude de la fonction* Q(s, c).

10. *Première définition de* Q (s, c). — Soit, comme dans le paragraphe précédent, c une classe proprement primitive du déterminant $(-\Delta)$ et

$$f = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

un représentant de cette classe. Nous définirons, pour $\mathfrak{R}(s) > 1$, la fonction $Q(s, c)$ par la formule

$$(12) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad Q(s, c) = \sum_{x,\,y} \frac{1}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^s},$$

où la somme s'étend, comme dans le paragraphe précédent, à tous les systèmes de valeurs positives et négatives de x et y pour lesquels la forme f est impaire et première à Δ.

La série (12) est absolument et uniformément convergente pour toute valeur de s telle que l'on ait $\mathfrak{R}(s) > 1 + \varepsilon$, quelque petit que soit ε; elle représente donc une fonction synectique de s pour $\mathfrak{R}(s) > 1$. Pour $\mathfrak{R}(s) < 1$, la formule (12) ne représente plus rien, mais nous allons voir que $Q(s, c)$ ne cesse pas d'exister. Nous allons chercher, en effet, une représentation de cette fonction valable dans tout le plan s.

11. *Extension de* Q(s, c) *à tout le plan.* — Posons la relation

$$\frac{\Gamma(s)}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^s} = \int_0^\infty e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)t}\, t^{s-1}\, dt.$$

On en déduit, par une sommation relative à x, y, et pour $\mathfrak{R}(s) > 1$,

$$Q(s, c)\Gamma(s) = \int_0^\infty \Phi(t, c)\, t^{s-1}\, dt.$$

Partageons cette intégrale en deux autres, comme il suit :

$$Q(s, c)\Gamma(s) = \int_1^{\infty} \Phi(t, c) t^{s-1} dt + \int_0^1 \Phi(t, c) t^{s-1} dt.$$

La seconde intégrale se met, par la relation (11), sous la forme

$$\frac{\pi\varphi(2\Delta)}{2\Delta\sqrt{\Delta}} \int_0^1 t^{s-2} dt + \int_0^1 \theta(t) e^{-\frac{K}{t}} t^{s-2} dt.$$

Comme on a $\Re(s) > 1$, on peut évaluer facilement le premier terme; on change ensuite dans le second la variable d'intégration t en $\frac{1}{t}$. On trouve ainsi

$$\int_0^1 \Phi(t, c) t^{s-1} dt = \frac{\pi\varphi(2\Delta)}{2\Delta\sqrt{\Delta}} \frac{1}{s-1} + \int_1^{\infty} \theta\left(\frac{1}{t}\right) e^{-Kt} t^{-s} dt.$$

Substituons cette valeur dans la dernière équation; nous obtenons

$$(13) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{aligned} Q(s, c)\Gamma(s) = \frac{\pi\varphi(2\Delta)}{2\Delta\sqrt{\Delta}} \frac{1}{s-1} + \int_1^{\infty} \Phi(t, c) t^{s-1} dt \\ + \int_1^{\infty} \theta\left(\frac{1}{t}\right) e^{-Kt} t^{-s} dt. \end{aligned} \right.$$

Comme $\theta(\frac{1}{t})$ converge vers une limite finie pour t infini, le second membre converge pour toute valeur de s et fournit, par conséquent, une définition du premier membre valable dans tout le plan.

12. *Propriétés analytiques de* Q(s, c). — La formule (13) nous montre que $Q(s, c)$ est une fonction uniforme de s dans tout le plan, jouissant des propriétés suivantes :

1° Cette fonction possède un pôle unique et simple $s = 1$ et n'a aucun autre point critique;

2° La fonction

$$(s-1)\,Q(s, c)$$

est synectique dans tout le plan et admet comme zéros tous les pôles de $\Gamma(s)$, mais elle peut aussi avoir d'autres racines;

3° Si l'on développe la fonction $(s-1)\,Q(s, c)\,\Gamma(s)$ par la formule de Maclaurin

$$(s-1)\,Q(s, c)\,\Gamma(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_n s^n + \cdots,$$

la loi de décroissance des coefficients est donnée par la formule

$$|\,a_n\,| < \frac{1}{n!}\left[(1+\eta)\,ln\right]^n,$$

où η tend vers zéro pour n infini.

En effet, cette loi est exacte pour chacune des intégrales

$$\int_1^{\infty} \Phi(t, c)\,t^{s-1}dt, \quad \int_1^{\infty} \theta\left(\frac{1}{t}\right) e^{-K't} t^s dt,$$

comme on l'a montré dans la démonstration du théorème du n° 16 de la deuxième partie du mémoire. Cette loi subsistera donc aussi pour la combinaison

$$\frac{\pi\varphi(2\Delta)}{2\Delta\sqrt{\Delta}} + (s-1)\int_1^{\infty} \Phi(t, c)\,t^{s-1}dt + (s-1)\int_1^{\infty} \theta\left(\frac{1}{t}\right) e^{-K't} t^{-s} dt;$$

4° On conclut de cette remarque, comme dans ce théorème du n° 16 que nous venons de rappeler, que la fonction $(s-1)$ $Q(s, c)\,\Gamma(s)$ et par suite aussi que *la fonction entière*

$$(s-1)\,Q(s, c)$$

ne peuvent être d'un genre supérieur au premier;

5° Une dernière remarque importante est celle-ci : Le résidu de $Q(s, c)$ correspondant au pôle $s = 1$ a pour valeur

$$\frac{\pi\varphi(2\Delta)}{2\Delta\sqrt{\Delta}}$$

et il dépend exclusivement du déterminant $(-\Delta)$ et nullement de la classe c. C'est là un fait très remarquable, sur lequel repose au fond la méthode de Dirichlet pour l'évaluation du nombre des classes, et qui va jouer encore un rôle essentiel dans la suite.

CHAPITRE II.

THÉORÈME DE DIRICHLET : INFINITÉ DES NOMBRES PREMIERS REPRÉSENTABLES PAR UNE FORME QUADRATIQUE.

---

§ 1. — *Définition et propriétés des caractères de classes.*

13. Toutes les classes (positives) proprement primitives du déterminant $(-\Delta)$ forment, comme on le sait, un groupe et peuvent s'obtenir chacune une seule fois, au moyen de certaines classes fondamentales :

$$c_1, c_2, \dots c_r$$

appartenant respectivement aux exposants

$$m_1, m_2, \dots m_r,$$

en formant le produit

$$(1) \quad \dots\dots\dots \quad c = c_1^{h_1} c_2^{h_2} \dots c_r^{h_r},$$

où l'expression c_i^0 d'exposant nul représente la classe principale et où l'on donne aux exposants $h_1, h_2 \dots h_r$ toutes les valeurs comprises dans le tableau

$$\begin{aligned} h_1 &= 0, 1, 2, \dots, m_1 - 1 ; \\ h_2 &= 0, 1, 2, \dots, m_2 - 1 ; \\ &\dots\dots\dots \\ h_r &= 0, 1, 2, \dots, m_r - 1. \end{aligned}$$

Soient maintenant $w_1, w_2, \dots, w_r$ des racines quelconques des

équations

(2) . . . . . $w_1^{m_1} = 1, \quad w_2^{m_2} = 1, \ldots w_r^{m_r} = 1;$

nous dirons que le produit

$$k(c) = w_1^{h_1} w_2^{h_2} \ldots w_r^{h_r}$$

est un *caractère* de la classe c. Le nombre de ces caractères sera égal à celui des racines des équations (2), c'est-à-dire au nombre des classes positives proprement primitives. Nous représenterons ce nombre par h :

$$h = m_1 m_2 \ldots m_r.$$

Il est clair que ces définitions supposent qu'il y ait plusieurs classes de formes du déterminant $(-\Delta)$. L'analyse que nous allons faire n'a d'objet que dans cette hypothèse.

14. Les caractères de classes jouissent de propriétés analogues à ceux des caractères d'un nombre (mod. M).

Nous nommerons *caractère principal* celui qui correspond aux racines des équations (2), toutes égales à l'unité

$$w_1 = 1, \quad w_2 = 1, \ldots, w_r = 1;$$

nous le représenterons par k_0.

Nous dirons que les deux caractères

$$k(c) \quad \text{et} \quad \frac{1}{k(c)} = \frac{1}{k}(c),$$

formés respectivement avec les racines conjuguées

$$w_1, \quad w_2, \ldots, w_r,$$
$$\frac{1}{w_1}, \quad \frac{1}{w_2}, \ldots, \frac{1}{w_r},$$

sont conjugués ou opposés. Un caractère qui coïncide avec son opposé (caractère ambigu) ne peut être formé que de racines réelles des équations (2).

On démontre, exactement comme dans le cas des caractères d'un nombre, que les caractères de classes jouissent des propriétés suivantes :

1° Pour tout caractère particulier k, la somme étendue à toutes les classes (positives) proprement primitives est nulle :

$$\sum_{c} k(c) = 0,$$

sauf pour le caractère principal, auquel cas elle est égale au nombre des classes :

$$\sum_{c} k_0(c) = h;$$

2° Pour toute classe c, la somme étendue à tous les caractères est nulle :

$$\sum_{k} k(c) = 0,$$

sauf pour la classe principale, auquel cas elle est égale au nombre des classes :

$$\sum_{k} k(c^0) = h;$$

3° Pour un même caractère k et deux classes quelconques c et c', on a la relation

$$k(c)k(c') = k(cc').$$

15. Nous allons passer maintenant à une propriété plus particulière des caractères de classes.

Désignons par m un nombre quelconque impair et premier à Δ dont le déterminant $(-\Delta)$ est résidu quadratique. Ce nombre m sera proprement représentable par une forme du déterminant $(-\Delta)$.

Si ϖ désigne le nombre des facteurs premiers différents de m, la congruence

$$z^2 \equiv -\Delta \pmod{m}$$

aura 2^ϖ racines distinctes. A chacune d'elles correspond un groupe de représentations du nombre m par des formes du déterminant $(-\Delta)$. En outre, ces représentations se font dans une série de classes qu'il est facile de figurer. Soit

$$m = \alpha^p \beta^q \gamma^r \dots,$$

décomposé en ses facteurs premiers et représentons par

$$c_\alpha, \quad c_\beta, \quad c_\gamma, \dots$$

respectivement une des deux classes opposées capables de représenter $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ Les 2^ϖ groupes de représentations de m se feront respectivement dans les 2^ϖ classes c_m, figurées par les termes du produit développé (*)

$$c_\alpha^{-p} c_\beta^{-q} c_\gamma^{-r} \dots (1 + c_\alpha^{2p})(1 + c_\beta^{2q})(1 + c_\gamma^{2r}) \dots,$$

parmi lesquelles plusieurs peuvent coïncider, mais il n'y a pas lieu de tenir compte de cette circonstance pour le moment.

Désignons par $k(c)$ un caractère correspondant à un choix particulier de racines des équations (2) et par

$$\Sigma\, k(c_m)$$

une somme relative à ce caractère mais étendue aux 2^ϖ classes c_m, différentes ou non, ci-dessus définies. Cette somme jouira de la propriété fondamentale suivante :

On a, pour deux nombres m *et* m' *premiers entre eux,*

$$\Sigma\, k(c_m)\, \Sigma\, k(c_{m'}) = \Sigma\, k(c_{mm'}).$$

On vérifie immédiatement cette propriété, en remarquant que, si l'on pose symboliquement

$$\Sigma\, c_m = c_\alpha^{-p} c_\beta^{-q} c_\gamma^{-r} \dots (1 + c_\alpha^{2p})(1 + c_\beta^{2q})(1 + c_\gamma^{2r}) \dots,$$

(*) Voir, sur ce point, nos *Recherches arithmétiques sur la composition des formes binaires quadratiques.* (MÉMOIRES IN-8° DE L'ACAD. ROYALE DE BELGIQUE, t. LIII, 1896.)

on peut aussi écrire symboliquement, en convenant d'effectuer toutes les multiplications indiquées,

$$\Sigma\, k(c_m) = k\, \Sigma\, c_m.$$

La propriété indiquée est alors la conséquence immédiate des deux relations, dont la première seule est symbolique :

$$\Sigma\, c_{mm'} = \Sigma\, c_m\, \Sigma\, c_{m'}, \quad k(cc') = k(c)\, k(c').$$

§ 2. — *Démonstration d'une équation fondamentale.*

16. Posons, pour un instant,

$$f(m) = \frac{\Sigma k\,(c_m)}{m^s};$$

en vertu de la propriété qui fait l'objet du numéro précédent, on aura, pour m et m' premiers entre eux,

$$f(m)\, f(m') = f(mm').$$

Il vient ainsi, d'après une formule générale due à Euler (*),

$$(4) \quad . \; . \; . \quad \sum_m \frac{\Sigma k\,(c_m)}{m^s} = \prod_q (1 + f(q) + f(q^2) + \cdots).$$

La somme du premier membre s'étend à tous les nombres impairs m dont $(-\Delta)$ est résidu ; le produit du second membre, à tous les nombres premiers impairs q dont $(-\Delta)$ est résidu quadratique ; enfin, on suppose $\mathfrak{R}\,(s) > 1$, pour que les expressions soient convergentes.

Rappelons-nous maintenant que, pour ces nombres premiers

(*) Bachmann, *Die analytische Zahlentheorie*, p. 10, form. 17

q ou leurs puissances q^λ, la somme

$$\Sigma\, k(c_q\lambda) = k(c_q)^\lambda + k(c_q^{-1})^\lambda$$

se réduit à deux termes; il vient

$$f(q^\lambda) = \left[k(c_q)^\lambda + k(c_q^{-1})^\lambda\right] \frac{1}{q^{\lambda s}},$$

et le facteur général du produit infini se met sous la forme

$$\begin{aligned} 1 + q^{-s}\left[k(c_q) + k(c_q^{-1})\right] + q^{-2s}\left[k(c_q)^2 + k(c_q^{-1})^2\right] + \cdots \\ = -1 + \left[1 + q^{-s}k(c_q) + q^{-2s}k(c_q)^2 + \cdots\right] \\ + \left[1 + q^{-s}k(c_q^{-1}) + q^{-2s}k(c_q^{-1})^2 + \cdots\right], \end{aligned}$$

c'est-à-dire, par la sommation de ces deux progressions,

$$-1 + \frac{1}{1 - q^{-s}k(c_q)} + \frac{1}{1 - q^{-s}k(c_q^{-1})},$$

et, en réduisant au même dénominateur,

$$\frac{1 - q^{-2s}}{[1 - q^{-s}k(c_q)][1 - q^{-s}k(c_q^{-1})]}.$$

L'équation (4) se met ainsi sous la forme

$$(5) \quad \ldots \quad \sum_m \frac{\Sigma\, k(c_m)}{m^s} = \prod_q \frac{1 - q^{-2s}}{[1 - q^{-s}k(c_q)][1 - q^{-s}k(c_q^{-1})]}.$$

Dans cette équation (5), la somme s'étend aux mêmes nombres m et le produit aux mêmes nombres q que dans (4), c'est-à-dire aux nombres impairs dont $(-\Delta)$ est résidu quadratique.

17. On peut reproduire la somme qui figure aux premiers membres des équations (4) et (5) par une autre voie. Soient, en effet,

$$f_1,\ f_2, \ldots\ f_h$$

des représentants respectifs des classes

$$c_1, c_2, \ldots c_h,$$

positives et proprement primitives du déterminant (— Δ), dont le nombre sera désigné par h; formons l'expression

$$(6) \qquad \Lambda(s,k) = k(c_1)\sum{}' \frac{1}{f_1^s} + k(c_2)\sum{}' \frac{1}{f_2^s} + \cdots + k(c_h)\sum{}' \frac{1}{f_h^s},$$

où la somme relative à l'une quelconque des formes f_i s'étend à tous les systèmes de valeurs de x et y positives ou négatives, *premières entre elles*, pour lesquelles

$$f_i = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

acquiert une valeur impaire première à Δ. Soit alors τ le nombre des solutions de l'équation de Pell, on aura de la même manière qu'on obtient l'équation correspondante dans la détermination du nombre de classes (*)

$$\Lambda(s,k) = \tau \sum_m \frac{\Sigma k(c_m)}{m^s},$$

et, en vertu de l'équation (5),

$$(7) \quad . \quad . \quad \Lambda(s,k) = \tau \prod_q \frac{1 - q^{-2s}}{[1 - q^{-s}k(c_q)][1 - q^{-s}k(c_q^{-1})]}.$$

18. Il y a encore une dernière transformation à faire subir à cette équation. Désignons, en général, par p les nombres premiers impairs dont (— Δ) est non-résidu et par n les nombres entiers quelconques, premiers à 2Δ; on aura

$$\sum_n \frac{1}{n^{2s}} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-2s}} \prod_q \frac{1}{1 - q^{-2s}}.$$

Si l'on multiplie membre à membre cette équation avec la

(*) Dirichlet-Dedekind, *Zahlentheorie*, 4e édition, § 88.

précédente, on trouve enfin l'ÉQUATION FONDAMENTALE :

$$(8) \quad . \quad . \quad L(s, k) = P(s) \prod_q \frac{1}{[1 - q^{-s}k(c_q)]\,[1 - q^{-s}k(c_q^{-1})]}.$$

Dans cette relation on a posé, en abrégé,

$$(9) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad P(s) = \tau \prod_p \frac{1}{1 - p^{-2s}},$$

$$(10) \quad L(s, k) = k(c_1) \sum \frac{1}{f_1^s} + k(c_2) \sum \frac{1}{f_2^s} + \cdots + k(c_h) \sum \frac{1}{f_h^s}.$$

Mais les nouvelles sommes Σf_i^{-s} qui entrent dans l'expression (10) de L (s, k) diffèrent de celles qui entrent dans l'expression (6) de $\Lambda(s, k)$: on doit maintenant attribuer à x et y tous les systèmes de valeurs entières, positives ou négatives, qui donnent à la forme correspondante

$$f_i = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

une valeur impaire et première à Δ. Donc, dans l'expression (10) de L (s, k), on a (n° 10)

$$\Sigma f_i^{-s} = Q(s, c_i),$$

et L (s, k) se met sous la forme

$$(11) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad L(s, k) = \sum_{i=1}^{h} k(c_i) Q(s, c_i).$$

Il est à remarquer que les fonctions $L(s, k)$ qui correspondent à deux caractères opposés k et k^{-1} sont identiques. Il suffit, pour le constater, d'observer qu'on a, dans la formule (8), $k(c_q^{-1}) = k^{-1}(c_q)$.

§ 3. — *Propriétés analytiques des fonctions* L (s, k).

19. Les fonctions L (s, k) correspondent exactement aux fonctions Z (s, χ) de la deuxième partie du mémoire : comme celles-

ci, elles jouissent de propriétés différentes suivant qu'on a affaire au caractère principal ou à un autre caractère :

1° Dans le cas du caractère principal, on a $k_0(c_i) = 1$, et la fonction

$$L(s, k_0) = \sum_{i=1}^{h} Q(s, c_i)$$

admet le même pôle $s = 1$ que les fonctions Q; elle n'a aucun autre point critique, et la fonction

$$(s - 1)L(s, k_0)$$

est entière dans toute l'étendue du plan.

2° Dans le cas d'un autre caractère, comme le résidu relatif au pôle $s = 1$ est le même pour toutes les fonctions $Q(s, c_i)$ et que la somme des caractères relatifs aux différentes classes est nulle, on voit que le pôle $s = 1$ disparaît pour la fonction

$$L(s, k) = \sum_{i=1}^{h} k(c_i) Q(s, c_i),$$

qui est entière dans tout le plan.

20. *Développement de* $(s - 1) L(s, k) \Gamma(s)$ *par la formule de Maclaurin; genre de cette fonction.* — Si l'on développe la fonction

$$(s - 1)L(s, k)\Gamma(s) = \sum_{i=1}^{h} k(c_i)(s - 1)Q(s, c_i)\Gamma(s),$$

par la formule de Maclaurin sous la forme

$$a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_n s^n + \cdots,$$

la loi de décroissance des coefficients sera exprimée par l'inégalité

$$|a_n| < \frac{1}{n!}\left[(1 + \eta) l n\right]^n,$$

car cette loi est vraie (12,3°) pour chacune des fonctions

$(s-1)\,Q(s, c_i)\,\Gamma(s)$, qui figurent au second membre de la dernière équation.

Cette loi, ainsi qu'on l'a vu dans la démonstration du n° 16 de la seconde partie, nous permet d'affirmer que les fonctions entières $(s-1)\,L(s, k)\,\Gamma(s)$ ne peuvent être d'un genre supérieur au premier. Leur produit par la fonction du premier genre $1 : \Gamma(s)$ seront donc du premier genre. D'où la conclusion suivante :

Les fonctions $(s-1)\,L(s, k_0)$, *dans le cas du caractère principal, et* $L(s, k)$ *dans le cas d'un autre caractère, sont des fonctions entières du premier genre.*

21. *Étude des zéros des fonctions* $L(s, k)$. — La loi de croissance des modules des racines successives des fonctions $L(s, k)$ serait difficile à déterminer avec précision ; mais on obtient, sans peine, le seul résultat qui nous soit utile et qui peut s'énoncer comme il suit :

Si l'on représente, en général, par $\rho(k)$ *les zéros de la fonction* $L(s, k)$, *la série*

$$\sum_\rho \frac{1}{[\rho(k)]^m}$$

sera absolument convergente pour $m > 1$.

En effet, cette propriété est exacte pour la série étendue à tous les zéros de $(s-1)\,L(s, k)\,\Gamma(s)$, en vertu de la loi de décroissance des coefficients a_n étudiée au numéro précédent ; elle est exacte aussi pour la série étendue aux zéros de $1 : \Gamma(s)$; elle subsiste donc pour la série étendue aux zéros des deux fonctions simultanément, c'est-à-dire à ceux de $L(s, k)$.

Un second point important relatif aux zéros résulte de l'expression de $L(s, k)$ en produit infini par la formule (8). Ce produit est absolument convergent et aucun de ses termes ne peut s'annuler pour $\mathcal{R}(s) > 1$, donc : *Aucune racine* $\rho(k)$ *n'a sa partie réelle supérieure à l'unité.*

Il reste encore à démontrer qu'aucun de ces zéros n'a sa partie réelle égale à l'unité. C'est là un point plus difficile. Nous commencerons par démontrer, par une méthode nouvelle et très simple, qu'aucune des fonctions $L(s, k)$ ne s'annule pour $s = 1$.

§ 4. — *Aucune des fonctions* L(s, k) *ne s'annule pour* s = 1.

22. Prenons les dérivées logarithmiques des deux membres de l'équation fondamentale (8) et changeons les signes. Il vient

$$(12) \quad . \; . - \frac{L'(s,k)}{L(s,k)} + \frac{P'(s)}{P(s)} = \sum_q \frac{k(c_q)lq}{q^s - k(c_q)} + \sum_q \frac{k(c_q^{-1})lq}{q^s - k(c_q^{-1})}.$$

La fonction P (s) n'a ni pôles ni zéros pour $\Re(s) > \frac{1}{2}$, comme le montre sa définition par la formule (9). Donc, si l'on multiplie l'équation précédente par (s — 1) on trouve, sans difficulté, en faisant tendre s vers l'unité,

$$(13) \quad -\lim_{s=1}(s-1)\frac{L'(s,k)}{L(s,k)} = \lim_{s=1}(s-1)\sum_q \left[k(c_q) + k(c_q^{-1})\right]\frac{lq}{q^s}.$$

23. Étudions les valeurs que peut avoir le premier membre. Si $k = k_0$ est le caractère principal, le premier membre est égal à l'unité; dans le cas d'un autre caractère, il sera égal à zéro, sauf si $s = 1$ est un zéro d'ordre de multiplicité μ pour la fonction L (s, k), auquel cas le premier membre est égal à ($-\mu$).

Ajoutons toutes les équations qui se déduisent de la précédente en attribuant successivement aux caractères toutes leurs valeurs, nous obtiendrons une équation finale dont on simplifie facilement les deux membres.

Le premier membre sera, d'après ce qui vient d'être dit, égal à

$$1 - \Sigma\mu,$$

en désignant par $\Sigma\mu$ la somme des ordres de multiplicité des zéros $s = 1$ pour les fonctions successives L (s, k) qui s'annulent pour cette valeur de s.

Le second membre se simplifie aussi, car

$$\sum_k k(c_q) = \sum_k k(c_q^{-1}) = 0,$$

sauf cependant pour les nombres premiers q_0 représentables par la classe principale et pour lesquels

$$\sum_k k(c_{q_0}) = \sum_k k(c_{q_0}^{-1}) = h.$$

Notre équation finale se réduit donc à

$$1 - \Sigma \mu = 2h \lim_{s=1} (s-1) \sum_{q_0} \frac{lq_0}{q_0^s}.$$

Pour s réel et > 1, le second membre est essentiellement positif. Donc $\Sigma\mu$ est égal à *zéro* ou à *un* et il n'y a que deux hypothèses possibles :

1° Aucune fonction $L(s, k)$ ne s'annule pour $s = 1$;

2° Une seule des fonctions successives $L(s, k)$, obtenues par la variation du caractère k, s'annule pour $s = 1$ et elle ne peut admettre, dans cette hypothèse, qu'un zéro simple.

24. Plaçons-nous dans la seconde hypothèse, pour en démontrer l'impossibilité.

On voit d'abord que si $L(s, k)$ s'annule pour $s = 1$, le caractère k est nécessairement réel (c'est-à-dire formé d'un produit de racines réelles), sinon, la fonction $L(s, k^{-1})$, qui est identique à $L(s, k)$ (n° 8), s'annulant aussi pour $s = 1$, il y aurait deux fonctions successives admettant cette racine, ce qui est impossible, comme on l'a montré au numéro précédent.

Donc, si une fonction $L(s, k)$ s'annule pour $s = 1$, on aura $k(c) = k(c^{-1})$ et la formule (8) du n° 18 donnera

$$L(s, k) = P(s) \prod_q \left(1 - \frac{k(c_q)}{q^s}\right)^{-2}.$$

Désignons, pour un instant, par q_1 les nombres q pour lesquels $k(c_q) = +1$, par q_2 ceux pour lesquels $k(c_q) = -1$ et raisonnons sur $L(s, k)$ comme sur $Z(s, \chi)$ au n° 67 de la seconde partie, nous trouverons d'abord

$$(14) \quad . \quad . \quad . \quad L(s, k) = P(s) \prod_{q_1} \left(\frac{1 + q_1^{-s}}{1 - q_1^{-s}}\right)^2 \frac{L(2s, k_0)}{L(s, k_0)}.$$

Donc, si l'on remplace $P(s)$ par sa valeur et si l'on pose

$$\text{(II)} \quad \ldots \quad \psi(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-2s}} \prod_{q_1} \left(\frac{1 + q_1^{-s}}{1 - q_1^{-s}} \right)^2,$$

il viendra, par la formule (14),

$$\text{(III)} \quad \ldots \quad \psi(s) = \frac{L(s, k)\, L(s, k_0)}{L(2s, k_0)}.$$

Or, en substituant L à Z, on peut raisonner sur les formules II et III comme sur les formules (2) et (3) du n° 67 de la seconde partie. Donc il est impossible que $L(s, k)$ s'annule pour $s = 1$.

§ 5. — *Démonstration du théorème de Dirichlet.*

25. La première hypothèse du n° 23 étant la seule possible, reprenons l'équation (13) et multiplions-la par $k(c)$, ce qui donne

$$- k(c^{-1}) \lim_{s=1} (s - 1) \frac{L'(s, k)}{L(s, k)} = \lim_{s=1} (s - 1) \sum_q \left[k(c_q c^{-1}) + k(c_q^{-1} c^{-1}) \right] \frac{lq}{q^s};$$

le premier membre sera nul, sauf dans le cas du caractère principal ou il est égal à *un*. Ajoutons toutes les équations qui se déduisent de la précédente par l'échange des caractères et rappelons-nous que les deux sommes

$$\sum_k k(c_q c^{-1}) \quad \text{et} \quad \sum_k k(c_q^{-1} c^{-1})$$

s'annulent respectivement, sauf si $c = c_q$ pour la première ou si $c = c_q^{-1}$ pour la seconde, auxquels cas elles sont respectivement égales à h; il viendra, en désignant en général par q_c les nombres premiers représentables par la classe c :

1° Si c est une classe bilatérale (*) (ambiguë) auquel cas $c = c^{-1}$,

$$\text{(15}^a\text{)} \quad \ldots \quad 2h \lim_{s=1} (s - 1) \sum \frac{lq_c}{q_c^s} = 1;$$

(*) Je me sers du terme *bilatérale* comme traduction du terme *zweiseitige* proposé par M. Dedekind.

2° Si c n'est pas une classe bilatérale,

$$(15^b) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad h \lim_{s=1} (s-1) \sum \frac{lq_c}{q_c^s} = 1.$$

Ces formules renferment une démonstration nouvelle et plus précise du théorème de Dirichlet. Elles nous permettent, en effet, d'énoncer le résultat suivant :

Toute forme proprement primitive du déterminant négatif ($-\Delta$) *peut représenter une infinité de nombres premiers.*

La fréquence des nombres premiers ainsi représentables n'est pas la même pour toutes les classes de formes. Elle est la même pour toutes les formes appartenant à des classes bilatérales, la même aussi pour toutes les formes appartenant à des classes non bilatérales, mais elle est moitié moindre dans le premier cas que dans le second. Nous allons donner à ce résultat une expression plus précise encore au chapitre suivant.

CHAPITRE III.

COMPLÉMENT DU THÉORÈME DE DIRICHLET : FRÉQUENCE DES NOMBRES PREMIERS DANS CHAQUE CLASSE.

---

§ 1. — *Les fonctions* L(s, k) *n'ont pas de racines de la forme* 1 + βi (*).

26. Revenons à l'équation (12), établie pour $\mathfrak{R}\, s > 1$,

$$-\operatorname{D}\log \operatorname{L}(s,k) = -\frac{\operatorname{P}'(s)}{\operatorname{P}(s)} + \sum_q \frac{k(c_q)lq}{q^s - k(c_q)} + \sum_q \frac{k(c_q^{-1})lq}{q^s - k(c_q^{-1})}.$$

Multiplions cette équation par $s - 1 - \beta i$, β étant réel et différent de zéro; puis faisons tendre s vers $1 + \beta i$. Il viendra, en

(*) Nous avons légèrement modifié la rédaction dont le résumé a paru dans le *Bulletin*, pour tenir compte de la modification correspondante apportée à la seconde partie.

négligeant au second membre des termes dont la limite est visiblement nulle,

$$-\lim_{s=1+\beta i}(s-1-\beta i)\,\mathrm{D}\log \mathrm{L}(s,k)=\lim_{s=1+\beta i}(s-1-\beta i)\sum_q \left[k(c_q)+k(c_q^{-1})\right]\frac{lq}{q^s}.$$

Le premier membre de cette équation est égal à zéro, si le point $1+\beta i$ n'est pas un zéro de $\mathrm{L}(s,k)$. Si ce point est au contraire un zéro, le premier membre est égal à $-\lambda$, en désignant par λ l'ordre de multiplicité du zéro.

27. Ajoutons ensemble toutes les équations qui se déduisent de la précédente en attribuant aux caractères toutes leurs valeurs. Le second membre de l'équation ainsi obtenue se simplifie, parce que la somme des caractères est nulle, sauf pour les nombres premiers q_0 représentables par la classe principale. Pour ceux-ci, cette somme est égale à h. On trouve donc

$$-\Sigma\,\lambda = 2h\lim_{s=1+\beta i}(s-1-\beta i)\sum_{q_0}\frac{lq_0}{q_0^s}.$$

Au premier membre, $\Sigma\lambda$ désigne la somme des ordres de multiplicité des zéros $s=1+\beta i$, pour les différentes fonctions qui s'annulent; au second membre, la somme s'étend aux nombres premiers q_0 représentables par la classe principale.

L'équation précédente peut aussi s'écrire sous la forme

$$-\Sigma\,\lambda = 2h\lim_{s=1}(s-1)\sum_{q_0}\frac{lq_0}{q_0^{s+\beta i}}.$$

Comparons cette équation à la suivante

$$1 = 2h\lim_{s=1}(s-1)\sum\frac{lq_0}{q_0^s},$$

qui est un cas particulier de l'équation (15*) du n° 25. Nous pouvons raisonner sur ces deux équations comme on l'a fait sur les équations (2) et (3) aux n°s 71 et 72 de la seconde partie. On doit nécessairement en conclure $\Sigma\lambda=0$. Par conséquent, aucune des fonctions $\mathrm{L}(s,k)$ ne s'annule, pour $s=1+\beta i$.

§ 2. — *Démonstration et cas particuliers de deux formules générales.*

28. Reprenons encore une fois l'équation (12) du chapitre précédent

$$-\operatorname{D}\log \operatorname{L}(s,k) = -\frac{\operatorname{P}'(s)}{\operatorname{P}(s)} + \sum_q \frac{k(c_q)\, lq}{q^s - k(c_q)} + \sum_q \frac{k(c_q^{-1})\, lq}{q^s - k(c_q^{-1})}.$$

Multiplions les deux membres par

$$\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)},$$

intégrons de $(a - bi)$ à $(a + bi)$ et faisons tendre b vers l'infini.

Nous supposerons que a est > 1 et que u et v ne sont pas des pôles de $\operatorname{D}\log \operatorname{L}(s, k)$. Il vient, dans ces conditions,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a-\infty i} \operatorname{D}\log \operatorname{L}(s,k)\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)} &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{\operatorname{P}'(s)}{\operatorname{P}(s)}\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)} \\ &+ \frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \sum \frac{k(c_q)\, lq}{q^s - k(c_q)}\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)} \\ &+ \frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \sum \frac{k(c_q^{-1})\, lq}{q^s - k(c_q^{-1})}\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)}. \end{aligned}\right.$$

29. Évaluons d'abord le second membre. Si l'on remarque que l'on a

$$-\frac{\operatorname{P}'(s)}{\operatorname{P}(s)} = 2\sum_p \frac{lp}{p^{2s}-1} = 2\sum_p \frac{lp}{p^{2s}} + 2\sum_p \frac{lp}{p^{4s}} + \cdots,$$

$$\sum_q \frac{k(c_q)\, lq}{q^s - k(c_q)} = \sum \frac{k(c_q)\, lq}{q^s} + \sum \frac{k(c_q^2)\, lq}{q^{2s}} + \cdots,$$

on trouve, en reproduisant les raisonnements du n° (74) de la deuxième partie du Mémoire, que ce second membre peut se mettre sous la forme

$$\frac{2}{u-v}\left[y^u \sum_{p^{2m}<y} \frac{lp}{p^{2mu}} - y^v \sum_{p^{2m}<y} \frac{lp}{p^{2mv}}\right]$$

$$+\frac{y^u}{u-v}\sum_{q^m<y}\left[k(c_q^m)+k(c_q^{-m})\right]\frac{lq}{q^{mu}}-\frac{y^v}{u-v}\sum_{q^m<y}\left[k(c_q^m)+k(c_q^{-m})\right]\frac{lq}{q^{mv}},$$

les sommes de la première ligne s'étendant à toutes les puissances paires p^{2m}, inférieures à y, des nombres premiers p; celles de la seconde ligne à toutes les puissances entières q^m, inférieures à y, des nombres premiers q.

30. Passons à l'évaluation de l'intégrale du premier membre. Il y a deux cas à distinguer : 1° Dans le cas du caractère principal, on peut raisonner sur $L(s, k_0)$ comme sur $Z(s, \chi_0)$ dans la seconde partie (n° 74); 2° dans le cas d'un autre caractère, on peut raisonner sur $L(s, k)$ comme sur $Z(s, \chi)$. Il suffit donc de changer Z en L et χ en k dans les résultats, c'est-à-dire dans les formules (4) et (5) du n° 74 de la seconde partie.

31. *Formules générales.* — En définitive, l'équation (1) se transformera dans l'une des deux suivantes :

1° Dans le cas du caractère principal,

$$(2^a)\quad \begin{cases} 2\left[y^u \sum_{q^m<y}\frac{lq}{q^{mu}} - y^v \sum_{q^m<y}\frac{lq}{q^{mv}} + y^u \sum_{p^{2m}<y}\frac{lp}{p^{2mu}} - y^v \sum_{p^{2m}<y}\frac{lp}{p^{2mv}}\right] \\ \qquad = -\,y^u\frac{L'(u,k_0)}{L(u,k_0)} + y^v\frac{L'(v,k_0)}{L(v,k_0)} \\ \qquad + \frac{u-v}{(u-1)(v-1)}y - (u-v)\sum_{\rho(k_0)}\frac{y^\rho}{(u-\rho)(v-\rho)}; \end{cases}$$

2° Dans le cas d'un autre caractère,

$$(2^b)\quad \begin{cases} y^u \sum\limits_{q^m<y} \left[k(c_q^m) + k(c_q^{-m})\right] \dfrac{lq}{q^{mu}} - y^v \sum\limits_{q^m<y} \left[k(c_q^m) + k(c_q^{-m})\right] \dfrac{lq}{q^{mv}} \\ + 2\left[y^u \sum\limits_{p^{2m}<y} \dfrac{lp}{p^{2mu}} - y^v \sum\limits_{p^{2m}<y} \dfrac{lp}{p^{2mv}}\right] \\ = -y^u \dfrac{L'(u,k)}{L(u,k)} + y^v \dfrac{L'(v,k)}{L(v,k)} - (u-v) \sum\limits_{\rho(k)} \dfrac{y^\rho}{(u-\rho)(v-\rho)}. \end{cases}$$

32. *Premier cas particulier :* $v = 0$, $\Re(u) = 1$. — Si l'on pose $v = 0$ dans les équations précédentes et si l'on suppose que la partie réelle de u soit égale à l'unité, on peut simplifier les équations précédentes de la même manière que les équations correspondantes dans la seconde partie du Mémoire (n°ˢ 76 et 77). On trouvera évidemment, en désignant par ε une quantité qui tend vers zéro quand y tend vers l'infini :

1° Dans le cas du caractère principal,

$$(3^a)\quad . \ . \quad \begin{cases} 2\left[\sum\limits_{q<y} \dfrac{lq}{q^u - 1} - \dfrac{1}{y^u} \sum\limits_{q<y} lq\right] + 2 \sum\limits_{p^2<y} \dfrac{lp}{p^{2u} - 1} \\ = -\dfrac{L'(u,k_0)}{L(u,k_0)} + \dfrac{u}{1-u} y^{1-u} + \varepsilon; \end{cases}$$

2° Dans le cas d'un autre caractère,

$$(3^b)\quad . \ . \quad \begin{cases} \sum\limits_{q<y} \dfrac{k(c_q)}{q^u - k(c_q)} + \sum\limits_{q<y} \dfrac{k(c_q^{-1})}{q^u - k(c_q^{-1})} \\ - \dfrac{1}{y^u} \sum\limits_{q<y} \left[k(c_q) + k(c_q^{-1})\right] lq + 2 \sum\limits_{p^2<y} \dfrac{lp}{p^{2u} - 1} \\ = -\dfrac{L'(u,k)}{L(u,k)} + \varepsilon. \end{cases}$$

33. *Deuxième cas particulier :* $u = 1$. — Faisons $u = 1$ dans les équations précédentes. On pourra en simplifier l'écriture, en désignant par $\mathfrak{L}$ des quantités qui convergent vers des limites

finies pour y infini. On trouve ainsi, comme aux n°s 78 et 79 de la deuxième partie :

1° Dans le cas du caractère principal,

$$(4^a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2\left[\sum_{q<y} \frac{lq}{q} - \frac{1}{y}\sum_{q<y} lq\right] = ly + \mathcal{L};$$

2° Pour un autre caractère,

$$(4^b) \qquad \sum_{q<y} \left[k(c_q) + k(c_q^{-1})\right] \frac{lq}{q} - \frac{1}{y}\sum_{q<y} \left[k(c_q) + k(c_q^{-1})\right] lq = \mathcal{L}.$$

34. *Combinaison des équations précédentes.* — Soit c une classe quelconque, positive et proprement primitive. Multiplions (4^b) par $k(c^{-1})$; cette équation devient

$$(5) \qquad \sum_{q<y} \left[k(c_q c^{-1}) + k(c_q^{-1} c^{-1})\right] \frac{lq}{q} - \frac{1}{y}\sum_{q<y} \left[k(c_q c^{-1}) + k(c_q^{-1} c^{-1})\right] lq = \mathcal{L},$$

sauf dans le cas du caractère principal où l'on retombe sur (4^a). Ajoutons ensemble toutes les équations qui se déduisent de (5) par l'échange des caractères entre eux. Comme la somme

$$\underset{k}{\mathrm{S}} \left[k(c_q c^{-1}) + k(c_q^{-1} c^{-1})\right] = 0,$$

sauf pour les nombres premiers q_c représentables par la classe c ou la classe c^{-1}, auquel cas cette somme est égale

à $2h$, si $c = c^{-1}$ est une classe bilatérale;
à h, si c n'est pas une classe bilatérale,

on trouve l'une des deux équations suivantes :

1° Si c est une classe bilatérale,

$$(6^a) \quad . \quad . \quad . \quad 2h\left[\sum_{q_c<y} \frac{lq_c}{q_c} - \frac{1}{y}\sum_{q_c<y} lq_c\right] = ly + \mathcal{L};$$

2° Dans le cas contraire,

$$(6') \quad . \quad . \quad . \quad h\left[\sum_{q_c<y} \frac{lq_c}{q_c} - \frac{1}{y}\sum_{q_c<y} lq_c\right] = ly + \mathfrak{X}.$$

§ 3. — *Conséquences asymptotiques des formules du paragraphe précédent.*

35. Les équations (6) sont identiques de forme à celle sur lesquelles nous avons raisonné au chapitre IV de la première partie ou au n° (80) de la seconde. Elles conduisent donc respectivement aux conclusions correspondantes :

1° *Si l'on désigne par* h *le nombre des formes positives proprement primitives du déterminant* (— Δ), *les expressions*

$$\frac{2h}{y}\sum_{q_c<y} lq_c, \quad \textit{si c est une classe bilatérale ;}$$

$$\frac{h}{y}\sum_{q_c<y} lq_c, \quad \textit{dans le cas contraire,}$$

expressions où les sommes s'étendent aux nombres premiers < y *et représentables par la classe* c *ont pour limite l'unité quand* y *tend vers l'infini.*

2° *Les différences correspondantes*

$$2h\sum_{q_c<y} \frac{lq_c}{q_c} - ly \quad \text{ou} \quad h\sum_{q_c<y} \frac{lq_c}{q_c} - ly,$$

tendent vers des limites finies et déterminées quand y *tend vers l'infini;*

3° *Le nombre des nombres premiers* < y *et représentable par la classe* c *a pour expression asymptotique*

$$\frac{1+\varepsilon}{2h}\frac{y}{ly} \quad \text{ou} \quad \frac{1+\varepsilon}{h}\frac{y}{ly},$$

suivant que c *est une classe bilatérale ou non,* ε *désignant une quantité qui tend vers zéro pour* y *infini.*

